ACTA

MATHEMATICA

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT
HERAUSGEGEBEN
VON

JOURNAL
RÉDIGÉ
PAR

G. MITTAG-LEFFLER

29

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1905.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUISFERDINANDSTRASSE 2.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 29. — 1905. — TOME 29.

ÜBER EINEN GEOMETRISCHEN CALCÜL
(VERKNÜPFUNGS-CALCÜL)

VON

GERHARD HESSENBERG

in BERLIN-CHARLOTTENBURG.

1. Es wird in dieser Arbeit ein geometrischer Calcül mit den Punkten einer Geraden aufgebaut, und zwar auf Grund folgender 3 Sätze:

I) *Durch zwei Punkte ist stets eine und nur eine Gerade möglich.*

II) *Zwei Gerade schneiden sich stets in einem (und wegen* I *nur in einem) Punkt.*

III) *Gehen die Verbindungslinien homologer Ecken zweier aufeinander bezogener Dreiecke durch einen Punkt, so schneiden sich die homologen Seiten in Punkten einer Geraden.*

Der erste Satz ist ein ebenes Verknüpfungsaxiom. Der zweite könnte durch das Parallelenaxiom ersetzt werden und gilt auf Grund desselben, wenn man die ideale unendlichferne Gerade mit den idealen unendlichfernen Punkten einführt. Die Sätze I und II sollen daher als die »*idealen* ebenen Verknüpfungsaxiome» bezeichnet werden. Es sei bemerkt, dass wir nur die ebene Geometrie betrachten.

Satz III ist der *Desargues'sche Satz*, dessen Beweis in bekannter Weise geführt werden kann, wenn noch die räumlichen Verknüpfungsaxiome vorausgesetzt werden; man zeigt nämlich, dass die durch den Satz beschriebene Figur der Schnitt eines vollständigen räumlichen Fünfecks ist.

2. Der aus diesen Sätzen zu entwickelnde Calcül steht in enger Beziehung zu zwei anderen geometrischen Rechenverfahren. Das erste ist

von STAUDT [1] begonnen und von Herrn LÜROTH [2] durchgeführt worden. Das zweite hat Herr HILBERT angegeben. [3] Allen drei Rechenverfahren gemeinsam sind die commutative und associative Addition, die associative Multiplication und die Verbindung beider Operationen durch die distributiven Gesetze. Angewandt werden diese Operationen im STAUDT-LÜROTH'schen Calcül auf die Würfe, im HILBERT'schen auf die Strecken, die in einer Geraden liegen und einen gegebenen Anfangspunkt haben, in unserem auf die Punkte einer Geraden. Zur Begründung der associativen, commutativen und distributiven Gesetze benutzen STAUDT und LÜROTH den projektiven Fundamentalsatz, Herr HILBERT, und nach seinem Vorgange auch ich, allein den DESARGUES'schen Satz. Und zwar geht Herr HILBERT nur von derjenigen Specialisierung des Satzes aus, die durch das Parallelwerden homologer Seiten der beiden Dreiecke entsteht. Aus dieser Specialisierung kann man aber in einfacher Weise mit alleiniger Hülfe des Axioms I und des Parallelenaxioms den allgemeinen DESARGUES'schen Satz herleiten, [4] so dass die Grundlagen unseres Calcüls nicht umfangreicher sind, wie die des HILBERT'schen.

3. Die unserem Calcül zu Grunde liegenden Constructionen sind die zu den STAUDT-LÜROTH'schen Verfahren gehörigen Linealconstruktionen, andererseits erkennt man in ihnen leicht eine projektivische Verallgemeinerung der HILBERT'schen. Alle drei Rechenverfahren gehen also auf eine gemeinsame Grundlage zurück. In der That hat man gezeigt, dass der projektive Fundamentalsatz aus dem DESARGUES'schen Satz und dem speciellen PASCAL'schen Satz bewiesen werden kann. Mit dem »*speciellen* PASCAL'schen Satz« ist der folgende gemeint:

IV. *Liegen die Ecken eines einfachen Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so schneiden sich die Gegenseiten in Punkten einer Geraden.*

---

[1] *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Heft II, § 19, ff., § 27 ff.

[2] *Über das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen.* Math. Ann. Bd. 8 und 9.

[3] *Grundlagen der Geometrie.* Kap. V. Der DESARGUES'sche Satz.

[4] Über eine noch weitergehende Eigenschaft des DESARGUES'schen Satzes hinsichtlich seiner Beweisbarkeit aus Spezialisierungen siehe meine Arbeit *Desargues'scher Satz und Centralcollineation* Archiv der Math., Bd. 3, Heft 1.

Der HILBERT'sche Calcül wie der unsrige enthalten nun diejenigen Eigenschaften des STAUDT-LÜROTH'schen Verfahrens, die allein aus dem DESARGUES'schen Satz folgen. Das sind die beiden associativen, die beiden distributiven Gesetze und von der Addition das commutative. Das commutative Gesetz der Multiplication wird direkt mit dem PASCAL'schen Satz identisch. Der letztere ist mit den Sätzen I bis III nicht beweisbar und darf daher in unseren Untersuchungen nicht angewandt werden.

4. Da wir keinerlei Anordnungsaxiome voraussetzen, können wir über die Anzahl der Punkte einer Geraden keine Angaben machen. Doch bleiben unsere Ergebnisse gültig — auch wenn sie unter Umständen trivial werden, — falls wir die Existenz eines vollständigen Vierecks annehmen, d. h. die Existenz von 4 Punkten, von denen keine 3 in einer Geraden liegen. Da hierdurch nur ein sofort zu übersehender, gänzlich trivialer Fall ausgeschlossen wird, ist diese Voraussetzung unter den Grundlagen unseres Calcüls nicht angeführt.

I. *Projektivische Verknüpfungen.*

5. Unter denjenigen Gebilden der projektivischen Geometrie, die allein aus dem DESARGUES'schen Satz gefolgert werden können, ist besonders die Centralcollineation bemerkenswert, d. h. diejenige Collineation, in der entsprechende Gerade sich auf einer festen Geraden, der Axe, schneiden, und entsprechende Punkte auf Geraden liegen, die durch einen festen Punkt, das Centrum, laufen. Der Nachweis ihrer Existenz ist sehr leicht, wenn man beachtet, dass die Figur des DESARGUES'schen Satzes aus zwei centralcollinearen Dreiecken besteht.[1]

6. Nunmehr denken wir uns eine Figur Φ, die aus irgendwelchen Punkten und gewissen ihrer Verbindungsgeraden besteht. Es sei genau angegeben, wieviel Punkte die Figur enthält, welche davon in gerader Linie liegen sollen und welche nicht, und welche Verbindungsgeraden gezeichnet sein sollen. Die Anzahl dieser Geraden sei n.

---

[1] In der auf S. 2, Fussnote, citierten Arbeit komme ich darauf ausführlicher zurück.

Wir nennen zwei Figuren, die auf Grund derselben Angaben gezeichnet sind, vorübergehend »gleichartige Figuren«. Beispielsweise sind zwei einfache Fünfecke, aber auch zwei vollständige Fünfecke, oder zwei Fünfecke mit den Diagonalen einer bestimmten Ecke *gleichartige* Figuren.

Wir schneiden die n Geraden der Figur Φ mit einer Geraden a in den n Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Diese projicieren wir von einem Punkte S auf eine zweite Gerade b, in die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$. Ziehen wir nun durch den Schnittpunkt von a mit b eine Gerade s, die von a und b verschieden ist, und bilden diejenige Centralcollineation mit dem Centrum S und der Axe s, in der die a der b entspricht, so entsprechen den Punkten A_i die Punkte B_i und diese sind die Schnittpunkte von b mit den Geraden der zu Φ collinearen Figur Ψ, welche natürlich mit Φ gleichartig ist.

Es folgt also: Ist eine gerade Punktreihe $A_1, \ldots, A_n$ der Schnitt einer Figur Φ, so ist jede zu ihr projektivische Punktreihe der Schnitt einer gleichartigen Figur.

7. Im allgemeinen werden nicht alle Punkte A_i, die zu dem Schnitt einer Figur Φ gehören, beliebig sein. Ist eine Figur Φ so beschaffen, dass von einem ebenen Schnitt derselben nicht alle Punkte willkürlich gewählt werden dürfen, so wollen wir sagen, *zwischen den Schnittpunkten bestehe eine Verknüpfung*. Eine solche besteht beispielsweise *nicht* für die Schnittpunkte eines Dreiecks mit einer Geraden. Zu 3 beliebigen Punkten einer Geraden, kann vielmehr jederzeit ein Dreieck gezeichnet werden, dessen Seiten durch diese 3 Punkte gehen (vgl. § 4). Dagegen dürfen von den 6 Schnittpunkten eines vollständigen Vierecks blos 5, von denen eines vollständigen n-Ecks blos $2n - 3$ willkürlich angenommen werden.

8. Die Geraden der Figur Φ mögen mit a_1, a_2, a_3, bis a_n bezeichnet sein und die a in den Punkten A_1, A_2, A_3 bis A_n treffen. Es mögen sich ferner 3 Gerade, etwa a_1, a_2, a_3, darunter befinden, die nicht durch einen Punkt gehen, und deren Schnittpunkte der Figur angehören und durch weitere Gerade, a_4, a_5 bis a_λ mit anderen Punkten der Figur verbunden sind. Ist nun a mit den Punkten A_1 bis A_n bekannt, ferner a_1, a_2 und a_3, so können wir a_4 bis a_λ einzeichnen. Wir werden im allgemeinen unter den Schnittpunkten der a_1 bis a_λ untereinander neue Punkte

von Φ vorfinden und durch dieselben neue Gerade $a_{\lambda+1}$ bis a_n ziehen können, die wieder neue Punkte liefern. Werden auf diesem Wege nach und nach alle Stücke der Figur erchöpft, und bestimmt diese Figur zugleich eine Verknüpfung zwischen den Punkten A_i, so soll diese eine *projektive Verknüpfung* genannt werden. Das Bestehen einer Verknüpfung äussert sich dadurch, dass von einzelnen Geraden a_k, a_l, a_r, ... bei unserem Verfahren *zwei Punkte* ermittelt werden, so dass die Punkte A_k, A_l, A_r nicht willkürlich sind.

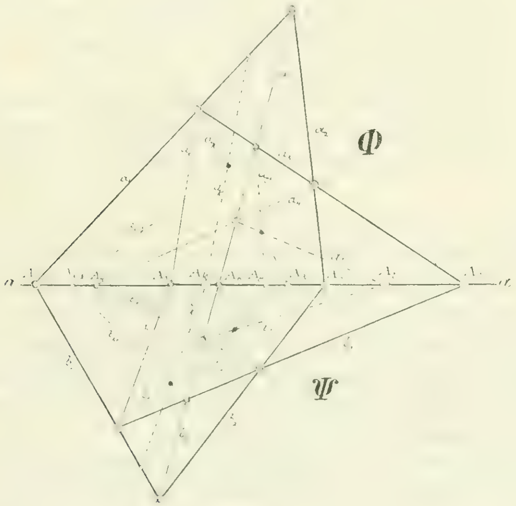


Fig. 1.

9. Wir wollen nunmehr beweisen, dass diese Punkte A_k, A_l, A_r, ... für eine projektive Verknüpfung von der speciellen Wahl der drei ersten Geraden a_1, a_2, a_3 unabhängig, also durch die willkürlichen Punkte A_1, ..., A_n eindeutig bestimmt sind. Wir zeichnen eine zweite, gleichartige Figur Ψ mit den Geraden b_i in derselben Reihenfolge der Stücke durch dieselben Punkte A_1, A_2, A_3, ..., A_n. Die drei Geraden b_1, b_2, b_3 durch A_1, A_2, A_3 bilden ein Dreieck, das mit dem Dreieck aus a_1, a_2, a_3 auf Grund des Desargues'schen Satzes centralcollinear gelegen ist. Denn die homologen

Seiten schneiden sich auf a, also gehen die Verbindungslinien homologer Ecken durch einen Punkt S.

In dieser durch $b_1 b_2 b_3$ bestimmten Collineation entsprechen die Geraden b_4 bis b_λ den Geraden a_4 bis a_λ, da die Ecken der Dreiecke $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$ sich untereinander und die Punkte A_4 bis A_λ als Punkte der Axe sich selbst entsprechen. Daher entsprechen auch die durch $b_1, \ldots, b_\lambda$ neu gefundenen Punkte von Ψ und hinwiederum die dadurch neu gefundenen Geraden $b_{\lambda+1}$ bis b_μ den homologen Stücken von Φ in unserer Collineation u. s. f. Speciell entspricht zuletzt b_k der a_k, und da sich entsprechende Gerade auf der Axe der Collineation schneiden, trifft b_k die a in dem Punkt A_k, *dessen Lage mithin von der speciellen Wahl der Geraden $a_1 a_2 a_3$ unabhängig ist*, w. z. b. w.

Indem wir das Resultat des § 6 beachten, folgt: *Besteht zwischen den Punkten A_1 bis A_n eine projektivische Verknüpfung, so besteht sie zwischen den Punkten jeder dazu projektivischen Punktreihe A'_1 bis A'_n.*

II. *Die Vierecksverknüpfung.*

10. Wir betrachten diejenige projektive Verknüpfung, die entsteht, wenn die Figur Φ ein vollständiges Viereck ist, und nennen sie *Vierecksverknüpfung.*[1] Sie besteht zwischen 6 Punkten einer Geraden und bestimmt den sechsten eindeutig aus den fünf anderen.

Im Anschlusse an die vorhergegangenen Betrachtungen greifen wir drei Seiten des Vierecks heraus, die sich in drei Ecken ABC des Vierecks $ABCD$ schneiden und bezeichnen sie (abweichend von der bisherigen Bezeichnung) mit a_1, b_1, c_1. Wir beachten, dass jede einem andern Paar Gegenseiten des Vierecks angehören muss, da sich zwei Gegenseiten nicht in einer Ecke des Vierecks schneiden. Die Gegenseiten DA, DB, DC seien bezw. mit a_2, b_2, c_2 bezeichnet. Werden die Schnittpunkte mit der

[1] Die Eigenschaften derselben sind von Staudt als Ausgangspunkt seiner Geometrie der Lage gewählt und ohne die allgemeine Betrachtung des Abschnitts I direkt aus dem Desargues'schen Satze hergeleitet worden.

festen Geraden a mit den entsprechenden grossen Buchstaben benannt, so wollen wir die Verknüpfung durch das Symbol

$$(A_1\,,\ A_2\,;\ B_1\,,\ B_2\,;\ C_1\,,\ C_2)$$

abkürzen.

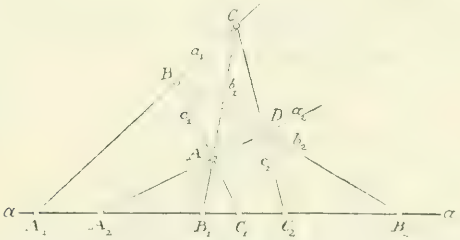


Fig. 2.

11. In diesem Symbol sind zweierlei Permutationen zulässig. Erstlich dürfen die Punktepaare beliebig mit einander vertauscht werden, aber ohne dass die Elemente eines Paares mit einander vertauscht werden. Dies folgt aus der Gleichberechtigung der drei Gegenseitenpaare.

Zweitens dürfen in zwei Punktepaaren die Elemente gleichzeitig vertauscht werden. Denn wenn sich a_1, b_1, c_1 in drei Ecken des Vierecks schneiden, so gilt das gleiche von a_2, b_2, c_1; a_2, b_1, c_2 und a_1, b_2, c_2. Dagegen schneiden sich a_2, b_2, c_2 in *einer* Ecke, ebenso a_2, b_1, c_1; a_1, b_2, c_1; a_1, b_1, c_2. Die Vertauschung der Elemente in einem oder allen drei Punktepaaren ist also unzulässig, sofern ihre Zulässigkeit nicht besonders erwiesen wird.

12. Denken wir uns zwei Punkte in der Vierecksverknüpfung veränderlich, so sagt das Bestehen der Verknüpfung aus, dass sie projektive Punktreihen beschreiben. Für uns kommt lediglich der Fall in Betracht, dass die veränderlichen Punkte verschiedenen Paaren angehören. Dann kann angenommen werden, dass es die Punkte B_2, C_2 sind. Wir halten die Geraden a_1, a_2 und b_1 fest und damit die Ecken A und C des Vierecks. Da C_1 fest ist, bleibt auch $AC_1 = c_1$, mithin auch B liegen. Bewegen sich jetzt B_2 und C_2, so bewegt sich D auf a_2 und wird von C und B

aus nach C_2 und B_2 projiciert; also beschreiben C_2 und B_2 projektive Punktreihen. Fällt D nach A, so fällt B_2 nach C_1, C_2 nach B_1. Fällt D in den Schnittpunkt von a_1 und a_2, so fallen C_2 und B_2 nach A_1; fällt D nach A_2, so fallen B_2 und C_2 nach A_2.

13. Im folgenden denken wir uns die Punkte A_1, A_2 und B_1 fest, so dass wir sie in der Bezeichnung nicht weiter anzudeuten brauchen. Wir schreiben dann abkürzungsweise

$$B_2 = (C_1 C_2)$$

um auszusprechen, dass die Verknüpfung

$$(A_1\,,\ A_2\,;\ B_1\,,\ B_2\,;\ C_1\,,\ C_2)$$

besteht. Die Bezeichnung ist eine provisorische.

Das Resultat des letzten Paragraphen kann dann so ausgesprochen werden:

V. *Bewegt sich ein Punkt X, so beschreiben die Punkte $Y = (CX)$ und $Y' = (XC)$ zu X projektive Punktreihen. Die Elemente A_1 und A_2 sind selbstentsprechende; fällt X nach B_1, so wird $Y = Y' = C$.*

Wir verallgemeinern dementsprechend unsere Bezeichnungsweise durch die Festsetzungen:

$$(A_1 X) = (X A_1) = A_1\,;$$

$$(A_2 X) = (X A_2) = A_2\,;$$

$$(B_1 X) = (X B_1) = X_1\,.$$

III. *Das associative Gesetz.*

14. Es besteht das Gesetz:

$$(C_1 (C_2 C_3)) = ((C_1 C_2) C_3)$$

welches wir rein formal, ohne einen Schnittpunktsatz zu Hülfe zu nehmen, auf Grund der bisherigen Entwickelungen beweisen können.

Zunächst konstruieren wir den Punkt $B_2 = (C_1 C_2)$ mit Hülfe eines Vierecks $ABCD$, von dem, wie bisher, die Seiten BC, CA, AB durch

A_1, B_1, C_1, die Seiten DA, DB, DC durch A_2, B_2, C_2 gehen. Sodann finden wir den Punkt $P = (B_2 C_3)$, indem wir die durch A_1, A_2 und B_2 gehenden Seiten beibehalten, folgendermassen: Wir ziehen $B_1 D$ bis zum Schnitt E mit $A_1 B$, EC_3 bis zum Schnitt F mit $A_2 D$. BF trifft a in $P = ((C_1 C_2) C_3)$.

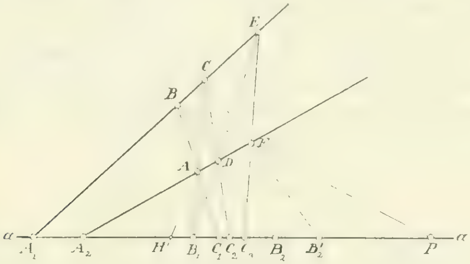


Fig. 3.

Trifft nun CF die a in B_2', so ergiebt das Viereck $CDEF$ die Verknüpfung $(A_1, A_2; B_1, B_2'; C_2, C_3)$ oder $B_2' = (C_2 C_3)$. Sodann folgt aus dem Viereck $ABCF$ die Verknüpfung

$$(A_1, A_2; B_1, P; C_1, B_2') \quad \text{oder} \quad P = (C_1 B_2') = (C_1(C_2 C_3)).$$

Damit ist das associative Gesetz bewiesen.

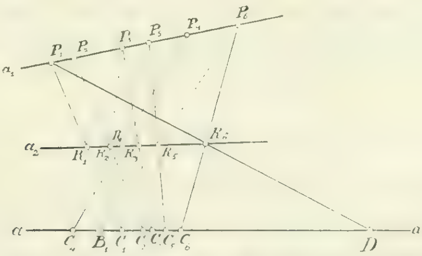


Fig. 4.

15. Figur 4 zeigt, wie der Punkt $D = (C_1 C_2 C_3 \ldots C_n)$ zu konstruieren ist. Man zieht durch C_1 einen beliebigen Strahl, der die a_1 in P_1,

die a_2 in R_1 schneiden möge. $B_1 R_1$ schneide a_1 in P_2, $C_2 P_2$ die a_2 in R_2, allgemein $B_1 R_{\lambda-1}$ die a_1 in P_λ, $C_\lambda P_\lambda$ die a_2 in R_λ. $P_1 R_n$ trifft a in D.

Allgemeiner würde $P_i R_k$, wenn $k > i$ ist, die a im Punkte $(C_i C_{i+1} \ldots C_k)$ treffen. Die Konstruktion versagt nicht, wenn eines der C, etwa C_λ, mit B_1 identisch wird. Alsdann wird $R_{\lambda-1} = R_\lambda$, $P_\lambda = P_{\lambda+1}$ und die Konstruktion ändert sich nicht, wenn C_λ überhaupt fortgelassen wird.

16. Die »Auflösung« der symbolischen Gleichungen $(MX) = N$ und $(XM) = N$ nach X kann auf Grund des associativen Gesetzes in der bekannten Weise ausgeführt werden,[1] indem man einen Punkt $Y = (M^{-1})$ aus der Verknüpfung $(YM) = B_1$ oder

$$(A_1\,,\, A_2\,;\, B_1\,,\, B_1\,;\, Y\,,\, M)$$

konstruiert. Vertauscht man nach § 11 die Elemente im zweiten und dritten Paar, so entsteht die Verknüpfung $(A_1\,,\, A_2\,;\, B_1\,,\, B_1\,;\, M\,,\, Y)$ oder $(MY) = B_1$.

Hiermit folgt aus $(MX) = N$; $(YMX) = (YN)$ oder $(B_1 X) = (YN)$ oder $X = (YN)$; ebenso $X = (NY)$ aus $(XM) = N$.

IV. *Das commutative Gesetz.*

17. *Das commutative Gesetz ist identisch mit dem Satz* IV (Pascal'scher Satz), *also auf Grund der Sätze* I *bis* III *nicht zu beweisen.*

Das Bestehen der beiden symbolischen Gleichungen

$$B_2 = (C_1 C_2) = (C_2 C_1)$$

bedeutet die Existenz der beiden Verknüpfungen

$$(A_1\,,\, A_2\,;\, B_1\,,\, B_2\,;\, C_1\,,\, C_2) \quad \text{und} \quad (A_1\,,\, A_2\,;\, B_1\,,\, B_2\,;\, C_2\,,\, C_1).$$

Wir denken uns das zur ersten Verknüpfung gehörige Viereck mit den Bezeichnungen des § 10 gezeichnet und konstruieren das zur zweiten gehörige unter Beibehaltung der 3 Geraden a_1, a_2, b_1 also der Ecken A, C. An Stelle der Geraden $c_1 = AB$, $c_2 = DC$ treten jetzt $c_2' = AB'$, $c_1' = D'C$.

[1] Vgl. hierzu § 25 und 27.

Es ergiebt sich also B' als Schnitt von C_2A mit $a_1 = A_1C$, D' als Schnitt von C_1C mit $a_2 = A_2A$. B_2' ist der Schnitt von $B'D'$ mit a. Soll es mit $B_2 = (C_1C_2)$ zusammenfallen, so laufen die 3 Geraden BD, $B'D'$ und a durch einen Punkt.

Dann aber ist das Sechseck $ABDCD'B'$ ein PASCAL'sches, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen und dessen Gegenseiten sich in Punkten $B_2C_1C_2$ einer Geraden schneiden. Die obige Behauptung ist damit erwiesen.

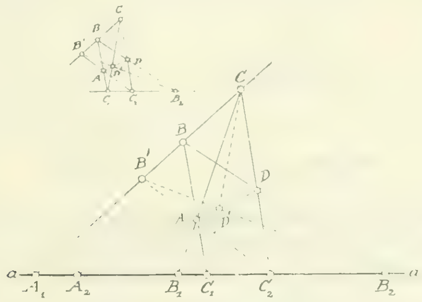


Fig. 5.

18. In speciellen Fällen kann eine Verknüpfung auch auf Grund des DESARGUES'schen Satzes commutativ sein. Der einfachste, bereits in § 16 angewandte Fall, tritt ein, wenn zwei Elemente eines Paares zusammenfallen. Denn dann kommt eine Permutation der Elemente dieses und eines zweiten Paares, die nach § 11 zulässig ist, auf eine alleinige Vertauschung der Elemente des zweiten Paares hinaus. Davon giebt es zwei Anwendungen:

VI. *Ist* $(C_1C_2) = B_1$, *so ist auch* $(C_2C_1) = B_1$.

VII. *Wenn* A_1 *und* A_2 *zusammenfallen, so ist allgemein* $(C_1C_2) = (C_2C_1)$.

Im Falle des Satzes VII wird aus Figur 5 ein PASCAL'sches Sechseck, dessen Existenz sich auf Grund unserer Entwickelungen aus dem DESARGUES'schen Satz ableiten lässt.[1]

[1] Vgl. meine Arbeit: *Über Beweise von Schnittpunktsätzen,* Archiv der Math. Bd. 3, Heft 1.

V. *Symbolischer Calcül und distributive Gesetze.*

19. Sind A_1 und A_2 von einander verschieden, so gleicht unsere Operation der Multiplication: Es giebt zwei Elemente A die durch die Operation (LA) bei beliebigem L in sich selbst übergehen. Wir legen daher A_1 das Zeichen ∞, A_2 das Zeichen 0 bei. B_1 spielt die Rolle der Einheit und werde daher mit 1 bezeichnet. An Stelle der Verknüpfung

$$(\infty, 0; 1, P; A, B)$$

schreiben wir von nun an symbolisch

$$P = AB.$$

Diese Operation ist associativ, aber nicht commutativ.

20. Fallen A_1 und A_2 zusammen, so gleicht unsere Operation der Addition, B_1 der Null. Wir bezeichnen daher $A_1 = A_2$ mit dem Zeichen ∞, B_1 mit 0 und schreiben für die Verknüpfung

$$(\infty, \infty; 0, S; A, B)$$

von nun an symbolisch

$$S = A + B.$$

Diese Operation ist associativ und commutativ.

21. Wir führen jetzt auf einer Geraden diese beiden Verknüpfungen mit denselben Fixpunkten ein, also

$$(\infty, 0; 1, P; A, B); \qquad P = AB,$$
$$(\infty, \infty; 0, S; A, B); \qquad S = A + B.$$

Dann sind beide durch die distributiven Gesetze verbunden. Nach Satz V ist nämlich die Punktreihe

$$\infty, 0, 1, A, B, S, X, \ldots$$

projektivisch zu den Punktreihen

$$\infty, 0, L, LA, LB, LS, LX, \ldots$$

und

$$\infty\,,\ 0\,,\ L\,,\ AL\,,\ BL\,,\ SL\,,\ XL\,,\ \ldots\,.$$

Da nun die Verknüpfung $S = A + B$ den Punkt 1 nicht enthält, andererseits eine projektivische ist, folgt aus

$$S = A + B, \quad \text{d. h.} \quad (\infty\,,\ \infty\,;\ 0\,,\ S\,;\ A\,,\ B)$$

sofort $LS = LA + LB$, nämlich

$$(\infty\,,\ \infty\,;\ 0\,,\ LS\,;\ LA\,,\ LB)$$

oder

$$L(A + B) = LA + LB$$

und analog

$$(A + B)L = AL + BL\,.$$

VI. *Der Ring aus 3 Verknüpfungen.*

22. Ein vollständiges Fünfeck $V_1 V_2 V_3 V_4 V_5$ schneidet mit seinen 10 Seiten $V_i V_k = v_{ik}$ eine Gerade a in 10 Punkten V_{ik} $(i\,, k = 1$ bis $5)$. Zwischen diesen bestimmt es 5 Vierecksverknüpfungen $\{\mathrm{I}\}$, $\{\mathrm{II}\}$ bis $\{\mathrm{V}\}$ entsprechend den fünf Vierecken (I), (II) bis (V), die durch Weglassen einer Ecke, V_1, V_2 bis V_5, aus ihm gebildet werden können.

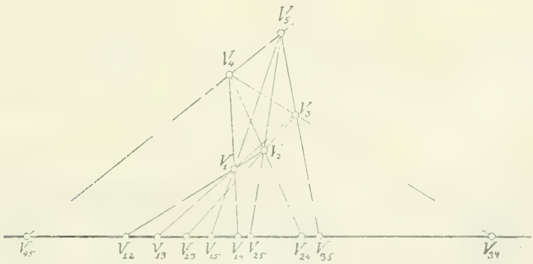


Fig. 6.

Die Verknüpfung $\{\mathrm{V}\}$ bestimmt aus 5 beliebig angenommenen der Punkte V_{ik} $(i\,, k = 1$ bis $4)$ den sechsten. Nimmt man weiterhin V_{15}

und V_{25} beliebig an, so hat man die Geraden $V_1 V_5$ und $V_2 V_5$ (falls das Viereck (V) gezeichnet ist), und mit diesen die Ecke V_5. Aus dem Viereck (III) findet man sodann V_{45}; besteht umgekehrt die Verknüpfung $\{III\}$, so geht $V_4 V_5$ durch V_{45}. Endlich geht $V_3 V_5$ durch V_{35}, wenn die Verknüpfung $\{II\}$ besteht.

Allgemein wird also das Bestehen dreier der Verknüpfungen hinreichend sein, damit die Punkte V_{ik} die Schnittpunkte eines vollständigen Fünfecks sind. *Je zwei der fünf Verknüpfungen sind daher Consequenzen der dritten*, in unserem speciellen Falle $\{I\}$ und $\{IV\}$ von $\{II\}$, $\{III\}$ und $\{V\}$.

23. Wir betrachten nunmehr das specielle Fünfeck, welches entsteht, wenn V_1, V_2, V_3 in gerader Linie liegen. Unser Satz wird dann nicht mehr *bedingungslos* gelten, da die zwei Verknüpfungen $\{IV\}\{V\}$ durch das Zusammenfallen der Punkte V_{12}, V_{23}, V_{31}, d. h. die Degeneration der Vierecke (IV), (V) bedeutungslos werden. Aber unsere specielle Schluss-

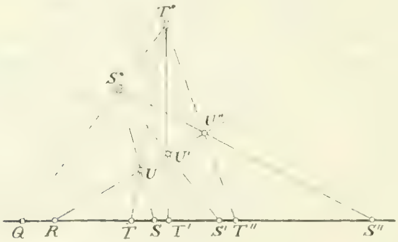


Fig. 7.

weise bleibt wörtlich gültig, und mit ihr die Folgerung, dass die *Verknüpfung* $\{I\}$ *eine Consequenz von* $\{II\}$ *und* $\{III\}$ *ist*. Die diesen Verknüpfungen entsprechenden Vierecke degenerieren nicht. Aus einer kleinen Abänderung der Bezeichnung wird zugleich die Symmetrie der Beziehung zwischen $\{I\}$, $\{II\}$, $\{III\}$ klar werden. Wir nennen diese, durch ein specielles Fünfeck vermittelte Beziehung zwischen drei Verknüpfungen einen *Ring* und sagen: *die drei Verknüpfungen* $\{I\}$, $\{II\}$, $\{III\}$ *bilden einen Ring.*

24. Wir ändern die Bezeichnungen V_4, V_5 in S^*, T^*; V_1, V_2, V_3 in U, U', U''; V_{45} in Q; $V_{12} = V_{23} = V_{31}$ in R; V_{41}, V_{42}, V_{43} in S, S', S''; V_{51}, V_{52}, V_{53} in T, T', T''. Alsdann lautet unser Satz:

VIII. *Von den drei Verknüpfungen*

$$(Q\,,R\,;S\,,T'\,;T\,,S')\,,\;(Q\,,R\,;S',T''\,;T',S'')\;;\;(Q\,,R\,;S'',T\,;T'',S)$$

ist jede eine Consequenz der beiden andern.

Der Satz ist leicht direkt, ohne die allgemeine Betrachtung des § 22 an der Figur 7 zu beweisen, und zwar ohne Anwendung von Schnittpunktsätzen, rein formal, wie in der hier gegebenen Ableitung.

Macht man die Substitutionen

$$\frac{Q\,,\;R\;;\;S\;,S'\,,S''\,;\;T\;,\;T',T''}{A_2\,,A_1\;;\;B_1\,,C_1\,,P_1\;;\;B_2\,,P_2\,,C_2}$$

so nimmt Satz VIII die Gestalt an

VIII$_a$. *Die drei Verknüpfungen*

$$(A_1\,,A_2\,;P_1\,,P_2\,;C_1\,,C_2)\;;\;(A_1\,,A_2\,;B_1\,,P_2\,;C_1\,,B_2)\;;\;(A_1\,,A_2\,;B_1\,,C_2\,;P_1\,,B_2)$$

bilden einen Ring.

Unter Verwendung der abgekürzten Bezeichnung des § 13:

VIII$_b$. *Die Verknüpfungen*

$$(A_1\,,A_2\,;P_1\,,P_2\,;C_1\,,C_2); \qquad P_2 = (C_1B_2); \qquad C_2 = (P_1B_2)$$

bilden einen Ring.

Nach Elimination von B_2 nach § 16:

VIII$_c$. *Die Verknüpfung*

$$(A_1\,,A_2\,;P_1\,,P_2\,;C_1\,,C_2) \quad \textit{ist identisch mit} \quad P_2 = (C_1(P_1^{-1})C_2)$$

(*Transformation des dritten Fixpunktes*).

25. Der § 16 selbst enthält bereits in den Verknüpfungen

$$(XM) = N, \qquad (MY) = B_1, \qquad X = (NY),$$

einen Ring, der aus VIII_b durch die Specialisierung $P_2 = B_1$ und die Substitutionen

$$P_1 = N, \qquad B_2 = Y, \qquad C_1 = M, \qquad C_2 = X$$

hervorgeht. Die Existenz des Elementes $Y = (M^{-1})$ folgt also direkt aus Satz VIII, ohne die Betrachtungen des Abschnittes III.

Anmerkung. Unter Beachtung dieser Thatsache kann man das associative Gesetz aus Satz VIII ableiten. Ersetzt man, wie eben gezeigt war, die Verknüpfungen des § 14

$$(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; B_1, B_2'; C_2, C_3)$$

durch

$$(A_1, A_2; B_1, B_1; C_2, H) \text{ (vgl. Fig. 3)},$$

und

$$(A_1, A_2; B_1, C_1; B_2, H) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; B_1, C_3; H, B_2')$$

so folgt hieraus und aus

$$(A_1, A_2; B_1, P; B_2, C_3) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; B_1, P'; C_1, B_2')$$

auf Grund des Satzes VIII [1]

$$(A_1, A_2; H, P; C_1, C_3) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; H, P'; C_1, C_3),$$

also $P = P'$, da die Vierecksverknüpfung jedes Element aus den 5 andern eindeutig bestimmt.

26. Die Eigenschaften des Ringes geben uns ein Mittel an die Hand, um aus einer Verknüpfung eine andere abzuleiten, in der zwei Elemente ein Paar bilden, die in der ersten getrennt waren.

Es sei durch geeignete Permutationen bewirkt, dass die getrennten und zu vereinigenden Elemente an vierter und fünfter Stelle stehen. Sie seien mit A und B bezeichnet und unsere Verknüpfung laute

$$(V, U; E, A; B, F) \qquad [= (U, V; A, E; B, F)].$$

[1] Man mache die Substitutionen

$$\frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{A_1, A_2; C_1, B_2, P; H, B_1, C_3} \quad \text{bezw.} \quad \frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{A_2, A_1; C_3, B_1', P'; H, B_1, C_1}.$$

Wir führen sie über in

$$(V, U; A, B; F', E) \qquad [= (U, V; A, B; E, F')]$$

nach VIII und durch die Substitution

$$\frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{V, U; E, F, A; B, A, F'}$$

als mittelste der Relationen VIII ergiebt sich:

$$(V, U; F, F'; A, A) \qquad [= (U, V; A, A; F', F)].$$

Aus den eingeklammerten Umschreibungen ersieht man leicht folgende Regel:

IX. *Um B mit A zusammenzubringen, lasse man das weder B noch A enthaltende Paar unverändert, vertausche B mit dem zu A gehörenden Element E und ersetze das letzte Element F durch ein neues F', welches aus einer dritten Verknüpfung zu entnehmen ist.*

Diese wird so gebildet: Das von A und B freie Paar lasse man stehen; das zweite Paar entsteht durch Verdoppelung von A. Das dritte besteht aus denjenigen Elementen, die zuletzt übrig bleiben, wenn man die vertauschten Elemente (B und E) auch noch ausscheidet, — dass sind F und F'.

27. Als Beispiel wählen wir nochmals die Auflösung der Gleichung $B_2 = (C_1 C_2)$ nach C_1.

Es ist in der Relation

$$(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2)$$

C_1 an die Stelle von B_2 zu bringen, da es mit B_1 ein Paar bilden soll. Wir vertauschen es mit B_2 und schreiben C_2' für C_2 (erste Hälfte der Regel):

$$(A_1, A_2; B_1, C_1; B_2, C_2').$$

C_2' ergiebt sich, indem man A_1, A_2 stehen lässt, B_1 verdoppelt, die vertauschten (B_2 und C_1) ausscheidet und die übrigbleibenden, — C_2 und C_2' — als drittes Paar wählt (zweite Hälfte der Regel):

$$(A_1, A_2; B_1, B_1; C_2, C_2').$$

Dies sind die drei Relationen

$$B_2 = (C_1 C_2), \qquad C_1 = (B_2 C_2'), \qquad (C_2 C_2') = B_1.$$

VII. *Coordinaten, Gleichung der Geraden.*

28. Projiciert man einen Punkt P der Ebene auf zwei verschiedenen Wegen auf dieselbe Gerade a, so sollen diese Projektionen X und Y die Coordinaten des Punktes heissen. Führt man auf a einen Calcül ein, so kann man nach der Relation fragen, die zwischen X und Y besteht, wenn sich P auf einer Geraden bewegt.

Wir wählen als einfachste sich bietende Methode die direkte Projektion aus zwei verschiedenen Centren Ξ und H; ΞP treffe a in X, HP treffe sie in Y. Ausserdem sei der Schnitt von $H\Xi$ mit a durch U bezeichnet. Wenn X und Y nicht beide nach U fallen, ist P eindeutig bestimmt und liegt nicht auf ΞH. Die Punkte von ΞH müssen also vorläufig als ausgeschlossen betrachtet werden.

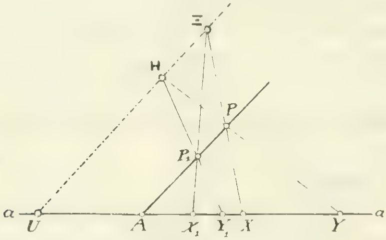


Fig. 8.

29. Schneidet die Gerade PP_1 die a in A, und sind $X_1 Y_1$ die Coordinaten von P_1, so folgt aus dem Viereck $\Xi H P P_1$ die Verknüpfung

$$(U, A; X_1, Y; Y_1, X),$$

die die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass P auf AP_1 liegt.

Da allen diesen Verknüpfungen das Element U gemeinsam ist, empfiehlt es sich, dasselbe als Fixpunkt des Calcüls zu wählen, am besten als

∞, da dieser in der Addition und Multiplikation an erster Stelle steht, während die Rollen von 0 und 1 in beiden Operationen von Grund aus verschieden sind.

Es handelt sich jetzt darum, die Verknüpfung

$$(U, A; X_1, Y; Y_1, X)$$

durch die speciellen unseres Calcüls, in dem die Elemente 0 und 1 irgendwie angenommen seien, auszudrücken.

30. **Erster Fall**: A falle nach 0. Wir schreiben nach Satz VIII_c sofort hin:

$$Y = Y_1 X_1^{-1} X = EX$$

wenn $E = Y_1 X_1^{-1}$ gesetzt wird.

Wie man sieht ist E die Y-Coordinate desjenigen Punktes, für den X in den Einheitspunkt fällt. Man hätte diesen Punkt als P_1 wählen können, wodurch die Verknüpfung sofort die Gestalt

$$(\infty, 0; 1, Y; E, X) \quad \text{oder} \quad Y = EX$$

angenommen hätte.

31. **Zweiter Fall**: A falle nicht nach 0. Die Y-Coordinate desjenigen Punktes, für den X nach 0 fällt, sei N. Wir wählen diesen Punkt als P_1 und erhalten:

$$(\infty, A; 0, Y; N, X).[1]$$

Wir vertauschen nach Satz IX 0 mit A

(1) $$(\infty, 0; A, Y'; N, X)$$

und erhalten nach demselben Satz für Y':

(2) $$(\infty, \infty; Y, Y'; N, X).$$

Für (1) schreiben wir nach VIII_c

$$Y' = NA^{-1}X$$

[1] Fällt A nach ∞, so enthält man $Y = N + X$; dies entspricht einer Festsetzung $A^{-1} = 0$ im Endresultat.

und für (2) nach demselben Satz:

$$Y' = N - Y + X.$$

Damit ergiebt sich nach Elimination von Y':

$$\begin{aligned} Y &= (1 - NA^{-1})X + N \\ &= EX + N \quad \text{für} \quad E = 1 - NA^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist die Gleichung der Geraden stets vom ersten Grade und die Coefficienten stehen links von den Coordinaten.

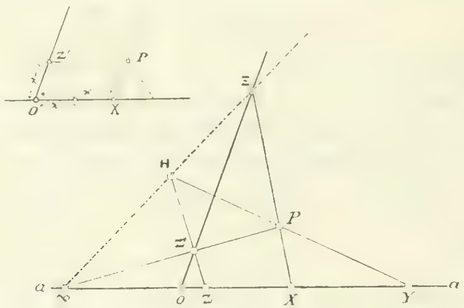


Fig. 9.

32. Zieht man die Gerade Ξo, projiciert P von ∞ auf dieselbe nach Z' und Z' von H nach Z auf a, so erhält man die projektive Verallgemeinerung des von Herrn Hilbert benutzten, dem cartesischen analogen Systems. Zwischen Z, X, Y findet man aus dem Viereck $Z'P\Xi H$ sofort die Verknüpfung

$$(\infty, \infty; 0, Y; X, Z)$$

oder

$$Y = Z + X.$$

Danach wird die Gleichung der Geraden in X und Z

$$Z + X = (1 - NA^{-1})X + N,$$

$$Z = E'X + N \quad \text{für} \quad E' = -NA^{-1}$$

also wieder vom ersten Grade.

Hieran kann, fast mit den Worten des Herrn HILBERT, der Beweis angeschlossen werden, dass eine ebene Geometrie, in der die Sätze (I), (II), (III) gelten, als Teil einer räumlichen aufgefasst werden kann, in der die räumlichen Axiome der Verknüpfung in der bekannten Erweiterung durch ideale Elemente gültig sind, und in der es fünf Punkte giebt von denen keine 4 in einer Ebene liegen (cf. § 4).

VIII. *Gleichung der Vierecksverknüpfung.*

33. Wir lösen noch die Aufgabe, mit Hülfe unseres Calcüls die Bedingung dafür aufzustellen, dass zwischen 6 Punkten die Verknüpfung $(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2)$ bestehe. Wir zeichnen ein Viereck $ABCD$, das

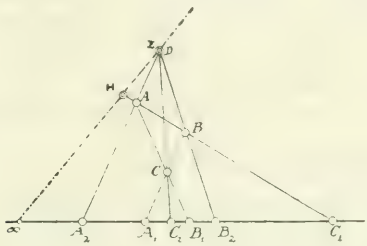


Fig 10.

in gewohnter Weise die Verknüpfung ergiebt, wählen D als Ξ und den Schnittpunkt von $\Xi\infty$ mit AB als H. Danach ergeben sich sofort 5 von den 6 Coordinaten der Punkte ABC. Nämlich:

$$X_a = A_2, \qquad Y_a = C_1,$$

$$X_b = B_2, \qquad Y_b = C_1,$$

$$X_c = C_2.$$

Um Y_c zu finden, giebt es zwei Wege: Man stellt die Gleichungen der durch C gehenden Geraden a_1 und b_1 auf:

$$Y = E_a X + N_a, \qquad Y = E_b X + N_b$$

und wählt $X = X_c = C_2$. Die Vergleichung beider Ausdrücke für Y liefert

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Verknüpfung.

34. a_1 geht durch A_1; für diesen Punkt ist $X = Y = A_1$, also

$$A_1 = E_a A_1 + N_a, \qquad N_a = -(E_a - 1) A_1.$$

Damit wird die Gleichung von a_1 zu

$$Y = E_a X - (E_a - 1) A_1$$

oder

$$Y - X = (E_a - 1)(X - A_1) = F_a(X - A_1).$$

Setzt man hierin die Coordinaten von B ein, so erhält man für F_a

$$F_a = -(B_2 - C_1)(B_2 - A_1)^{-1},$$

also

$$Y_c - X_c = -(B_2 - C_1)(B_2 - A_1)^{-1}(C_2 - A_1)$$

und aus der Gleichung für b_1 folgt analog

$$Y_c - X_c = -(A_2 - C_1)(A_2 - B_1)^{-1}(C_2 - B_1).$$

Durch Gleichsetzen ergiebt sich die in jedem ihrer Elemente lineare Bedingung

$$(A_2 - C_1)(A_2 - B_1)^{-1}(C_2 - B_1)(C_2 - A_1)^{-1}(B_2 - A_1)(B_2 - C_1)^{-1} = 1.$$

35. Fällt einer der Punkte nach ∞, so hat man die beiden Faktoren, in denen es auftritt, fortzulassen.[1] Fällt beispielsweise A_2 nach ∞, so kann man wieder D nach Ξ, zugleich aber auch A nach H legen. Dadurch wird

$$X_b = B_2, \qquad X_c = C_2, \qquad Y_b = C_1, \qquad Y_c = B_1,$$

[1] Dies ist bei Zulässigkeit von Stetigkeitsbetrachtungen sofort klar. Der Ausdruck

$$(A_2 - C_1)(A_2 - B_1)^{-1} = (1 - C_1 A_2^{-1})(1 - B_1 A_2^{-1})^{-1}$$

geht für $A_2 = \infty$ in den Wert 1 über.

und die Gleichung der Geraden A_1BC hat die Form

$$Y - X = F(X - A_1)$$

aus der sich nach Einsetzen der speciellen Wertsysteme und Elimination von F die Relation ergiebt

$$(C_2 - B_1)(C_2 - A_1)^{-1}(B_2 - A_1)(B_2 - C_1)^{-1} = 1.$$

Fallen zwei Punkte nach ∞, so kann die Gleichung der Verknüpfung mittelst der Sätze VIII sofort hingeschrieben werden.

36. Die Punkte einer Geraden bilden unter Ausschluss des Punktes ∞ ein *complexes Zahlensystem* im Sinne des Herrn Hilbert:[1] Es fehlen die Gesetze der Anordnung, der Stetigkeit und das commutative Gesetz der Multiplication. Die Rolle der beiden letzteren hat Herr Hilbert durch seine »Nicht-Archimedische» und »Nicht-Pascalsche» Geometrie klargestellt.

In der Geometrie der reinen Schnittpunktsätze (Geometrie der Lage im Sinne Staudts) sind die Anordungssätze scheinbar unwesentlich: Aus den Lehrsätzen verschwinden sie nach der Einführung imaginärer Elemente gänzlich; bei den Beweisen sind sie nur hin und wieder notwendig. Auf ihre Bedeutung für diesen Zweig der Geometrie beabsichtige ich in einer zweiten Arbeit zurückzukommen.

August 1901.

[1] *Grundlagen der Geometrie*, § 13.

ÜBER DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DER DARSTELLUNG EINES EINDEUTIGEN ZWEIGES EINER MONOGENEN FUNCTION DURCH HERRN MITTAG-LEFFLER, DER METHODE DER MITTELWERTE DES HERRN BOREL UND DER TRANSFORMATION DES HERRN LINDELÖF

VON

L. HANNI
in WIEN.

Es sei durch die Potenzreihe

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

die innerhalb eines Kreises mit endlichem Radius convergiere, in einem gewissen Bereiche, der sich über den Convergenzkreis von (1) hinaus erstreckt, eine monogene Function $F(x)$ definiert. Nach den bekannten Theoremen[1] des Herrn MITTAG-LEFFLER lässt sich innerhalb des zu den Elementen

$$(2) \qquad F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\nu)}(a), \ldots$$

gehörigen Hauptsternes A der Functionszweig $FA(x)$ auf verschiedene Arten durch Ausdrücke darstellen, in denen wie bei der Reihe (1) ausser den Elementen (2) und den Potenzen von $x-a$ nur noch Constanten vorkommen, die von den Elementen (2), von x und von a unabhängig sind. Mit diesen Darstellungen von $FA(x)$ stehen nun die Darstellungen eines Functionszweiges, die man durch die Methode der Mittelwerte des Herrn BOREL und durch die Transformation des Herrn E. LINDELÖF erhält, in engem Zusammenhange, wie wir im Folgenden zeigen werden, indem wir diese drei Methoden mit einander vergleichen.

[1] Acta Mathem., Bd. 23, 24, 26.

I.

An erster Stelle untersuchen wir, in welcher Beziehung die durch die Methode der Mittelwerte sich ergebende Darstellung eines eindeutigen Zweiges von $F(x)$ zur Darstellung desselben durch Herrn Mittag-Leffler steht. Dabei nehmen wir unter den verschiedenen Arten von Mittelwerten den sehr allgemeinen Fall, welchen Herr Borel in seiner Preisschrift [1] angegeben hat. Ist

$$s_\nu = \sum_{r=0}^{\nu} \frac{1}{\lfloor r} F^{(r)}(a)(x-a)^r, \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

so definiert hier Herr Borel als Mittelwert der Partialsummen

$$s_0, s_1, \ldots, s_\nu, \ldots$$

den Ausdruck

$$(3) \qquad m_1 = \lim_{t=+\infty} \frac{c_0(t)s_0 + c_1(t)s_1 + \ldots + c_n(t)s_n + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_n(t) + \ldots}.$$

wo die $c_\nu(t)$ Functionen von t sind, die folgenden Bedingungen genügen: [2]

1) Sie sollen für $t \geqq 0$ nicht negativ werden und es soll für diese Werte von t höchstens eine endliche Anzahl derselben verschwinden.
2) Es soll in (3) der Nenner $\varphi(t)$ für $t \geqq 0$ gleichmässig convergieren und $\lim_{t=+\infty} \varphi(t) = +\infty$ sein.
3) Es soll für jeden beliebigen Wert von ν $\lim_{t=+\infty} \frac{c_{\nu+1}(t)}{c_\nu(t)} = +\infty$ sein.

[1] Ann. de l'école norm., III ser., 16, (1899), p. 54.

[2] Wie man ausgehend vom Begriffe des arithmetischen Mittels von n Grössen zur Einführung dieser allgemeinen Art von Mittelwerten gelangt, führt Herr Borel aus in den *Leçons sur les séries diverg.*, chap. III. Hier gibt er zugleich auch eine etwas einfachere Definition eines Mittelwertes, indem er $c_\nu(t) = c_\nu t^\nu$ setzt und ausserdem nur noch annimmt, dass die erste und zweite der oben angeführten Bedingungen erfüllt seien. Doch kann in diesem Falle im allgemeinen auch die dritte Bedingung erfüllt werden, indem man nämlich die Art des Grenzüberganges $\lim t = +\infty$ entsprechend wählt, so dass dann diese Art von Mittelwerten ebenfalls unter der im Texte definierten enthalten ist.

Der so definierte Ausdruck (3) hat nun die Eigenschaft, dass er für alle Werte von x innerhalb des Convergenzkreises von (1) gleichmässig zum Grenzwerte $F(x)$ convergiert, da in demselben für ein endliches r die Functionen $c_0(t)$, $c_1(t)$, ..., $c_r(t)$ wegen seines distributiven Charakters gleich Null gesetzt werden können, ohne seinen Grenzwert zu ändern und die Summen s_ν, $s_{\nu+1}$, ... für $\nu > r$ sich sämmtlich dem Grenzwerte s der Reihe (1) beliebig nähern. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass m_1 noch für Werte von x ausserhalb des Convergenzkreises von (1) convergiert und die Function $F(x)$ darstellt. Da für die Verwendung der Methode der Mittelwerte zur Darstellung eines Functionszweiges nur dieser Fall in Betracht kommt, so können wir über die Functionen $c_\nu(t)$ noch folgende Annahme machen:

4) Ist B ein einfach zusammenhängender Bereich, der ausser dem Einheitskreise wenigstens noch einen endlichen Bereich enthält, so sollen die $c_\nu(t)$ so beschaffen sein, dass der Mittelwert m_1' der Partialsummen der Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$ in jedem beliebigen in B gelegenen Bereiche B' gleichmässig convergiert.

Unter dieser Voraussetzung ist dann m_1' in B eine analytische Function von x und es ist daher in diesem Bereiche $m_1' = \frac{1}{1-x}$. Da sich nun mittels des CAUCHY'schen Integrals die Transformation der Reihe (1) auf die der geometrischen Reihe zurückführen lässt, so ist diese letzte Voraussetzung über die Functionen $c_\nu(t)$ dazu hinreichend, dass auch ein einfach zusammenhängender Bereich E_1 existiert, der ausser dem Convergenzkreise von (1) wenigstens noch einen endlichen Bereich enthält, und in dem $m_1 = FE_1(x)$ ist.

Der so definierte Mittelwert m_1 ist somit eine Transformation der Potenzreihe (1) in einen Ausdruck mit grösserem Convergenzbereiche, wenn Functionen $c_\nu(t)$ existieren, die diesen Bedingungen genügen. Dass es wirklich solche Functionen gibt, zeigt der bekannte von Herrn BOREL ausführlich behandelte Fall $c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}}$ (exponentielle Summation).

Auf den Mittelwert m_1 kann man wieder denselben Prozess anwenden wie auf die Reihe (1), indem man ihn als Grenzwert einer Reihe von Functionen ansieht, deren Partialsummen σ_0, σ_1, ..., σ_ν, ... so beschaffen

sind, dass $\lim\limits_{\nu=+\infty} \sigma_\nu = m_1$ ist. Um in einfacher Weise eine solche Reihe zu erhalten, lassen wir in (3) den Parameter t der Reihe nach die Werte $t = 0, 1, 2, \ldots$ durchlaufen und bilden die Ausdrücke

$$m_1(\nu) = \frac{c_0(\nu)s_0 + c_1(\nu)s_1 + \ldots + c_n(\nu)s_n + \ldots}{c_0(\nu) + c_1(\nu) + \ldots + c_n(\nu) + \ldots}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Den Grenzwert (3) kann man dann durch die Reihe

$$m_1(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[m_1(\nu + 1) - m_1(\nu) \right] \tag{4}$$

ersetzen, da diese Reihe zu demselben Grenzwert wie (3) convergiert und dasselbe Verhalten zeigt. Wenn nämlich (3) für alle Werte von x in jedem Bereiche E_1' gleichmässig zum Grenzwerte $FE_1(x)$ convergiert, so convergiert daselbst auch die Reihe (4) gleichmässig zu diesem Grenzwerte und ungekehrt. Durch Einführung der Reihe (4) erhält man jetzt in derselben Weise wie Herr Borel[1] in dem Falle, wo $c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\lfloor \nu}$ ist, als zweiten Mittelwert der Summen $s_0, s_1, \ldots, s_\nu, \ldots$ den Ausdruck

$$m_2 = \lim_{t=+\infty} \frac{c_0(t)m_1(0) + c_1(t)m_1(1) + \ldots + c_\nu(t)m_1(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots}.$$

Dieser Ausdruck zeigt wieder denselben Charakter wie der Mittelwert m_1. Denn zwischen den σ_ν und den Partialsummen einer Potenzreihe besteht kein wesentlicher Unterschied, und auch der Convergenzbereich E_1 kann unter sehr allgemeinen Bedingungen betreffs seines Randes auf das Innere eines Kreises conform abgebildet werden. Es folgt daher auch in diesem Falle ebenso wie bei m_1 aus der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 4), dass ein einfach zusammenhängender Bereich E_2 existiert, der in seinem Innern den Bereich E_1 enthält und in dem $m_2 = FE_2(x)$ ist.

Diese Methode, aus einem gegebenen Mittelwerte einen neuen abzuleiten, kann man beliebig fortsetzen und erhält so folgende Kette von Mittelwerten

[1] Ann. de l'école norm., III ser., 16 (1899), p. 53.

$$
(5)\quad \left\{
\begin{array}{l}
m_1 = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)s_0 + c_1(t)s_1 + \ldots + c_\nu(t)s_\nu + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\[2ex]
m_2 = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)m_1(0) + c_1(t)m_1(1) + \ldots + c_\nu(t)m_1(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\[2ex]
m_3 = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)m_2(0) + c_1(t)m_2(1) + \ldots + c_\nu(t)m_2(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
m_n = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)m_{n-1}(0) + c_1(t)m_{n-1}(1) + \ldots + c_\nu(t)m_{n-1}(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

die eine Verallgemeinerung der von den Herrn Hölder[1] und Cesàro[2] aufgestellten Kette ist. Jeder Mittelwert dieser Kette ist wieder von demselben Charakter wie der Mittelwert m_1. Da man infolge dessen die Schlüsse, welche bei der Einführung von m_1 und m_2 aus der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 4) gezogen wurden, auch auf jeden folgenden Mittelwert dieser Kette übertragen kann, so existiert eine Folge von einfach zusammenhängenden Bereichen $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass jeder Bereich E_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ im Innern des folgenden Bereiches liegt und dass für alle Werte von x in demselben $m_\nu = FE_\nu(x)$ ist

Wollen wir diese durch die Methode der Mittelwerte erhaltene Darstellung eines Functionszweiges mit den von Herrn Mittag-Leffler gegebenen Darstellungen vergleichen, so haben wir zu untersuchen, ob sich ein beliebiger Mittelwert m_n der Kette (5) auf eine derselben zurückführen

[1] Mathem. Ann., Bd. 20, (1882), p. 535, ff.

[2] Bull. des sciences mathem., 1890, p. 114, ff.

lässt, und ob die eben gemachten Annahmen dazu hinreichend sind, dass $\lim_{n=+\infty} m_n$ in dem ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptstern A convergiert.

Um zur Lösung dieser Aufgabe zu gelangen, stellen wir zunächst m_1 durch folgende Doppelreihe dar

$$m_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{c_0(t)}{\varphi(t)} F(a) \\ \frac{c_1(t)}{\varphi(t)} \left\{ F(a) + F^{(1)}(a)(x-a) \right\} \\ \frac{c_2(t)}{\varphi(t)} \left\{ F(a) + F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 \right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)} \left\{ F(a) + F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

in der t grösser sein soll als eine beliebig grosse positive Zahl M. Diese Doppelreihe convergiert für alle Werte von x, für welche m_1 convergiert, und es ist dann ihr Grenzwert gleich m_1. Bezeichnet nämlich $S_r^{(s)}$ die Summe derjenigen Terme, welche den ersten s Zeilen und r Colonnen dieser Doppelreihe angehören, so besteht die Gleichung $m_1 = \lim_{s=+\infty} \left(\lim_{r=+\infty} S_r^{(s)} \right)$ nicht nur für $r = s$, sondern sie bleibt wegen des distributiven Charakters von m_1 auch noch giltig wenn r und s verschiedene und von einander unabhängige Werte annehmen. Daraus ergibt sich, dass $S_r^{(s)}$ auch zum Grenzwerte m_1 convergiert, wenn man r und s gleichzeitig und unabhängig von einander zum Grenzwerte $+\infty$ übergehen lässt; es besteht somit für alle Werte von x, für welche m_1 convergiert, die Gleichung $m_1 = \lim_{r,s=+\infty} S_r^{(s)}$. Es kann aber der Convergenzbereich von $\lim_{r,s=+\infty} S_r^{(s)}$ auch nicht

grösser sein als der von m_1, da aus der Convergenz dieser Doppelreihe wieder die Convergenz von m_1 folgt. Aus der Convergenz von m_1 folgt ferner, dass auch die einzelnen Colonnen dieser Doppelreihe convergieren. Da dann nach einem zuerst von Herrn O. Stolz aufgestellten Satze[1] auch die Reihe der Colonnensumme zu demselben Grenzwerte wie die Doppelreihe convergiert, so gilt für alle Werte von x, für welche m_1 convergiert, auch die Gleichung $m_1 = \lim_{r=+\infty}\left(\lim_{s=+\infty} S_r^{(s)}\right)$. Endlich kann der Convergenzbereich der Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe nicht grösser sein als der Convergenzbereich von m_1; denn wegen des distributiven Charakters der Reihe der Colonnensummen ergibt sich in derselben Weise wie aus der Convergenz von m_1 wieder die Convergenz der Doppelreihe. Die Gleichung (3) geht somit durch diese Transformation über in die äquivalente Gleichung

$$(6) \qquad m_1 = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=\lambda_1}^{\infty} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \cdot \frac{1}{\lfloor\lambda_1} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1}$$

$$= \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(1)}(t) \frac{1}{\lfloor\lambda} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^{\lambda}$$

wo $c_\lambda^{(1)}(t) = \sum_{\lambda_2=\lambda}^{\infty} \frac{c_{\lambda_1}(t)}{\varphi(t)}$ ist, und es ist auf diese Weise m_1 schon als *Grenzwert* eines Ausdruckes dargestellt, der von derselben Form ist wie der von Herrn Mittag-Leffler in der I. note seiner Abhandlung für ein $g_n(x)$ aufgestellte Ausdruch $\sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$.

In derselben Weise kann man jetzt auch den als m_2 definierten Ausdruck transformieren. Berücksichtigt man, dass

$$m_1(\nu) = c_0^{(1)}(\nu)F(a) + c_1^{(1)}(\nu)F^{(1)}(a)(x-a) + c_2^{(1)}(\nu)\frac{1}{\lfloor 2}F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots$$

ist, so erhält man für m_2 die unendliche Doppelreihe

---

[1] Mathem. Ann., Bd. 24, (1884), p. 159; über die weitere Ausführung der Theorie der unendlichen Doppelreihen vgl. man: Pringsheim, Sitzungsber. der baier. Akad., math.-phys. Cl. 1897, p. 101 ff., Mathem. Ann., Bd. 53, (1900), p. 289 ff., London, ebenda, p. 322 ff.

$$
(7)\quad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{c_0(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(0)F(a)+c_1^{(1)}(0)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(0)\dfrac{1}{|\underline{2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots\right\}\\[2ex]
\dfrac{c_1(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(1)F(a)+c_1^{(1)}(1)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(1)\dfrac{1}{|\underline{2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots\right\}\\[2ex]
\dfrac{c_2(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(2)F(a)+c_1^{(1)}(2)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(2)\dfrac{1}{|\underline{2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots\right\}\\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\[1ex]
\dfrac{c_\nu(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(\nu)F(a)+c_1^{(1)}(\nu)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(\nu)\dfrac{1}{|\underline{2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots\right\}\\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.
$$

falls $t > M$ ist. Durch dieselben Schlüsse wie bei der früheren Doppelreihe ergibt sich auch hier wieder aus der Convergenz von m_2 die Convergenz der Doppelreihe (7) und ebenso ist der Convergenzbereich von (7) gleich dem von m_2. Da ferner wegen der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 2) die einzelnen Colonnen von (7) sicher im Convergenzbereiche von m_2 convergieren, so besteht für alle Werte von x in diesem Bereiche wegen der Convergenz der Doppelreihe (7) auch die Gleichung

$$
(8)\qquad m_2 = \lim_{t=+\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)}c_{\lambda_1}^{(1)}(\lambda_2)\frac{1}{|\underline{\lambda_1}}F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1}
$$
$$
= \lim_{t=+\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda^{(2)}(t)\frac{1}{|\underline{\lambda}}F^{(\lambda)}(a)(x-a)^{\lambda}.
$$

Endlich kann der Convergenzbereich des Ausdruckes auf der rechten Seite der letzten Gleichung nicht grösser sein als der von m_2; denn aus der Convergenz der Reihe der Colonnensummen von (7) folgt wieder die Convergenz der Doppelreihe. Da somit m_2 durch den Ausdruck auf der rechten Seite von (8) ersetzt werden kann, so ist auch dieser Mittelwert durch einen Grenzwert dargestellt, der dieselbe Form hat wie der eben für m_1 erhaltene Grenzwert (6).

Mit Hilfe der für m_2 erhaltenen Reihe (8) kann man nun auch m_3 in derselben Weise wie m_1 transformieren und so beliebig fortfahren. Hat man nämlich einen Mittelwert m_{n-1} durch den Grenzwert

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n-1)}(t) \frac{1}{|\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

dargestellt, so hat man, um auch m_n durch einen Grenzwert von derselben Form darzustellen, nur in der Doppelreihe (7) die $c_\lambda^{(1)}(\mu)$ $\left(\begin{matrix}\lambda \\ \mu\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots \Big)$ durch $c_\lambda^{(n-1)}(\mu)$ zu ersetzen. Dadurch erhält man wieder eine unendliche Doppelreihe von derselben Form wie (7) und es ergibt sich durch Wiederholung der früheren Schlüsse, dass ihr Grenzwert m_n dem Grenzwert der Reihe ihrer Colonnensummen gleich ist und ihr Convergenzbereich mit dem von m_n identisch ist. Durch diese successive Umformung der Mittelwerte der Kette (5) erhält man somit ebenso wie für m_1 und m_2 auch für jeden folgenden Mittelwert eine Darstellung von der Form

$$(9) \qquad m_n = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n)}(t) \frac{1}{|\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda.$$

Vertauscht man nun in dem Ausdrucke auf der rechten Seite von (9) das Summenzeichen und das lim-Zeichen mit einander und setzt man $\lim\limits_{t=+\infty} c_\lambda^{(n)}(t) = c_\lambda^{(n)}$, so geht derselbe in die unendliche Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n)} \frac{1}{|\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

über, deren Glieder von derselben Form sind wie die der Polynome $g_n(x)$. Diese Vertauschung des Summenzeichens und des lim-Zeichens ist wirklich gestattet, da dadurch weder der Grenzwert noch der Convergenzbereich von (9) geändert wird. Es bleibt nämlich der zweifache Grenzwert (9), da in demselben t und λ von einander unabhängig sind, unverändert, wenn man t und λ unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt und somit convergiert auch der Ausdruck

$$(10) \qquad \lim_{t,\nu=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda^{(n)}(t) \frac{1}{|\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

für alle Werte von x, für welche (9) convergiert, zum Grenzwerte m_n.

Wegen der Convergenz von $\lim\limits_{t=+\infty} c_\lambda^{(n)}(t)\frac{1}{|\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$ ergibt sich daraus schon, dass für alle Werte von x im Geltungsbereiche von m_n die Gleichung besteht

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \lim_{t=+\infty} c_\lambda^{(n)}(t)\frac{1}{|\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda = \lim_{t,\nu=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda^{(n)}(t)\frac{1}{|\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

und daher

$$m_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n)}\frac{1}{|\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda \tag{11}$$

ist. Da ebenso umgekehrt aus der Convergenz der Reihe auf der rechten Seite von (11) die Convergenz von (10) und aus der Convergenz von (10) wieder die des Ausdruckes (9) folgt, so kann der Convergenzbereich der Reihe (11) auch nicht grösser sein als der von m_n und es darf somit die Gleichung (9) durch die Gleichung (11) ersetzt werden.

Nachdem so durch die Verwandlung in eine unendliche Doppelreihe ein Mittelwert m_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ der Kette (5) in die Reihe (11) transformiert worden ist, kann man die durch die Methode der Mittelwerte sich ergebende Darstellung eines eindeutigen Functionszweiges $FE_n(x)$ jetzt unmittelbar auf dieselbe Form bringen, welche die von Herrn Mittag-Leffler in der I. note seiner Abhandlung durch den Grenzwert eines Polynoms $g_n(x)$ erhaltene Darstellung eines Functionszweiges $FX(x)$ hat. Setzt man nämlich

$$f_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu_n} c_\lambda^{(n)}\frac{1}{|\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda,$$

so kann man in derselben Weise wie Herr Mittag-Leffler in dieser note Zahlen N_n von solcher Beschaffenheit bestimmen, dass für alle Werte von x im Bereiche E_n aus der Gleichung (11) die Ungleichung folgt

$$|FE_n(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad \nu_n > N_n. \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Diese Ausdrücke $f_n(x)$, auf welche jetzt die Mittelwerte (5) zurückgeführt sind, unterscheiden sich von den Polynomen $g_n(x)$ nur noch durch die Form der von den Elementen (2), von x und von a unabhängigen Constanten $c_\lambda^{(n)}$. Doch ist dieser Unterschied zwischen den $f_n(x)$ und $g_n(x)$

insofern nicht mehr ein wesentlicher, als auch die $f_n(x)$ durch die in der I. note der Abhandlung des Herrn MITTAG-LEFFLER angegebene Methode erhalten werden können. Wie Herr MITTAG-LEFFLER bemerkt,[1] lassen sich nämlich durch diese Methode ausser den $g_n(x)$ noch beliebig viele andere Polynome angeben, welche denselben Bedingungen wie die $g_n(x)$ genügen und sich von diesen wie die $f_n(x)$ nur durch die Form der Constanten $c_\lambda^{(n)}$ unterscheiden. Es ist somit die durch die Methode der Mittelwerte sich ergebende Darstellung eines Functionszweiges nicht nur von derselben äusseren Form wie die durch die $g_n(x)$ des Herrn MITTAG-LEFFLER, sondern man kann sogar zu den Ausdrücken (5) anstatt durch die Methode der Mittelwerte auch durch die in der I. note verwendete Methode des Herrn MITTAG-LEFFLER gelangen.

Die Methode der Mittelwerte steht ferner auch in enger Beziehung zu der in der II. note des Herrn MITTAG-LEFFLER angegebenen Darstellung eines Functionszweiges. Die als Mittelwerte definierten Ausdrücke (5) kann man nämlich auch durch n-fach unendliche Reihen darstellen, welche analoge Eigenschaften besitzen wie die von Herrn MITTAG-LEFFLER in dieser note zur Darstellung eines Functionszweiges $FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$ verwendeten n-fach unendlichen Reihen. Zu dieser Darstellung der Ausdrücke (5) gelangt man, wenn man den Ausdruck auf der rechten Seite von (9) in der Form schreibt

$$m_n = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_{n+1}=\lambda_1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor \lambda_1} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \cdots \frac{c_{\lambda_n}(\lambda_{n-1})}{\varphi(\lambda_{n-1})} \cdot \frac{c_{\lambda_{n+1}}(\lambda_n)}{\varphi(\lambda_n)}.$$

Da man auch hier das lim-Zeichen unter die Summenzeichen setzen kann, so erhält man für m_n die $n+1$-fach unendliche Reihe

$$(12) \qquad m_n = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_{n+1}=\lambda_1}^{\infty} c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

wo

$$c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} = \lim_{t=+\infty} \frac{1}{\lfloor \lambda_1} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \cdots \frac{c_{\lambda_{n+1}}(\lambda_n)}{\varphi(\lambda_n)}$$

ist. Diese $n+1$-fach unendlichen Reihen sind nun schon denen des Herrn MITTAG-LEFFLER analog. Denn zunächst haben die Reihen (12) gleich den

[1] Acta mathem., Bd. 23, p. 60.

genannten die Eigenschaft, dass für alle Werte von x, für welche m_n gleichmässig convergiert, auch die einzelnen Reihen

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_n} = \sum_{\lambda_{n+1}=\lambda_1}^{\infty} c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1}$$

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2}$$

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} f_{\lambda_1}$$

gleichmässig convergieren, so dass nach der Definition des Herrn Mittag-Leffler[1] für diese Werte von x auch die einem Mittelwerte m_n entsprechende $n+1$-fach unendliche Reihe (12) gleichmässig convergiert. Während ferner eine Reihe (12) bei dieser Art der Summation für alle Werte von x im Convergenzbereiche von m_n convergiert, kann man sie ebenso wie die n-fach unendlichen Reihen Mittag-Leffler's auch in solcher Weise summieren, dass sie nur innerhalb des Convergenzkreises der Reihe (1) convergiert. Sodann treten in den $n+1$-fach unendlichen Reihen (12) ausser den Elementen (2) und den Potenzen von $x-a$ in derselben Weise wie bei den Reihen des Herrn Mittag-Leffler nur noch Constanten $c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}}$ auf, die von den Elementen (2), von x und von a unabhängig sind. Endlich enthält zufolge der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 4) der Convergenzbereich einer $n+1$-fach unendlichen Reihe den Convergenzbereich der dem vorhergehenden Mittelwerte m_{n-1} entsprechenden n-fach unendlichen Reihe als Theilbereich. Somit unterscheiden sich die $n+1$-fach unendlichen Reihen (12) von denen des Herrn Mittag-Leffler nur dadurch, dass die Constanten $c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}}$ von den in den letzteren Reihen auftretenden Constanten $c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ verschieden sind und infolge dessen auch die Convergenzbereiche der Reihen (12) nicht dieselben Eigenschaften besitzen wie die von Herrn Mittag-Leffler in der II. note definierten

[1] Acta mathem., Bd. 24, p. 189.

Bereiche $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Da sich aber auch durch die Methode der II. note ausser den dort von Herrn MITTAG-LEFFLER eingeführten n-fach unendlichen Reihen noch beliebig viele andere Arten von n-fach unendlichen Reihen angeben lassen, die sich von denen MITTAG-LEFFLER's wie die Reihen (12) nur durch die Form der darin auftretenden Constanten unterscheiden, so ist die zwischen den n-fach unendlichen Reihen (12) und denen MITTAG-LEFFLER's bestehende Analogie schon dazu hinreichend, dass die Reihen (12) auch durch die Methode der II. note erhalten werden können. Daraus folgt, dass man zu den Ausdrücken (5) anstatt durch die Methode der Mittelwerte auch dadurch gelangen kann, dass man von den Eigenschaften der n-fach unendlichen Reihen ausgeht.

Dieses durch die Transformation der Ausdrücke (5) erhaltene Resultat, dass man zu den Mittelwerten (5) auch durch die von Herrn MITTAG-LEFFLER in der I und II note seiner Abhandlung angegebenen elementaren Methoden gelangen kann, bietet einerseits eine Ergänzung zum § 2 der IV note dieser Abhandlung, wo Herr MITTAG-LEFFLER zu Herrn BOREL's limite généralisée der Folge $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ kommt, indem er vom CAUCHY'schen Integral ausgeht. Andererseits ist dasselbe von besonderer Bedeutung für die weitere Ausbildung der Theorie der Mittelwerte. Es ergibt sich nämlich durch diese Zurückführung der Mittelwerte auf Polynome von der Form $\sum_{\nu=0}^{n_\mu} c_\nu^{(\mu)} \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$ und auf n-fach unendliche Reihen von demselben Typus wie die des Herrn MITTAG-LEFFLER die Eigenschaft der Mittelwerte, dass sie ausserhalb des Convergenzkreises der Reihe (1) die Function $F(x)$ darstellen können, als eine Folge davon, dass diese viel allgemeineren Ausdrücke dieselbe Eigenschaft besitzen, und findet so darin gewissermassen ihre Erklärung. Zugleich bietet sich dadurch, dass man die Mittelwerte als speciellen Fall dieser allgemeineren Ausdrücke auffasst, auch die Möglichkeit, die Methode der Mittelwerte zu vervollkommnen.

Dass eine Vervollkommnung dieser Methode wirklich wünschenswert ist, findet man schon, wenn man untersucht, ob die im Anfange gemachten Annahmen dazu hinreichend sind, dass $\lim\limits_{n=+\infty} m_n$ innerhalb des ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptsternes A convergiere. Dabei ergibt

sich nämlich, dass die Methode der Mittelwerte nicht denselben Grad von Allgemeinheit besitzt wie die Methoden des Herrn MITTAG-LEFFLER. Denn daraus, dass der einem Mittelwerte m_ν entsprechende Bereich E_ν den Bereich $E_{\nu-1}$ in seinem Innern enthält und die für m_n gefundene Reihe (11) von derselben Form ist wie die Polynome $g_n(x)$, welche die Eigenschaft haben, dass $\lim\limits_{n=+\infty} g_n(x)$ innerhalb A convergiert, folgt noch nicht, dass $\lim\limits_{n=+\infty} m_n$ innerhalb des ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptsterns A convergiert. Um dies zu zeigen, hat man nur in (5)

$$c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} \quad \text{und} \quad F(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

zu setzen. Man erhält dann für $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die Werte

$$m_1 = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} (1 + x + x^2 + \ldots + x^\nu) = \lim_{t=+\infty} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{t(x-1)}}{1-x}\right]$$

$$m_2 = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{\nu(x-1)}}{1-x}\right] = \lim_{t=+\infty} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{t(e^{x-1}-1)}}{1-x}\right]$$

$$m_3 = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{\nu(e^{x-1}-1)}}{1-x}\right] = \lim_{t=+\infty} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{t\left(e^{e^{x-1}-1}-1\right)}}{1-x}\right]$$

. . . .

. . . .

. . . .

Setzt man $x = \xi + \eta i$, so sind die Convergenzbereiche $E_1, E_2, E_3, \ldots$ dieser Mittelwerte bestimmt durch die Ungleichungen

$$\xi < 1$$

$$e^{\xi-1} \cos\eta < 1$$

$$e^{e^{\xi-1}\cos\eta - 1} \cos(\sin\eta) < 1$$

. . . .

. . . .

. . . .

Zufolge der ersten Ungleichung ist der Convergenzbereich von m_1 jener Theil der Ebene, welcher links von der im Punkte $x = +1$ auf die reelle Achse gezogenen Normalen liegt. Die zweite Ungleichung ist zunächst wieder erfüllt für $\xi < 1$. Sie ist ferner erfüllt für alle Werte von x, für welche $\cos\eta$ negativ ist, also für

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < \eta < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Diese Werte von x liegen in Streifen von der Breite π, welche parallel zur reellen Achse in Zwischenräumen S_k von der Breite π ins Unendliche verlaufen. Endlich ist die zweite Ungleichung noch erfüllt für solche Werte von x, für welche $\xi \geqq 1$ ist und $\cos\eta$ zwar positiv, aber genügend klein ist. Diese Werte von x liegen in den Zwischenräumen S_k auf der äusseren Seite der Curven $e^{\xi-1}\cos\eta = 1$, welche die im Punkte $x = +1$ auf die reelle Achse errichtete Normale in den Punkten

$$\beta = 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

berühren und die Grenzgeraden der Zwischenräume S_k zu Asymptoten haben. Ebenso wie in der zweiten Ungleichung lässt sich auch in den folgenden Ungleichungen die linke Seite in zwei Factoren zerlegen, von denen der erste für alle Werte von x, für welche die vorhergehende Ungleichung erfüllt ist, kleiner ist als Eins, während der andere ein Cosinus ist. In diesen Ungleichungen zeigt somit der erste Factor dasselbe Verhalten wie $e^{\xi-1}$ in der zweiten Ungleichung; dagegen unterscheidet sich in denselben der aus dem Cosinus bestehende Factor von dem in der zweiten Ungleichung auftretenden analogen Factor $\cos\eta$ dadurch, dass er nicht mehr negativ werden kann. Infolge dessen bleibt unter den eben gemachten Annahmen durch die Bildung der Mittelwerte $m_3, m_4, \ldots, m_n$, die Vergrösserung des Convergenzbereiches darauf beschränkt, dass in jedem Zwischenraume S_k an Stelle der Grenzcurve des Bereiches E_ν $(\nu > 2)$ eine andere Grenzcurve tritt, die zwar innerhalb des von der Grenzcurve des vorhergehenden Bereiches eingeschlossenen Gebietes liegt, aber zugleich die im Punkte $x = +1$ auf die reelle Achse errichtete Normale im Punkte $\eta = 2k\pi$ berührt und sich in ihrem weiteren Verlaufe wieder den beiden Grenzgeraden von S_k nähert. Da der zu den Elementen $1, \underline{|2}, \underline{|3}, \ldots, \underline{|n}, \ldots$ gehörige Hauptstern A aus der ganzen Ebene mit Ausschluss des Theiles $(+1, +\infty)$ der reellen Achse besteht, so convergiert daher der Grenzwert

$\lim\limits_{n=+\infty} m_n$, den man durch fortgesetzte Anwendung dieser Art von Mittelbildung auf die Partialsummen der geometrischen Reihe erhält, nur in einem Theilbereiche des zu diesen Elementen gehörigen Hauptsterns. Wie dieses einfache Beispiel zeigt, sind also die im Anfange dieses Paragraphen über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahmen noch nicht dazu hinreichend, dass man durch Anwendung der Mittelbildung auf die Partialsummen $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ der Reihe (1) zu einem Ausdrucke gelangt, der im ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptsterne A convergiert.

II.

Ebenso wie die Methode der Mittelwerte steht auch die Transformation des Herrn Lindelöf [1] mit den Methoden des Herrn Mittag-Leffler dadurch in enger Beziehung, dass man zu der Darstellung des Functionszweiges $FA(x)$, die man durch diese Transformation erhält, auch von dem Gesichtspunkte aus gelangen kann, von welchem Herr Mittag-Leffler in der II note seiner Abhandlung ausgeht. Bevor wir jedoch dies nachweisen, wollen wir das zu diesem Beweise Nothwendige aus der Arbeit des Herrn Lindelöf hier anführen.

Wie Herr Mittag-Leffler setzt auch Herr Lindelöf voraus, dass die Function $F(x)$ durch die Reihe (1) und deren analytische Fortsetzung definiert sei. Um diese durch die Elemente (2) bestimmte Function in einem einfach zusammenhängenden Gebiete T, innerhalb dessen sie überall regulär ist, durch einen expliciten Ausdruck darzustellen, verwendet er die conforme Abbildung. Nach dem Dirichlet'schen Princip existiert nämlich unter sehr allgemeinen Bedingungen betreffs des Randes von T eine analytische Function $t = \varphi(x)$, durch welche der Bereich T conform auf den Kreis $|t| \leq 1$ abgebildet wird. Diese Function $\varphi(x)$ ist dann im Innern von T regulär, und ebenso ist auch die umgekehrte Function $x = \psi(t)$ regulär im Innern des Kreises $|t| < 1$. Ordnet man dem Punkte $x = a$ den Punkt $t = 0$ zu, so erhält man daher in der Umgebung des Punktes $t = 0$ für $x - a$ eine Reihe von der Form

$$(13) \qquad x - a = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots.$$

[1] Acta soc. scient. Fennicae, tom. 24.

Indem nun Herr LINDELÖF diesen für $x - a$ erhaltenen Ausdruck in die Reihe (1) einsetzt und dann die auf diese Weise sich ergebende Reihe nach Potenzen von t ordnet, erhält er für $F(x)$ eine Reihe von der Form

$$F(x) = \beta_0 + \beta_1\varphi(x) + \beta_2[\varphi(x)]^2 + \beta_3[\varphi(x)]^3 + \ldots, \tag{14}$$

die innerhalb des Bereiches T convergiert. Da nun der zu den Elementen (2) gehörige Hauptstern A ein Bereich T ist, so kann man, falls der Bereich A conform auf einen Kreis abgebildet werden kann, durch diese Transformation auch eine Darstellung des Functionszweiges $FA(x)$ erhalten.

Der oben angegebene Zusammenhang der Transformation des Herrn LINDELÖF mit den Methoden des Herrn MITTAG-LEFFLER ergibt sich nun daraus, dass man zur Einführung dieser Transformation auch gelangen kann, indem man von den Eigenschaften der unendlichen Doppelreihen ausgeht. Diese können nämlich noch convergieren, ohne dass eine einzige Zeile oder Colonne convergiert; ferner können ausser der Doppelreihe z. B. auch die einzelnen Colonnen convergieren, während die Zeilen divergieren. Indem sich aus diesen Eigenschaften der unendlichen Doppelreihen die Möglichkeit ergibt, eine Potenzreihe in eine unendliche Doppelreihe zu verwandeln, in der die einzelnen Zeilen z. B. nur innerhalb des Convergenzkreises der gegebenen Potenzreihe, die Colonnen aber und die Doppelreihe selbst ausserdem noch in einem gewissen Bereiche ausserhalb dieses Convergenzkreises convergieren, erscheint die Vervandlung einer Potenzreihe in eine solche unendliche Doppelreihe als ein geeignetes Mittel, um jene in einen Ausdruck mit grösserem Geltungsbereich zu transformieren. Unter den vielen möglichen Arten, eine Potenzreihe (1) in eine Doppelreihe mit grösserem Convergenzbereiche zu verwandeln, ist die sehr naheliegend, eine solche Doppelreihe dadurch herzustellen, dass man x als Function einer neuen Veränderlichen darstellt. Denn setzt man wie vorhin $x = \psi(t)$, so dass wieder für genügend kleine Werte von t die Gleichung (13) besteht, so geht die Reihe (1) in die Doppelreihe über

$$\begin{aligned} F(a) + F^{(1)}(a)\alpha_1 t + F^{(1)}(a)\alpha_2 t^2 + F^{(1)}(a)\alpha_3 t^3 + \ldots \\ \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)\alpha_1^2 t^2 + \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)\, 2\alpha_1\alpha_2 t^3 + \ldots \\ \frac{1}{\underline{|3}} F^{(3)}(a)\alpha_1^3 t^3 + \ldots \end{aligned}$$

welche schon den Bedingungen genügt, unter denen man durch die Verwandlung einer Potenzreihe in eine unendliche Doppelreihe zu einem Ausdrucke mit grösserem Geltungsbereiche gelangt. Da nämlich die Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe mit der Reihe auf der rechten Seite von (14) identisch ist, so convergieren ihre Colonnen und die Reihe ihrer Colonnensummen innerhalb des Bereiches T, während dies bei den Zeilen und bei der Reihe der Zeilensummen nicht mehr der Fall ist. Ausserdem folgt nach einem Satze des Herrn Stolz [1] aus der Convergenz der Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe, dass auch die Doppelreihe innerhalb T convergiert. Somit kann man zur Gleichung (14) auch gelangen, indem man davon ausgeht, dass eine unendliche Doppelreihe und die Reihe ihrer Colonnensummen noch convergieren können, ohne dass ihre Zeilen convergieren. Da die Doppelreihen dieser Art ein specieller Fall der n-fach unendlichen Reihen Mittag-Leffler's sind, so ist dadurch zugleich nachgewiesen, dass man die durch die Transformation des Herrn Lindelöf sich ergebende Darstellung eines Functionszweiges auch durch dasselbe Princip erhält, von dem Herr Mittag-Leffler in der II note seiner Abhandlung ausgeht.

III.

Schon zufolge der bisher erhaltenen Resultate stehen auch die durch die Methode der Mittelwerte und durch die Transformation des Herrn Lindelöf sich ergebenden Darstellungen eines Functionszweiges dadurch zu einander in Beziehung, dass man zu denselben durch Anwendung desselben Princips gelangen kann. Ebenso wie die Transformation des Herrn Lindelöf kann man nämlich auch den Mittelwert der Partialsummen s_0, s_1, s_2, ... und allgemein den Mittelwert der Ausdrücke $m_\nu(\mu)$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots; \mu = 0, 1, 2, \ldots$) einführen, indem man von den Eigenschaften der unendlichen Doppelreihen ausgeht; denn auch die Doppelreihen (6) und (8) und die der letzteren analogen Doppelreihen, welche den Mittelwerten m_3, m_4, ... entsprechen, haben die Eigenschaft, dass sie und die Reihen ihrer Colonnensummen noch in einem gewissen Bereiche ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe ihrer Zeilensummen convergieren. Man

[1] Mathem. Annalen, Bd. 24, (1884), p. 169.

kann aber die durch die Methode der Mittelwerte und die durch die Methode des Herrn LINDELÖF sich ergebenden Darstellungen eines Functionszweiges nicht nur durch Anwendung desselben Princips erhalten, sondern man kann zur Gleichung (14) in dem Falle, wo $x - a = \frac{t}{1+t}$ und daher $t = \frac{x-a}{1-(x-a)}$ ist (EULER'sche Formel), und zu den Mittelwerten $m_1, m_2, \ldots$ sogar durch denselben Prozess gelangen. Dieser Prozess besteht in der successiven Anwendung der Identität

$$(15) \quad \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+n\delta} \varphi(\nu)\Delta\psi(\nu) = \varphi(\alpha+n\delta)\psi(\alpha+n\delta) - \varphi(\alpha)\psi(\alpha) - \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+n\delta} \psi(\nu+\delta)\Delta\varphi(\nu),$$

welche Herr MARKOFF als die Formel der partiellen Summation bezeichnet.[1] Doch schreiben wir im Folgenden die Potenzreihe (1) immer in der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, da sonst einige Ausdrücke wegen der darin auftretenden Differenzen ziemlich schwerfällig würden.

Um die EULER'sche Formel durch successive Anwendung der Identität (15) zu erhalten, hat man in derselben $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\psi(\nu) = \frac{z^\nu}{z-1}$ und daher $\Delta\psi(\nu) = z^\nu$ zu setzen.

Es ergibt sich dann aus derselben die Formel

$$\sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \varphi(\nu) = \frac{z}{1-z}\varphi(1) - \frac{z^n}{1-z}\varphi(n) + \frac{z}{1-z}\sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta\varphi(\nu).$$

Wendet man nun diese Identität auf die Summen

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta a_\nu, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta^{m-1} a_\nu$$

[1] *Differenzenrechnung*, übers. v. FRIESENDORFF u. PRÜMM, 1896, p. 101. — Über diese Beziehung der Methode der Mittelwerte zur EULER'schen Formel und die daraus sich ergebende Verwandlung der Mittelwerte (5) in n-fach unendliche Reihen MITTAG-LEFFLER's vergleiche man auch die Aufsätze des Verfassers: *Über Borel's Verallgemeinerung des Grenzbegriffes*, Monatshefte f. Math. u. Phys., XII, 1901; *Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Leffler's n-fach unendliche Reihen*, ebenda, XIV, 1903.

an, indem man der Reihe nach $\varphi(\nu)$ gleich a_ν, Δa_ν, ..., $\Delta^{m-1} a_\nu$ setzt, so erhält man ein System von m Gleichungen, aus dem sich ergibt[1]

$$(16) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = a_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \Delta^{\nu-1} a_1 + \left(\frac{z}{1-z}\right)^m \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta^m a_\nu$$

$$- \frac{z^n}{1-z} \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \Delta^\nu a_n$$

$$= P + Q + R.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung convergiert nun, wenn m und n genügend gross genommen werden, für alle Werte von x, für welche die Reihe

$$(17) \quad F(x) = a_0 + a_1\left(\frac{z}{1-z}\right) + \Delta a_1 \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \left(\frac{z}{1-z}\right)^n + \ldots$$

convergiert, und nur für diese Werte von x und sein Grenzwert ist gleich dem Grenzwerte dieser Reihe. Um dies zu zeigen, stellen wir die rechte Seite von (16) durch folgende Doppelreihe dar

[1] Markoff, ebenda, p. 180 u. 102. — In derselben Weise wie bei dem im Texte behandelten Falle kann man auch in dem etwas allgemeineren Falle, wo $z = \frac{at}{1+t}$ und daher $t = \frac{z}{a-z}$ ist, falls a eine positive reelle Grösse bezeichnet, durch Anwendung der Formel der partiellen Summation zur Gleichung (14) gelangen. Durch diese Substitution erhält man nämlich für $F(x)$ die Darstellung

$$F(x) = a_0 + a_1 a \frac{z}{a-z} + \Delta_a a_1 \left(\frac{z}{a-z}\right)^2 + \Delta_a^2 a_1 \left(\frac{z}{a-z}\right)^3 + \ldots$$

wo

$$\Delta_a^\nu a_1 = a^{\nu+1} a_{\nu+1} - \binom{\nu}{1} a^\nu a_\nu + \binom{\nu}{2} a^{\nu-1} a_{\nu-1} - \ldots + (-1)^\nu a a_1$$

ist. Man hat daher, um zu dieser Darstellung durch Anwendung der Formel der partiellen Summation zu gelangen, nur zu beachten, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu a^\nu \left(\frac{z}{a}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu z'^\nu \text{ ist.}$$

$$
(18)\left\{
\begin{aligned}
&P+Q+R=\\
&a_0+a_1\left[\frac{z}{1-z}-\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\left(\frac{z}{1-z}\right)^3-\ldots+(-1)^{m-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\right]\\
&\qquad+(-1)^{m-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\left[z\Delta a_1+z^2\Delta a_2+\ldots+z^n\Delta a_n\right]-\frac{z^n a_n}{1-z}\\
&\quad a_2\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\binom{-2}{1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-2}{m-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\right]\\
&\qquad+\binom{-2}{m-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\left[z\Delta a_2+z^2\Delta a_3+\ldots+z^n\Delta a_{n+1}\right]-\frac{z^{n+1}\Delta a_n}{(1-z)^2}\\
&\qquad\quad a_3\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-3}{m-3}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\right]\\
&\qquad+\binom{-3}{m-3}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\left[z\Delta a_3+z^2\Delta a_4+\ldots+z^n\Delta a_{n+2}\right]-\frac{z^{n+2}\Delta^2 a_n}{(1-z)^3}\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_m\left(\frac{z}{1-z}\right)^m+\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\left[z\Delta a_m+z^2\Delta a_{m+1}+\ldots+z^n\Delta a_{n+m-1}\right]\quad\frac{z^{n+m-1}\Delta^{m-1}a_n}{(1-z)^{n+m}}.
\end{aligned}\right.
$$

Lässt man in dieser Doppelreihe m und n unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen, so ist sie äquivalent der dem Ausdrucke P entsprechenden Doppelreihe

$$
(19)\left\{
\begin{aligned}
&a_0+a_1\left[\frac{z}{1-z}-\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\left(\frac{z}{1-z}\right)^3-\ldots+(-1)^{\nu-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right]\\
&\qquad a_2\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\binom{-2}{1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-2}{\nu-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right]\\
&\qquad\qquad a_3\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-3}{\nu-3}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right]\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad a_\mu\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^\mu+\ldots+\binom{-\mu}{\nu-\mu}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.
$$

die nach dem Früheren für alle Werte von x, für welche die Reihe (17) convergiert, zu demselben Grenzwert wie diese Reihe convergiert. Denn zunächst ergibt sich, dass für alle Werte von x im Convergenzbereiche von (19) der dem Ausdruck Q entsprechende Theil der Doppelreihe (18) zum Grenzwerte Null convergiert. Für diese Werte von x ist nämlich

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{m+\nu}\Delta^{m+\nu-1}a_1\right| < \varepsilon,$$

falls $m > g_1$, $n > g_2$ ist. Verwandelt man dieses Restglied in die Doppelreihe

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{z}{1-z}\right)^m \Delta^m a_1\left[\frac{z}{1-z}-\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\ldots+(-1)^{\nu-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
\qquad\left(\frac{z}{1-z}\right)^m \Delta^m a_2\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\ldots+\binom{-2}{\nu-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\left(\frac{z}{1-z}\right)^m \Delta^m a_\mu\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^\mu+\ldots+\binom{-\mu}{\nu-\mu}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
\qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

so sieht man, dass der Grenzwert dieser Doppelreihe auch gleich ist dem Grenzwerte $\lim_{m,n=\infty} Q$. Daher ist für alle Werte von x, für welche die Doppelreihe (19) convergiert $\lim_{m,n=\infty} Q = 0$, und es convergiert somit für diese Werte von x auch der dem Ausdrucke Q entsprechende Theil der Doppelreihe (18) zum Grenzwerte Null. Ferner convergiert bei genügend grossem n der Ausdruck R für alle Werte von x innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe (17) zum Grenzwerte Null; denn derselbe entsteht durch Anwendung der Euler'schen Transformation auf das Restglied

$$z^{n-1}(a_n z + a_{n+1}z^2 + \ldots).$$

Es convergiert daher für alle Werte von x, für welche die Doppelreihe (19) convergiert, auch die Doppelreihe (18) zu demselben Grenzwerte wie (19). Endlich folgt umgekehrt aus der Convergenz der Doppelreihe (18)

auch die Convergenz von (19), da dann der den Termen Q und R entsprechende Theil der Doppelreihe (19) als Restglied derselben zum Grenzwert Null convergiert. Es ist somit die durch Anwendung der partiellen Summation entstehende Doppelreihe (18) der durch Substitution sich ergebenden Doppelreihe (19) äquivalent, und man kann daher die EULER'sche Formel auch durch Anwendung der partiellen Summation erhalten.

Um in analoger Weise mittels der Formel der partiellen Summation auch zu den Mittelwerten $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ zu gelangen, führen wir Functionen $\gamma_r(t)$ ein, von denen wir vorläufig nur voraussetzen, dass für jedes beliebige ganzzahlige positive r, — $\lim r = +\infty$ nicht ausgeschlossen —, $\lim\limits_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{r}$ gleichmässig zum Grenzwert Null convergiere. Zufolge dieser Voraussetzung ist dann

$$\lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r} = 1$$

und es convergiert die Reihe $\lim\limits_{t=+\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu a_\nu z^\nu$ gleichmässig zum Grenzwerte $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$. Setzt man nun in (15)

$$\alpha = 1, \qquad \delta = 1, \qquad \psi(\nu) = -\frac{\gamma_r(t)}{r}\left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^{\nu-1}$$

und daher

$$\Delta\psi(\nu) = \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu,$$

so folgt daraus die Gleichung

$$(20) \qquad \lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu \varphi(\nu) =$$

$$\lim_{t=+\infty} \left[\frac{\gamma_r(t)}{r}\{\varphi(1)-\varphi(n)\} + \frac{\gamma_r(t)}{r} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu \Delta\varphi(\nu)\right].$$

Um nun zunächst zum Mittelwerte m_1 zu gelangen, wenden wir diese Formeln auf die Summen

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)+1}\right)^\nu a_\nu z^\nu, \quad \lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_2(t)+2}\right)^\nu \Delta(a_\nu z^\nu), \ \ldots,$$

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^\nu \Delta^{m-1}(a_\nu z^\nu)$$

an, indem wir der Reihe nach $\varphi(\nu)$ gleich

$$a_\nu z^\nu\ ,\ \ \Delta(a_\nu z^\nu)\ ,\ \ldots,\ \ \Delta^{m-1}(a_\nu z^\nu)$$

setzen. Dadurch erhalten wir ein System von m Gleichungen, aus dem sich, wenn wir die Producte

$$\gamma_1(t)\ ,\ \gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)\ ,\ \ldots,\ \gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)\ldots\gamma_m(t)$$

der Kürze wegen mit $k_1\ ,\ k_2\ ,\ \ldots,\ k_m$ bezeichnen, die Gleichung ergibt

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu =$$

$$\lim_{t=+\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{m}\frac{k_\nu}{\underline{|\nu}}\,\Delta^{\nu-1}(a_1 z)+\frac{k_m}{\underline{|m}}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^{\nu}\Delta^m(a_\nu z^\nu)-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{k_\nu}{\underline{|\nu}}\,\Delta^{\nu-1}(a_n z^n)\right].$$

Drückt man in dieser Gleichung die Differenzen $\Delta^{\nu-1}(a_{\mu+1}z^{\mu+1})$ durch die Differenzen $\Delta^\nu s_\mu$ der Partialsummen der Potenzreihe (1) aus und bezeichnet k_0 eine Funktion von t von der Beschaffenheit, dass

$$\lim_{t=+\infty} k_0 = 1$$

ist, so ergibt sich daraus die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = \tag{21}$$

$$\lim_{t=+\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{m}\frac{k_\nu}{\underline{|\nu}}\,\Delta^\nu s_0+\frac{k_m}{\underline{|m}}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^{\nu}\Delta^{m+1}s_{\nu-1}-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{k_\nu}{\underline{|\nu}}\,\Delta^\nu s_{n-1}\right]$$

$$= H + I + K,$$

von der man zum Mittelwerte m_1 in analoger Weise gelangt wie von der Gleichung (16) zur Euler'schen Formel. Man erhält nämlich für den Ausdruck H, indem man m zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt, die Doppelreihe

$$
(22)\quad \left\{
\begin{array}{l}
s_0\left[k_0 - k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} - \dots\dots + (-1)^\nu \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \dots\right] \\
\qquad s_1\left[k_1 - k_2 + \dots\dots + (-1)^{\nu-1} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-1)}} \dots\right] \\
\qquad\quad \frac{s_2}{\underline{|2}}\left[k_2 - \dots\dots + (-1)^{\nu-2} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-2)}} \dots\right] \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\quad \frac{s_\mu}{\underline{|\mu}}\left[k_\mu - \dots + (-1)^{\nu-\mu} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-\mu)}} \dots\right] \\
\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots
\end{array}
\right.
$$

in der die Reihe der Zeilensummen für genügend grosse Werte von t schon den Mittelwert m_1 darstellt, falls

$$
\frac{1}{\underline{|m}}\left[k_m - k_{m+1} + \dots + (-1)^{n-m} \frac{k_n}{\underline{|(n-m)}} \dots\right] = \frac{c_m(t)}{\varphi(t)} \qquad (m=0,1,2,\dots)
$$

ist.

Bevor wir zum Nachweis übergehen, dass sich der Ausdruck auf der rechten Seite von (21), wenn m und n genügend gross genommen werden, auf die Doppelreihe (22) zurückführen lässt, haben wir daher noch zu untersuchen, ob man einen Mittelwert m_1 durch eine solche Doppelreihe darstellen kann.[1] Damit dies der Fall ist, muss vor allem für $\lim t = +\infty$ das Gleichungssystem bestehen

$$
(23)\quad \left\{
\begin{array}{l}
k_0 - k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} - \dots\dots + (-1)^n \frac{k_n}{\underline{|n}} \dots = p_0 \\
\qquad k_1 - k_2 + \dots\dots + (-1)^{n-1} \frac{k_n}{\underline{|(n-1)}} \dots = p_1 \\
\qquad\quad \frac{1}{\underline{|2}}\left[k_2 - \dots\dots + (-1)^{n-2} \frac{k_n}{\underline{|(n-2)}} \dots\right] = p_2 \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\quad \frac{1}{\underline{|m}}\left[k_m - \dots + (-1)^{n-m} \frac{k_n}{\underline{|(n-m)}} \dots\right] = p_m \\
\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots
\end{array}
\right.
$$

[1] In dem Falle, wo $c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}}$ ist, sieht man unmittelbar, dass dies zutrifft; denn man hat dann nur in m_1 für e^{-t} die Reihe $1 - t + \frac{t^2}{\underline{|2}} \dots$ einzusetzen.

wo der Kürze wegen $\frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)} = p_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gesetzt ist. Denkt man sich die Ausdrücke auf beiden Seiten dieses Gleichungssystems nach Potenzen von t entwickelt, so ist dasselbe identisch erfüllt, wenn die Coefficienten jeder Potenz von t auf beiden Seiten desselben einander gleich sind und die Reihen auf der linken Seite für $\lim t = +\infty$ gleichmässig convergieren. Um Functionen k_r zu finden, welche diesem Gleichungssystem genügen, stellen wir daher die k_r durch Potenzreihen mit unbestimmten Coefficienten dar und bestimmen dann dieselben dadurch, dass wir die Coefficienten von t^ν $(\nu = \ldots, 1, 2, 3, \ldots)$ auf beiden Seiten von (23) einander gleich setzen. Setzt man demnach

$$k_r = \sum_{(\nu)} k_r^{(\nu)} t^\nu \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

und entwickelt man auch die Functionen p_s nach Potenzen von t, so dass

$$p_s = \sum_{(\nu)} \pi_s^{(\nu)} t^\nu \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

ist, so erhält man auf diese Weise zur Bestimmung der Functionen k_r Gleichungssysteme von der Form

$$\left\{\begin{array}{l}
k_0^{(\nu)} - k_1^{(\nu)} + \frac{k_2^{(\nu)}}{\underline{|2}} - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|n}} \ldots = \pi_0^{(\nu)} \\
\qquad k_1^{(\nu)} - k_2^{(\nu)} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|(n-1)}} \ldots = \pi_1^{(\nu)} \\
\qquad \frac{1}{\underline{|2}} \left[k_2^{(\nu)} - \ldots\ldots + (-1)^{n-2} \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|(n-2)}} \ldots \right] = \pi_2^{(\nu)} \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad \frac{1}{\underline{|m}} \left[k_m^{(\nu)} - \ldots + (-1)^{n-m} \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|(n-m)}} \ldots \right] = \pi_m^{(\nu)} \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \tag{26}$$

Da nun die $c_\nu(t)$ und infolge dessen auch die $\pi_s^{(\nu)}$ als bekannt vorausgesetzt sind, so stellt (26) ein unendliches lineares Gleichungssystem zur Bestim-

mung der Unbekannten $k_r^{(\nu)}$ dar. Wegen der Beschaffenheit seiner Determinante gehört dasselbe zur Classe derjenigen unendlichen Gleichungssysteme, von denen CAZZANIGA am Schlusse seiner Arbeit *Sui determinanti d'ordine infinito*[1] bewiesen hat, dass sie immer ein und nur ein endliches Lösungssystem $k_r^{(\nu)}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ besitzen, das zugleich so beschaffen ist, dass die Reihen auf der linken Seite von (26) absolut convergieren. Durch die Gleichungssysteme (26) lassen sich somit für alle in Betracht kommenden Werte von r und ν die $k_r^{(\nu)}$ und daher auch die k_r aus den gegebenen $\pi_s^{(\nu)}$ bestimmen.

Nachdem so für die k_r Reihen gefunden sind, welche formal dem Gleichungssystem (23) genügen, haben wir noch nachzuweisen, dass sowohl diese Reihen als auch die Reihen

$$(27) \qquad \frac{1}{\underline{|s}}\left[k_s - k_{s+1} \ldots + (-1)^{n-s} \frac{k_n}{\underline{|(n-s)}} \ldots\right], \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

für $\lim t = +\infty$ gleichmässig convergieren. Zu diesem Zwecke bilden wir die Doppelreihe

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{\underline{|s}}\left[k_s^{(\nu_1)} - k_{s+1}^{(\nu_1)} + \ldots + (-1)^{n-s} \frac{k_n^{(\nu_1)}}{\underline{|(n-s)}} \ldots\right] t^{\nu_1} \\
\frac{1}{\underline{|s}}\left[k_s^{(\nu_2)} - k_{s+1}^{(\nu_2)} + \ldots + (-1)^{n-s} \frac{k_n^{(\nu_2)}}{\underline{|(n-s)}} \ldots\right] t^{\nu_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{\underline{|s}}\left[k_s^{(\nu_\mu)} - k_{s+1}^{(\nu_\mu)} + \ldots + (-1)^{n-s} \frac{k_n^{(\nu_\mu)}}{\underline{|(n-s)}} \ldots\right] t^{\nu_\mu} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

indem wir ν dieselben Werte durchlaufen lassen wie in der Reihe (25), so dass wir als Reihe ihrer Zeilensummen die Reihe (25) erhalten. Nach dem eben verwendeten Satze von CAZZANIGA convergieren in dieser Doppelreihe die Zeilen absolut; ebenso convergiert nach den über die $c_\nu(t)$ ge-

[1] Ann. di matem., ser. II, t. 26, (1897), p. 216.

machten Annahmen für $\lim t = +\infty$ die Reihe ihrer Zeilensummen absolut. Daher convergieren für $\lim t = +\infty$ auch die Colonnen und die Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe absolut und es ist der Grenzwert der letzteren Reihe gleich dem Grenzwerte der Reihe der Zeilensummen. Somit sind für $\lim t = +\infty$ die aus den Lösungen der Gleichungssysteme (26) für die k_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ sich ergebenden Reihen absolut convergent und die Reihen (27) gleichmässig convergent und es genügen die zuerst genannten Reihen wirklich dem Gleichungssysteme (23).

Dazu, dass sich ein Mittelwert m_1 durch eine Doppelreihe darstellen lässt, welche man in derselben Weise wie die Doppelreihe (22) durch Anwendung der partiellen Summation erhalten kann, ist aber ausserdem noch nothwendig, dass die dem Gleichungssystem (23) genügenden Functionen k_r für $\lim t = +\infty$ dasselbe Verhalten zeigen wie die in (22) auftretenden Functionen k_r, d. h. für $\lim t = +\infty$ muss $k_0 = 1$ sein und die Quotienten $\frac{k_r}{rk_{r-1}}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ müssen zum Grenzwert $+\infty$ convergieren. Dies ist auch in der That der Fall. Denn zunächst ergibt sich leicht, dass man aus den Gleichungssystemen (26) für k_0 immer eine Reihe von solcher Beschaffenheit erhalten kann, dass $\lim\limits_{t=+\infty} k_0 = 1$ ist, da sowohl der Grenzwert als auch der Convergenzbereich von m_1 unabhängig davon ist, welche Werte eine endliche Anzahl der Functionen $c_\nu(t)$ annimmt. Ist die aus (26) für k_0 sich ergebende Reihe nicht schon von vornherein von dieser Beschaffenheit, so kann man daher die Abänderung der endlichen Anzahl der Functionen $c_\nu(t)$, welche nothwendig ist, um dies zu erreichen, ausführen, ohne dass dadurch der Grenzwert oder der Convergenzbereich von m_1 geändert wird. Um auch zu zeigen, dass in den Reihen (27) die Quotienten $\frac{k_r}{rk_{r-1}}$ für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwert $+\infty$ convergieren, gehen wir von der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Voraussetzung 3) aus, vermöge welcher

$$\lim_{t=+\infty} \frac{c_r(t)}{c_{r-1}(t)} = \lim_{t=+\infty} \frac{p_r}{p_{r-1}} = +\infty \qquad (r=1,2,\ldots) \tag{28}$$

ist. Da nun die Reihen (27) die Eigenschaft haben, dass die r^{te} $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ aus der $r - 1^{\text{ten}}$ dadurch entsteht, dass man die Glieder der letzteren der Reihe nach mit

$$\frac{k_r}{rk_{r-1}}, \frac{k_{r+1}}{rk_r}, \ldots, \frac{k_{r+s}}{rk_{r+s-1}}, \ldots$$

multipliciert, so müssen diese Quotienten zufolge (28) von einem bestimmten $r+s^{\text{ten}}$ an zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Setzt man wie früher

$$\frac{k_r}{k_{r-1}} = \gamma_r(t)$$

und bezeichnen m und n zwei verschiedene positive ganze Zahlen, so ist daher für $m < r < n$

$$\lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{r} = +\infty,$$

während dies für $r = 1, 2, \ldots, m$ und $r = n, n+1, \ldots, n+\nu_r, \ldots$, wo n beliebig gross sein kann, noch nachgewiesen werden muss. Um den letzteren Fall zu erledigen, setzen wir $n + \nu_r = n'$. Es ist dann für genügend grosse Werte von n

$$\lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_{n'}(t)}{n'-\nu_r} = \lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_{n'}(t)}{n'\left(1-\frac{\nu_r}{n'}\right)} = \lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_{n'}(t)}{n'} = +\infty.$$

Was den ersten Fall betrifft, folgt zwar aus der Beziehung

$$\lim_{t=+\infty} \frac{p_1}{p_0} = +\infty,$$

dass die Ausdrücke

$$\frac{\gamma_{\nu_1}(t)}{\nu_1}, \frac{\gamma_{\nu_1+1}(t)}{\nu_1+1}, \ldots$$

für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Doch kann man über das Verhalten der noch übrigen endlichen Anzahl von Ausdrücken

$$\gamma_1(t), \frac{\gamma_2(t)}{2}, \ldots, \frac{\gamma_{\nu_1-1}(t)}{\nu_1-1} \tag{29}$$

aus dem Verhalten des Grenzwertes $\lim_{t=+\infty} \frac{p_1}{p_0}$ allerdings nichts schliessen. Es

können jedoch die $c_\nu(t)$ schon von vornherein so beschaffen sein, dass auch diese letzteren Ausdrücke für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Im andern Falle ist wieder eine entsprechende Abänderung einer endlichen Anzahl von Functionen $c_\nu(t)$ dazu hinreichend, um aus den Gleichungssystemen (26) für $k_0, k_1, \ldots, k_{s_1}$ Reihen von solcher Beschaffenheit zu erhalten, dass die Quotienten (29) für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Es ist daher allgemein für $r = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

$$\lim_{t=+\infty} \frac{k_r}{r k_{r-1}} = \lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{r} = +\infty$$

und es genügen somit die aus den Gleichungen (26) und (24) für die k_r sich ergebenden Reihen denselben Bedingungen wie die in (22) auftretenden Functionen k_r.

Führt man nun in m_1 für die Functionen $\frac{c_s(t)}{\varphi(t)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ die Reihen (27) ein, so geht m_1 schon in die Reihe der Zeilensummen einer Doppelreihe (22) über. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass für alle Werte von x im Convergenzbereiche von m_1 auch die diesem Mittelwerte entsprechende Doppelreihe zum Grenzwerte m_1 convergiert, da aus denselben Gründen wie bei den früheren Doppelreihen auch bei einer Doppelreihe (22) aus der Convergenz der Reihe ihrer Zeilensummen die Convergenz der Doppelreihe folgt. Es kann aber der Convergenzbereich einer einem Mittelwert m_1 entsprechenden Doppelreihe (22) auch nicht grösser sein als der von m_1. Da nämlich für $\lim t = +\infty$ die Zeilen einer solchen Doppelreihe (22) convergieren, so folgt aus der Convergenz der Doppelreihe die Convergenz der Reihe ihrer Zeilensummen und somit die Convergenz von m_1.

Nachdem nachgewiesen ist, dass man einen Mittelwert m_1 immer durch eine Doppelreihe (22) ersetzen kann, so ergibt sich jetzt leicht, dass man von einer Potenzreihe (1) zum Mittelwerte m_1 durch Anwendung der Formel der partiellen Summation gelangen kann. Denn der durch Anwendung dieser Formel erhaltene Ausdruck auf der rechten Seite von (21) convergiert, wenn man m und n zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt, für alle Werte von t und x, für welche die Doppelreihe (22) convergiert, und nur für diese Werte und es ist dann sein Grenzwert gleich dem Grenzwerte der Doppelreihe (22). Um dies zu zeigen, verwandeln wir den Ausdruck auf der rechten Seite von (21) in die Doppelreihe

$$
(30)\left\{\begin{aligned}
&s_0\left[k_0-k_1+\frac{k_2}{\underline{\vert 2}}+\dots+(-1)^m\frac{k_m}{\underline{\vert m}}\right]+(-1)^m\frac{k_m}{\underline{\vert m}}[\Delta s_0+\dots+\Delta s_{n-1}]\\
&\qquad\qquad -s_{n-1}\left[-k_1+\frac{k_2}{\underline{\vert 2}}-\frac{k_3}{\underline{\vert 3}}+\dots+(-1)^m\frac{k_m}{\underline{\vert m}}\right]\\
&\quad s_1\left[k_1-k_2+\dots+(-1)^{m-1}\frac{k_m}{\underline{\vert (m-1)}}\right]+\binom{-2}{m-1}\frac{k_m}{\underline{\vert m}}[\Delta s_1+\dots+\Delta s_n]\\
&\qquad\qquad -s_n\left[k_1-k_2+\frac{k_3}{\underline{\vert 2}}-\dots+(-)^{m-1}\frac{k_m}{\underline{\vert (m-1)}}\right]\\
&\quad\frac{s_2}{\underline{\vert 2}}\left[k_2-\dots+(-1)^{m-2}\frac{k_m}{\underline{\vert (m-2)}}\right]+\binom{-3}{m-2}\frac{k_m}{\underline{\vert m}}[\Delta s_2+\dots+\Delta s_{n+1}]\\
&\qquad\qquad -\frac{s_{n+1}}{\underline{\vert 2}}\left[0+k_2-k_3+\dots+(-1)^{m-2}\frac{k_m}{\underline{\vert (m-2)}}\right]\\
&\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\quad s_m\frac{k_m}{\underline{\vert m}}+\frac{k_m}{\underline{\vert m}}[\Delta s_m+\dots+\Delta s_{n+m}]-\frac{s_{n+m-1}}{\underline{\vert m}}[0+0+0+\dots+k_m]
\end{aligned}\right.
$$

und lassen m und n unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen. Der aus dem Ausdrucke H entstandene Theil dieser Doppelreihe geht dann in die Doppelreihe (22) über, während die den Termen I und K entsprechenden Theile derselben den Charakter von Restgliedern besitzen und somit im Convergenzbereiche von (30) zum Grenzwerte Null convergieren. Es convergiert daher für alle Werte von t und x, welche dem Convergenzbereiche der Doppelreihe (30) angehören, auch die Doppelreihe (22), und es ist der Grenzwert der Doppelreihe (30) gleich dem Grenzwerte von (22). Setzt man umgekehrt voraus, dass die Doppelreihe (22) convergiert, so folgt daraus, dass in demselben Bereiche auch die Doppelreihe (30) convergiert, wenn man m und n zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt. Zunächst ergibt sich nämlich, dass dann der aus dem Terme K entstandene Theil von (30) zum Grenzwert Null convergiert; denn man erhält diesen Theil der Doppelreihe (30) aus dem Restgliede $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu z^\nu$ der Potenzreihe (1) auf dieselbe Weise wie die Doppelreihe (22) aus (1). Es convergiert aber auch der dem Ausdrucke I entsprechende Theil der Dop-

pelreihe (30) für alle Werte von t und x im Convergenzbereiche von (22) zum Grenzwerte Null. Man erhält nämlich, indem man die Reihe der Zeilensummen dieses Theiles der Doppelreihe (30) bildet, für I den Ausdruck

$$I = \frac{k_m}{\underline{|m}} (\Delta^m s_n - \Delta^m s_0).$$

Lässt man in diesem Ausdrucke m und n unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen, so stellt derselbe die Differenz der Restglieder von zwei convergenten Doppelreihen dar, und es ist daher $\lim\limits_{m, n = \infty} I = 0$. Da somit für alle Werte von t und x, für welche die Doppelreihe (22) convergiert, auch das Restglied der Doppelreihe (30) zum Grenzwerte Null convergiert, so sind diese beiden Doppelreihen einander äquivalent. Daraus folgt unmittelbar, dass man den Mittelwert m_1 der Partialsummen der Potenzreihe (1) in analoger Weise wie die Euler'sche Formel durch Anwendung der partiellen Summation auf die Potenzreihe (1) erhalten kann.

Um jetzt auch von dem Mittelwerte m_1 zum Mittelwerte m_2 durch Anwendung der partiellen Summation zu gelangen, stellen wir m_1 durch die Reihe (4) dar und wenden dann die Formel (20) auf die Summen

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)+1}\right)^\nu \Delta m_1(\nu - 1)\,, \quad \lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_2(t)+2}\right)^\nu \Delta^2 m_1(\nu - 1)\,, \quad \ldots,$$

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^\nu \Delta^m m_1(\nu - 1)$$

an, indem wir der Reihe nach $\varphi(\nu)$ gleich

$$\Delta m_1(\nu - 1)\,, \quad \Delta^2 m_1(\nu - 1)\,, \quad \ldots, \quad \Delta^m m_1(\nu - 1)$$

setzen. Dadurch erhalten wir ein System von m Gleichungen, aus dem die Gleichung folgt

$$m_1(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \Delta m_1(\nu - 1) =$$

$$\lim_{t=+\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{m} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \Delta^\nu m_1(0) + \frac{k_m}{\underline{|m}} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right) \Delta^{m+1} m_1(\nu - 1) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \Delta^\nu m_1(n - 1) \right].$$

In derselben Weise wie früher ergibt sich wieder, dass für $\lim m = +\infty$,

$\lim n = +\infty$ der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung durch die Doppelreihe

$$
\begin{array}{l}
m_1(0)\left[k_0 - k_1 + \dfrac{k_2}{\underline{|2}} - \cdots\cdots + (-1)^{\nu}\dfrac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \cdots\right] \\[2ex]
\qquad m_1(1)\left[k_1 - k_2 + \cdots\cdots + (-1)^{\nu-1}\dfrac{k_\nu}{\underline{|(\nu-1)}} \cdots\right] \\[2ex]
\qquad\qquad \dfrac{m_1(2)}{\underline{|2}}\left[k_2 - \cdots\cdots + (-1)^{\nu-2}\dfrac{k_\nu}{\underline{|(\nu-2)}} \cdots\right] \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{m_1(\mu)}{\underline{|\mu}}\left[k_\mu - \cdots + (-1)^{\nu-\mu}\dfrac{k_\nu}{\underline{|(\nu-\mu)}} \cdots\right] \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

ersetzt werden kann. Setzt man in dieser Doppelreihe für die k_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) wieder die aus den Gleichungen (26) und (24) sich ergebenden Werte ein, so convergiert sie in demselben Bereiche wie m_2 und es ist ihr Grenzwert gleich m_2. In derselben Weise, wie sich der Ausdruck m_1 in den Ausdruck m_2 transformieren lässt, kann man durch Anwendung der partiellen Summation jetzt auch von m_2 zu m_3 übergehen und so beliebig fortfahren. Wir erhalten somit als Resultat dieser Untersuchung, dass man von der Potenzreihe (1) zu den Mittelwerten der Kette (5) auch gelangt, indem man ebenso wie oben bei der Einführung der EULER'schen Formel davon ausgeht, dass man durch die Verwandlung einer Reihe in eine unendliche Doppelreihe einen Ausdruck mit grösserem Convergenzbereich erhalten kann, und dann solche Doppelreihen mittels der Formel der partiellen Summation herstellt.

Diese Art der Einführung der Mittelwerte (5) hat aber nicht nur die Eigenschaft, dass man dadurch diese Mittelwerte auf demselben Wege wie die EULER'sche Formel erhält, ohne dass es dabei nothwendig ist, den Begriff des Mittelwertes einzuführen, sondern es lassen sich die unendlichen Doppelreihen, welche man durch Anwendung der partiellen Summation auf die Potenzreihe (1) und die Mittelwerte (5) erhält, auch leicht in die

Doppelreihen verwandeln, durch welche diese Mittelwerte im Paragraph 1 dargestellt wurden. Um dies zu erreichen, hat man nämlich in den Doppelreihen, welche man durch Anwendung der partiellen Summation erhält, nur für

$$\frac{1}{\underline{|\nu}}\left(k_\nu - k_{\nu+1} + \frac{k_{\nu+2}}{\underline{|2}} - \ldots\right), \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

wieder die Ausdrücke $\frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)}$ einzusetzen und dagegen die Ausdrücke s_ν, $m_1(\nu)$, $m_2(\nu)$, ... in der Form von Reihen anzuschreiben. Es erscheint daher auch die Anwendung der Formel der partiellen Summation als eine Methode, wenn auch eine sehr specielle, um eine Potenzreihe (1) in einen Ausdruck von der Form (11) oder (12) zu verwandeln.

ZUR KENNTNISS DER KREISPUNKTE

VON

ALLVAR GULLSTRAND
in UPSALA.

Um die Constitution des im Auge gebrochenen Strahlenbündels kennen zu lernen hatte ich nöthig das Normalenbündel unter Hinzuziehung von Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der vierten Ordnung zu untersuchen. Da diese Untersuchungen auch die Normalenbündel eines Flächenelementes, auf welchem sich ein Kreispunkt befindet, umfassen mussten, haben sie zu Ergebnissen geführt, welche vielleicht auch für den Mathematiker vom Fache Interesse haben können.

Die folgende Darstellung ist zum grössten Theile ein Résumé von den das Flächenelement betreffenden Resultaten der an anderer Stelle ausführlich publicirten Untersuchung; doch habe ich die Untersuchung der Kreispunkte hier, wo der rein mathematische Gesichtspunkt ausschlaggebend ist, in gewissem Grade verallgemeinert, während ich mich dort auf das für den speciellen Zweck nöthige Gebiet beschränkt habe.

Von den Kreispunkten hatte man damals keine andere Kenntnisse als die Angabe von Darboux,[1] nach welcher für den Fall, wo sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung von Null verschieden sind, die Zahl und Richtung der in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien gefunden werden können, und, wie ich später erfahren habe, eine Untersuchung einer speciellen Kreispunktsform von Frost,[2] zu welcher Cayley[3] eine Bemerkung gefügt hat.

[1] *Théorie des surfaces.* T. II, S. 357—359.

[2] *On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an umbilicus.* The quarterly journal of pure and applied mathematics, X, 1870, S. 78.

[3] Ibid. S. 111.

Zwar hatte schon längst LIOUVILLE[1] eine schöne Zeichnung von den Krümmungslinien eines Ellipsoides gegeben, aus welcher ersichtlich ist, dass in die auf solchen vorkommenden Kreispunkte nur eine Krümmungslinie eintreten kann, aber dennoch scheint die Ansicht allgemein geherrscht zu haben, dass von allen Seiten her Krümmungslinien in einen Kreispunkt eintreten, wie z. B. eine Stelle bei PICARD[2] andeutet.

Die neueren Arbeiten über die durch eine Differentialgleichung bestimmten Curven waren noch nicht auf die Krümmungslinien der Fläche angewendet worden.

Seit dem Erscheinen meiner Abhandlung[3] hat aber WAHLGREN[4] gezeigt, dass die Untersuchung der singulären Punkte der Krümmungslinien auf eine Untersuchung von Differentialgleichungen ersten Grades zurückgeführt werden kann, für welche Untersuchung schon früher BENDIXSON[5] die Mittel angegeben hatte.

August 1902.

I. Das allgemeine Flächenelement.

Es sei in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme, in welchem der positive Theil der Z-Achse nach vorn vom Anfangspunkt belegen ist, wenn die entsprechenden Theile der X- und Y-Achse nach rechts bezw. nach oben liegen, die Flächengleichung

$$z = px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(ux^3 + 3vx^2y + 3wxy^2 + \omega y^3)$$

$$+ \frac{1}{24}(a^{40}x^4 + 4a^{31}x^3y + 6a^{22}x^2y^2 + 4a^{13}xy^3 + a^{04}y^4) + \ldots$$

und es werde eine Krümmung als positiv bezeichnet, wenn das Curvenstück

[1] In seiner Ausgabe von MONGE, *Application de l'analyse à la géométrie*. Paris 1850.

[2] *Traité d'analyse*, T. III, S. 225.

[3] *Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie*. Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups., Ser. III, 1900. Separat im Buchhandel zugänglich.

[4] *Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre et du second degré*. Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar. Bd 28. Afd. I. N:o 4.

[5] *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. Acta math., T. 24.

die concave Seite nach der betreffenden positiven Richtung kehrt, eine Torsion, wenn die Curve im Sinne einer Schraube rechtsgedreht ist, d. h. wenn, x als unabhängige Variabele angesehen, im Coordinatensysteme $dz = dy = d^2y = 0$ das Produkt $d^2z\,d^3y\,dx$ positives Vorzeichen hat.

Die Hauptkrümmungen werden so bezeichnet, dass im Coordinatensysteme $p = q = s = 0$ die Beziehungen

$$D_1 = \frac{1}{\rho_1} = r, \qquad D_{11} = \frac{1}{\rho_{11}} = t$$

gelten.

Für die Ableitungen der Hauptkrümmungen nach den Bogenlängen σ_1 bezw. σ_{11} der Hauptkrümmungslinien wende ich folgende Bezeichnungen an:

$$\frac{dD_1}{d\sigma_1} = U, \qquad \frac{dD_1}{d\sigma_{11}} = V, \qquad \frac{dD_{11}}{d\sigma_1} = W, \qquad \frac{dD_{11}}{d\sigma_{11}} = K$$

und nenne U bezw. K die directe Krummungsasymmetrie längs der bezuglichen Hauptkrummungslinie, W bezw. V die transversale Krümmungsasymmetrie längs der ersten bezw. zweiten Hauptkrümmungslinie.

Diese Asymmetrienwerthe, welche von einander unabhängig sind, bestimmen zusammen mit den Hauptkrümmungen und den Richtungscosinus der Normale sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der dritten Ordnung und umgekehrt. Im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ gelten die einfachen Beziehungen

$$U = u, \qquad V = v, \qquad W = w, \qquad K = m.$$

Die geodätischen Krümmungen der beiden Hauptkrummungslinien sind durch folgende allgemeingiltige Relationen gegeben

$$VR_1 = D_1 - D_{11} = -WR_{11}$$

wobei R_1 bezw. R_{11} die bezüglichen Krummungshalbmesser sind.

Fur die Winkel ϑ_1 bezw. ϑ_{11} zwischen den Hauptnormalen der bezuglichen Krümmungslinien und der Flächennormale, welche positiv gerechnet werden, wenn im Coordinatensysteme $p = q = s = 0$ die betreffende Hauptnormale sich zwischen den positiven Theilen der bezuglichen Coordinatenachsen befindet, gilt:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\rho_1}{R_1} = \frac{V}{D_{11}(D_1 - D_{11})}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_{11} = -\frac{\rho_{11}}{R_{11}} = -\frac{W}{D_{11}(D_1 - D_{11})}.$$

und die ersten Krümmungshalbmesser der beiden Hauptkrümmungslinien sind:

$$\rho' = \rho_1 \cos\vartheta_1 = R_1 \sin\vartheta_1, \qquad \rho'' = \rho_{11} \cos\vartheta_{11} = R_{11} \sin\vartheta_{11}.$$

Von den beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche sei diejenige die erste oder σ'-Schale genannt, welche von der zweiten Hauptnormalebene der Fläche berührt wird, und in welcher die Kantlinie der ersten, d. h. der von den Flächennormalen längs der ersten Krümmungslinie gebildeten, abwickelbaren Normalfläche eine geodätische Linie ist.

Bogenelement $d\sigma_1'$ und Krümmungshalbmesser R' dieser Kantlinie oder σ_1-Linie der σ'-Schale sind:

$$d\sigma_1' = -\frac{V}{D_1^2} d\sigma_1, \qquad R' = \frac{V}{D_1^3}$$

ihre rectificirende Linie ist die Polare der ersten Hauptkrümmungslinie mithin ihre rectificirende Fläche die abwickelbare Polarfläche dieser, ihre Torsion ist:

$$T' = \frac{D_1^2 V}{U(D_1 - D_{11})} = \frac{\rho_1}{R_1 R'} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta_1}{R'}.$$

Die Berührungslinie zwischen der ersten Evolutenschale und der zweiten abwickelbaren Normalfläche, die σ_{11}-Linie der σ'-Schale hat das Bogenelement

$$d\sigma_{11}' = \frac{1}{D_1^2}\sqrt{V^2 + D_1^2(D_1 - D_{11})^2}\, d\sigma_{11} = \frac{D_1 - D_{11}}{D_1 \cos\vartheta_1} d\sigma_{11}.$$

Diese Linie wird von der Polare der ersten Krümmungslinie der Fläche berührt, so dass die σ_1- und σ_{11}-Linien der Evolute conjugirte Liniensysteme bilden.

Die Normalschnittkrümmung der σ'-Schale längs der σ_{11}-Linie ist:

$$-\frac{D_1 W \cos^2\vartheta_1}{(D_1 - D_{11})^2}.$$

Für die zweite Evolutenschale gelten die analogen Werthe, nur hat die Torsion der Kantlinie in diesem System entgegengesetztes Vorzeichen.

Für weitere Untersuchungen benütze ich die Ableitungen zweiter Ordnung der Hauptkrümmungen sowie die ersten Ableitungen der geodätischen Krümmungen der Hauptkrümmungslinien laut folgender Bezeichnungen

$$\frac{d^2 D_1}{d\sigma_1^2} = \Phi', \qquad \frac{d}{d\sigma_1}\frac{1}{R_1} = \Psi', \qquad \frac{d^2 D_1}{d\sigma_{11}^2} = \Omega',$$

$$\frac{d^2 D_{11}}{d\sigma_1^2} = \Omega'', \qquad \frac{d}{d\sigma_{11}}\frac{1}{R_{11}} = \Psi'', \qquad \frac{d^2 D_{11}}{d\sigma_{11}^2} = \Phi''$$

und nenne Φ' bezw. Φ'' die direkte Abflachung längs der bezüglichen Krümmungslinie, Ω'' bezw. Ω' die transversale Abflachung längs der ersten bezw. zweiten Krümmungslinie, während Ψ' und Ψ'' lediglich die geodätischen Krümmungsasymmetrien sind.

Diese sechs Werthe bestimmen zusammen mit den Krümmungsasymmetrien, den Hauptkrümmungen und den Richtungscosinus der Normale sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der vierten Ordnung und umgekehrt.

Mit Ausnahme der zwischen den beiden transversalen Abflachungen bestehenden Relation

$$\Omega' - \Omega'' = D_1 D_{11}(D_1 - D_{11}) + \frac{V(2V - K) - W(U - 2W)}{D_1 - D_{11}}$$

sind sie von einander unabhängig. Im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ ergeben sie sich aus folgenden Beziehungen:

$$\Phi' = \partial^{40} - 3r^3 + \frac{3v^2}{r - t}, \qquad \Omega'' = \partial^{22} - r^2 t - \frac{v(2v - w)}{r - t},$$

$$\Psi' = \frac{\partial^{31}}{r - t} - \frac{v(2u - 3w)}{(r - t)^2}, \qquad \Psi'' = -\frac{\partial^{13}}{r - t} + \frac{w(3v - 2u)}{(r - t)^2},$$

$$\Omega' = \partial^{22} - rt^2 - \frac{w(u - 2w)}{r - t}, \qquad \Phi'' = \partial^{04} - 3t^3 - \frac{3w^2}{r - t}$$

und es sind die übrigen Ableitungen derselben Ordnung:

$$\frac{dU}{d\sigma_{11}} = (D_1 - D_{11})\Psi' + \frac{2UV}{D_1 - D_{11}}, \qquad \frac{dK}{d\sigma_1} = -(D_1 - D_{11})\Psi'' - \frac{2WK}{D_1 - D_{11}},$$

$$\frac{dV}{d\sigma_1} = (D_1 - D_{11})\Psi' + \frac{V(U - W)}{D_1 - D_{11}}, \qquad \frac{dW}{d\sigma_{11}} = -(D_1 - D_{11})\Psi'' + \frac{W(V - K)}{D_1 - D_{11}},$$

$$\frac{d}{d\sigma_{11}}\frac{1}{R_1} = \frac{\Omega'}{D_1 - D_{11}} - \frac{V(V - K)}{(D_1 - D_{11})^2}, \qquad \frac{d}{d\sigma_1}\frac{1}{R_{11}} = -\frac{\Omega''}{D_1 - D_{11}} + \frac{W(U - W)}{(D_1 - D_{11})^2}$$

aus welchen letztgenannten Werthen unmittelbar das bekannte Gesetzt von Liouville:

$$\frac{d}{d\sigma_{11}} \frac{1}{R_1} + \frac{d}{d\sigma_1} \frac{1}{R_{11}} = D_1 D_{11} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_{11}^2}$$

hervorgeht.

Die geometrische Bedeutung der Abflachungswerthe ist leicht darzustellen, wenn die Krümmungsasymmetrien gleich Null sind. Wenn direkte Abflachung und Hauptkrümmung verschiedenes Vorzeichen haben, mithin ein numerisches Maximum der Krümmung im gegebenen Punkte sich vorfindet, so ist $-\frac{\Phi}{D^3}$ das Quadrat der Excentricität derjenigen conischen Section, welche eine Berührung vierter Ordnung mit dem bezüglichen Hauptschnitte hat. Liegt aber ein numerisches Minimum der Krümmung vor, ist $\frac{\Phi}{\Phi + D^3}$ das Quadrat der Excentricität der Ellipse, welche im Punkte kleinster Krümmung eine Berührung vierter Ordnung mit dem bezüglichen Hauptschnitte hat. Sind auch die geodätischen Krümmungsasymmetrien gleich Null, und besteht die Identität

$$\frac{\Phi'}{D_1^2} + \frac{\Phi''}{D_{11}^2} = \frac{3(\Omega' + \Omega'')}{D_1 D_{11}}$$

so stellen die in unendlich kleinem Abstande vom fraglichen Punkte parallel zur Tangentialebene geführten Schnitte der Fläche bis auf unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als der vierten Ellipsen dar. Haben bei positiven Werthen der Hauptkrümmungen die transversalen Abflachungen höhere Werthe, als durch diese Relation angegeben wird, so ist das Flächenelement in den diagonalen Richtungen zwischen den Hauptnormalebenen relativ mehr zusammengebogen als ein solches, in welchem ein in der Nähe des Scheitelpunktes parallel zur Tangentialebene gelegter Schnitt eine Ellipse darstellt. Im entgegengesetzten Falle ist es in den genannten Richtungen relativ mehr ausgebogen. Eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit dem Scheitelpunkte einer Fläche zweiten Grades erfordert das Bestehen der Beziehungen:

$$\frac{\Phi'}{D_1} = \frac{3\Omega''}{D_{11}}, \qquad \frac{\Phi''}{D_{11}} = \frac{3\Omega'}{D_1}.$$

Aus den geodätischen Krümmungsasymmetrien erhält man die Torsion T_1 bezw. T_{11} der Hauptkrümmungslinien auf folgende Weise:

$$T_1 = \frac{\cos^2 \vartheta_1}{D_1}(\Psi' - U \operatorname{tg} \vartheta_1), \qquad T_{11} = -\frac{\cos^2 \vartheta_{11}}{D_{11}}(\Psi'' - W \operatorname{tg} \vartheta_{11}).$$

Das Centrum der osculirenden Sphäre der ersten Hauptkrümmungslinie ist der Berührungspunkt zwischen der Polare und der Kantlinie der abwickelbaren Polarfläche, mithin für parallelflächen gemeinsam. Wenn der Abstand dieses Centrums von dem ersten Krümmungsmittelpunkt der Fläche mit l_1 bezeichnet wird, und l_{11} dieselbe Bedeutung für die zweite Hauptkrümmungslinie hat, so gelten die Beziehungen:

$$\frac{1}{l_1} = -\frac{D_1 \cos \vartheta_1}{U}(\Psi' - U \operatorname{tg} \vartheta_1), \qquad \frac{1}{l_{11}} = -\frac{D_{11} \cos \vartheta_{11}}{W}(\Psi'' - W \operatorname{tg} \vartheta_{11}).$$

Wird die erste abwickelbare Normalfläche auf eine Ebene ausgebreitet, und der Krümmungshalbmesser ihrer Evolute mit A' bezeichnet, so ist

$$A' = -R' \frac{dR'}{d\sigma_1'} = \frac{\Phi'}{D_1^4} - \frac{3U^2}{D_1^5}.$$

Besteht keine direkte Krümmungsasymmetrie, hat mithin die Kantlinie eine Spitze, so berührt diese ihre eigene Evolute, und die Kantlinie kann, wenn unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der vierten in der Flächengleichung vernachlässigt werden, als Kreisevolvente angesehen und konstruirt werden. Mit derselben Annäherung kann sie, wie es in der Optik gewöhnlich geschieht, als semicubische Parabel aufgefasst werden, deren Gleichung dann

$$9\Phi'\xi^2 = -8D_1^4(\zeta - \rho_1)^3$$

ist.

Die geodätische Krümmung der σ_{11}-Linie der σ'-Schale der Evolute ist

$$\frac{1}{R'_{11}} = -\frac{\cos^3 \vartheta_1}{(D_1 - D_{11})^2}\left(\Omega'' - \frac{W(U - 2W)}{D_1 - D_{11}}\right)$$

und ergiebt, zusammengestellt mit dem analogen Werthe für die zweite Evolutenschale die allgemeingiltige Beziehung zwischen den beiden Schalen:

$$\frac{1}{R'_{11} \cos^3 \vartheta_1} - \frac{1}{R''_1 \cos^3 \vartheta_{11}} = \frac{1}{\rho_{11} - \rho_1}.$$

Durch die angegebenen der Evolute angehörigen geometrischen Grössen lassen sich sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der vierten Ordnung im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ für eine beliebige Parallelfläche ermitteln.

II. Allgemeines über die Kreispunkte.

Da ein Kreispunkt niedrigster Ordnung erst dann vorliegt, wenn eine vollständige Berührung zweiter Ordnung mit einer Sphäre besteht, bezeichne ich allgemein einen Kreispunkt als von der Ordnung n, wenn die Fläche in ihm eine vollständige Berührung der Ordnung $n + 1$ mit einer Sphäre hat, d. h. wenn sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der Ordnung $n + 1$, nicht aber sämmtliche Differentialquotienten der Ordnung $n + 2$ mit denjenigen der Gleichung der osculirenden Sphäre identisch sind. Die Differentialquotienten der Flächengleichung der osculirenden Sphäre bezeichne ich mit $p_1 q_1 \ldots$ oder $\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \ldots.$

Wird Krümmung und Bogenelement eines beliebigen Normalschnittes mit D bezw. ds bezeichnet, und setzt man zur Verkürzung

$$N = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

so gilt bekanntlich:

$$D = \frac{rdx^2 + 2sdx\,dy + tdy^2}{Nds^2}.$$

Besteht nun eine vollständige Berührung der Ordnung $n + 1$ mit einer Sphäre, so sind, wie ersichtlich, sämmtliche Differentialquotienten der Normalschnittkrümmung bis einschliesslich der Ordnung $n - 1$ gleich Null, da durch $n - 1$ successive Differentiationen eine Gleichung erhalten wird, welche mit der für die osculirende Sphäre erhaltenen identisch ist. Die n-malige Differentiation muss aber ein von Null abweichendes Resultat geben, da nicht sämmtliche Differentialquotienten der Ordnung $n + 2$ in den Gleichungen der Fläche und der osculirenden Späre übereinstimmen. Wird diese Differentiation für beide Gleichungen ausgeführt, und dann die eine der so erhaltenen Gleichungen von der anderen subtrahirt, so erhält

man eine Gleichung, welche, da sie nur Differentialquotienten der Ordnung $n+2$ enthalten kann, im Coordinatensystem $p=q=0$ auf folgende Weise geschrieben werden kann:

$$\frac{d^n D}{ds_n} = \frac{d^{n+2}z - d^{n+2}z_1}{ds^{n+2}}.$$

Wird in dieser Gleichung dx und dy durch $dR\cos\vartheta$ bezw. $dR\sin\vartheta$ ersetzt, wobei eine Zunahme von ϑ eine Drehung des Normalschnittes um die Normale herum in der Richtung vom positiven Theil der X-Achse nach dem positiven Theile der Y-Achse zu bedeutet, so kann nach ϑ differentiirt werden, wonach dx und dy wieder eingeführt werden können. Aus einem beliebig herausgegriffenen Gliede z. B dem vierten

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3}dx^{n-1}dy^3$$

erhält man auf diese Weise unter Berücksichtigung der Identitäten

$$\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3} = \frac{\partial^{n+1}p}{\partial x^{n-2}\partial y^3} = \frac{\partial^{n+1}q}{\partial x^{n-1}\partial y^2}$$

die zwei Glieder

$$-(n+2)dy\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{\partial^{n+1}p}{\partial x^{n-2}\partial y^3}dx^{n-2}dy^3$$

$$+(n+2)dx\frac{(n+1)n}{1.2}\frac{\partial^{n+1}q}{\partial x^{n-1}\partial y^2}dx^{n-1}dy^2$$

wonach leicht ersichtlich ist, dass die Differentiation der ganzen Gleichung ein Resultat geben muss, welches durch folgende Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\frac{(d^{n+1}q - d^{n+1}q_1)dx - (d^{n+1}p - d^{n+1}p_1)dy}{ds^{n+2}}.$$

Wenn der Grad der Gleichung

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$$

welcher in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ durch $n+2$ ausgedrückt wird, eine gerade Zahl ist, so muss sie jedoch wenigstens zwei reelle Wurzeln haben, indem nämlich $\frac{d^n D}{ds^n}$ bei $\vartheta=\pi$ denselben Werth wie bei $\vartheta=0$ hat, mithin während

einer ganzen Umdrehung wenigstens ein Maximum und ein Minimum haben muss.

Setzt man $dy = 0$, so findet man für den im Coordinatensystem $p = q = 0$ mit der XZ-Ebene zusammenfallenden Normalschnitt unter Berücksichtigung, dass $\frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^{n+2}}$ ein Produkt aus D^{n+1} und einem jederzeit aus der Gleichung der Sphäre durch successive Differentiationen zu ermittelnden Koefficienten k besteht,

$$\frac{d^n D}{ds^n} = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} - kD^{n+1}, \qquad \frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y}$$

und es ist mithin die Schnittlinie der Fläche mit der XZ-Ebene im Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y}$ eine Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$.

Die kürzeste Linie zwischen den Normalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten auf einer Fläche muss senkrecht auf Beiden stehen, mithin die Tangente einer Parallelfläche sein. Werden die Coordinaten eines Punktes der Parallelfläche mit ξ, η, ζ, die Richtungscosinus der normale mit α, β, γ bezeichnet, so bestehen bekanntlich die Gleichungen

$$\xi = x + k\alpha, \qquad \eta = y + k\beta, \qquad \zeta = z + k\gamma$$

in welchen k eine Constante bedeutet. Werden diese Gleichungen differentiirt, dann quadrirt und addirt, und wird die so erhaltene Gleichung nach k differentiirt, so erhält man als Bedingung dafür, dass das Bogenelement $d\sigma$ auf der Parallelfläche ein Minimum sei, den Werth

$$k = -\frac{dx\,d\alpha + dy\,d\beta + dz\,d\gamma}{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$$

welcher der Bedingung

$$d\xi\,dp + d\eta\,dq = 0$$

dass die kürzeste Linie Tangente einer asymptotischen Linie auf der fraglichen Parallelfläche sei, entspricht. Nach Einsetzen dieses Werthes erhält man schliesslich:

$$d\sigma = \frac{dq(dx + p\,dz) - dp(dy + q\,dz)}{\sqrt{(1+q^2)dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1+p^2)dq^2}}.$$

Bei einer vollständigen Berührung der Ordnung $n+1$ mit einer Sphäre ergeben $n-1$ successive Differentiationen dieser Gleichung den Werth Null. Nach Ausführung der n-maligen Differentiation sowohl für die Fläche als für die osculirende Sphäre erhält man durch Subtraktion für das Coordinatensystem $p = q = 0$

$$d^{n+1}\sigma = \frac{(d^{n+1}q - d^{n+1}q_1)dx - (d^{n+1}p - d^{n+1}p_1)dy}{\sqrt{dp^2 + dq^2}}$$

wonach bei einer vollständigen Berührung der Ordnung $n+1$ mit einer Sphäre bei $n > 0$ und wenn ϑ ein in der Tangentialebene belegener Winkel ist, allgemein

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2) D \frac{d^{n+1}\sigma}{ds^{n+1}}$$

ist, und der kürzeste Abstand zwischen den Normalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten auf der Fläche ein Unendlichkleines höherer Ordnung ist, wenn die Punkte auf einer Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ liegen, als sonst.

Wenn man in den allgemeinen Ausdruck für die Torsion einer doppelt gekrümmten Linie — x als unabhängige Variabele betrachtet —

$$\frac{dx(d^2z\,d^3y - d^3z\,d^2y)}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (d^2y)^2dx^2 + (d^2z)^2dx^2}$$

den aus der allgemeinen Gleichung einer geodätischen Linie

$$p(dy\,d^2z - dz\,d^2y) - q\,dx\,d^2z - dx\,d^2y = 0$$

ermittelten Werth für d^2y sowie den durch Differentiation dieser Gleichung gefundenen Werth für d^3y einsetzt, so ergiebt sich als allgemeiner Ausdruck für die geodätische Torsion einer Linie auf einer Fläche:

$$T = -\frac{dq(dx + p\,dz) - dp(dy + q\,dz)}{N^2 ds^2}$$

aus welchem Ausdrucke durch Zusammenstellung mit dem eben gefundenen das allgemeingiltige Gesetz

$$\frac{d\sigma}{ds} = \pm\frac{T}{\sqrt{D^2 + T^2}}$$

hervorgeht, und nach schon angewendeter Methode die für eine vollständige Berührung der Ordnung $n+1$ mit einer Sphäre allgemein geltende Beziehung

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = -(n+2)\frac{d^n T}{ds^n}$$

hergeleitet werden kann, wobei ϑ wie früher, den Winkel zwischen der bezüglichen Normalebene und einer fixen Tangente bedeutet.

Die Bedingung, dass die Normalen längs einer Linie auf der Fläche eine Linie berühren, d. h. eine abwickelbare Fläche darstellen:

$$d\xi + p d\zeta = 0, \qquad d\eta + q d\zeta = 0$$

ergiebt zusammen mit den beiden Normalengleichungen

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \qquad \eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

nach Differentiation dieser

$$\zeta - z = \frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}$$

wonach die Definition der Hauptkrümmungslinien als Schnittlinien der Fläche mit den Abwickelbaren Normalflächen oder als Linien ohne geodätische Torsion oder durch die Forderung, dass der kürzeste Abstand zwischen den Normalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten auf der Fläche ein Unendlichkleines höherer Ordnung sei, wenn diese Punkte auf eine Hauptkrümmungslinie liegen, als sonst, eine und dieselbe ist, und in einen Kreispunkt n^{ter} Ordnung nur längs den Linien $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ Krümmungslinien eintreten können. Da mithin eine Orthogonalität dieser Linien im allgemeinen nicht im Kreispunkt besteht, nenne ich bei der weiteren Untersuchung eine durch den Kreispunkt gehende Krümmungslinie eine s-Linie ohne Rücksicht darauf, ob sie nach beiden Seiten vom Kreispunkte einer und derselben Schaar angehöre oder nicht, und die diese Linie ausserhalb des Kreispunkts rechtwinkelig schneidenden Krümmungslinien die t-Linien der Fläche, während die entsprechenden Hauptkrümmungen mit D_s bezw. D_t bezeichnet werden. Von den beiden Berührungslinien der einer s-Linie der Fläche entsprechenden abwickelbaren

Normalfläche mit der Krümmungsmittelpunktsfläche, welche sich im Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts treffen müssen, nenne ich diejenige, welche zugleich Kantlinie der abwickelbaren Normalfläche ist, die s-Linie, die andere die t-Linie dieser.

Mittels den eben angeführten, für die Kantlinie geltenden Gleichungen kann man den Werth von D_s in geeigneter Form erhalten, wonach durch Subtraktion dieses Werthes vom bekannten Werthe

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{N^3}$$

für die Summe der beiden Hauptkrümmungen auch D_t in geeigneter Form erhalten wird. Man findet auf diese Weise, wenn $\frac{dy}{dx}$ mit λ bezeichnet wird:

$$D_s = \frac{(1+q^2)r - pqs + \lambda[(1+q^2)s - pqt]}{N^3},$$

$$D_t = \frac{(1+p^2)t - pqs - \lambda[(1+q^2)s - pqt]}{N^3}.$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich allgemein für einen Kreispunkt n^{ter} Ordnung im Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y} = 0$ und für $\lambda = 0$ d. h. für eine die X-Achse berührende Krümmungslinie:

$$d^n D_s = d^n r - d^n r_1 = \left(\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{d x^{n+2}}\right) ds^n,$$

$$d^{n+1} D_s = d^{n+1} r - d^{n+1} r_1 = \left(\frac{\partial^{n+3} z}{\partial x^{n+3}} - \frac{\partial^{n+3} z_1}{\partial x^{n+3}}\right) ds^{n+1},$$

$$d^n D_t = d^n t - d^n t_1 = \left(\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^n \partial y^2} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^n \partial y^2}\right) ds^n,$$

$$d^{n+1} D_t = d^{n+1} t - d^{n+1} t_1 = \left(\frac{\partial^{n+3} z}{\partial x^{n+1} \partial y^2} - \frac{\partial^{n+3} z_1}{\partial x^{n+1} \partial y^2} + \frac{(n+1)n}{2} \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n-1} \partial y^3} \frac{d^2 y}{dx^2}\right) ds^{n+1}.$$

Verschwindet bei partieller Berührung höherer Ordnung als $n+1$ mit der osculirenden Sphäre der eine oder andere dieser Werthe, so kann natürlich die Differentiation beliebig fortgesetzt werden, aber die Resultate lassen sich nicht länger so einfach ausdrücken.

Unter den genannten Bedingungen ergiebt sich für die Kantlinie der abwickelbaren Fläche durch die die Projektion des Krümmungshalbmessers auf die Z-Achse ausdrückende Beziehung

$$N(\zeta - z) D_s = 1$$

die Relation

$$d^n \zeta = -\frac{1}{D_s^2} d^n D_s,$$

und mittels der Gleichungen $d\xi + p d\zeta = 0$, $d\eta + q d\zeta = 0$:

$$d^n \xi = d^n \eta = d^{n+1} \eta = 0,$$

$$d^{n+1} \xi = \frac{n}{D_s} d^n D_s ds.$$

Für die t-Linie der abwickelbaren Normalfläche findet man nach derselben Methode:

$$d^n \zeta = -\frac{1}{D_t^2} d^n D_t$$

und unter Anwendung der Normalgleichungen:

$$d^n \xi = d^n \eta = d^{n+1} \eta = 0,$$

$$d^{n+1} \xi = [(n+1) d^n D_t - d^n D_s] \frac{ds}{D_t}.$$

Im allgemeinen Falle berührt also auch die t-Linie die Kreispunktsnormale, und zwar liegen, wenn n eine ungerade Zahl ist, beide Linien jede für sich ganz nach der einen Seite von der Kreispunktsnormale, während sie im entgegengesetzten Falle eine Spitze im Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts haben und, jede für sich, ganz nach der einen Seite der durch diesen Punkt parallel zur Tangentialebene der Fläche gelegten Ebene belegen sind.

Ist bei partieller Berührung höherer Ordnung als $n + 1$ mit der osculirenden Sphäre m bezw. μ die Ordnungszahl des ersten Differentialquotienten von D_s bezw. D_t, welcher einen von Null verschiedenen Werth hat, und ist dabei $m \geqq \mu > n$ oder $\mu \geqq m > n$, so sage ich, der Kreispunkt ist längs der fraglichen Krümmungslinie von der Ordnung μ bezw. m, indem diese Zahlen die bezüglichen Ordnungszahlen des ersten von Null verschiedenen Differentialquotienten von $D_s - D_t$ sind, und letztgenannte Ordnungszahl

überhaupt, auch wenn $m = \mu = n$ ist, die partielle Ordnungszahl des Kreispunkts längs der fraglichen Krümmungslinie angiebt. Der genannte Fall, wo die Ordnungszahl nicht nur des Kreispunkts, sondern auch der Osculation mit der Sphäre längs der fraglichen Krümmungslinie grösser als n bezw. $n + 1$ ist, stellt einen speciellen Fall dar, den ich nicht in dieser allgemeinen Darstellung berücksichtigen kann. Ist nur die Ordnungszahl des Kreispunkts erhöht, dabei aber $m = \mu = n$, so sind die erhaltenen Werthe für die s- und t-Linie der abwickelbaren Normalfläche übereinstimmend, und die beiden Linien haben eine entsprechende Berührung. Besteht wiederum nur eine partielle Osculation höherer Ordnung mit der Sphäre, so wird dadurch nur der Typus der s-Linie geändert, und ist $\mu > m$ bei $m = n$, so bildet die Tangente der t-Linie im Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts einen endlichen Winkel mit der Kreispunktsnormale, wobei diese Linie, wenn n eine ungerade Zahl ist, mit einer Spitze die convexe Seite der s-Linie berührt, im entgegengesetzten Falle aber die Kreispunktsnormale schneidet und von der Spitze der s-Linie berührt wird.

Die Polare einer die fragliche s-Linie auf der Fläche kreuzenden t-Linie fällt mit der Tangente im entsprechenden Punkte der t-Linie der abwickelbaren Normalfläche zusammen, was wenn $\frac{1}{R_t}$ die geodätische Krümmung jener t-Linie ist durch das allgemein gültige Gesetz

$$R_t \frac{dD_t}{ds} = D_t - D_s$$

ausgedrückt wird. Im allgemeinen Falle erhält man nach $n - 1$ successiven Differentiationen dieser Gleichung:

$$R_t = 0$$

und durch die n-malige:

$$\frac{dR_t}{ds} = \frac{d^n D_t - d^n D_s}{n d^n D_t}.$$

Ist die partielle Ordnungszahl ν des Kreispunkts längs der fraglichen Krümmungslinie grösser als μ, so erhält man:

$$R_t = dR_t = d^2 R_t = \ldots = d^{\nu-\mu} R_t = 0,$$

$$d^{\nu-\mu+1} R_t = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\nu - \mu + 1)}{\nu(\nu - 1)(\nu - 2) \ldots \mu} \frac{d^\nu D_t - d^\nu D_s}{d^\mu D_t} ds$$

sonst ergeben sich bei $\nu = \mu$ ähnliche Werthe wie im allgemeinen Falle (auch wenn $\nu > n$ ist) und bei $m > \mu$:

$$\frac{dR_t}{ds} = \frac{1}{\mu}$$

während im Falle $\mu > m$ durch den Ausdruck

$$\frac{1}{R_t} = -\frac{d^{m+1} D_t}{d^m D_s ds}$$

der Limeswerth der geodätischen Krümmung der t-Linien der Fläche bei Eintritt der fraglichen s-Linie in den Kreispunkt angegeben wird.

Mit diesen Werthen lassen sich unter Anwendung des S. 64 angeführten LIOUVILLE'schen Satzes, dem man bei $R_t = \frac{1}{\infty}$ am geeignetsten die Form

$$R_t^2 \frac{d}{dt}\frac{1}{R_s} = \frac{dR_t}{ds} + 1 + R_t^2\left(\frac{1}{R_s^2} + D_s D_t\right)$$

giebt, die Verlaufstypen der collateralen Krümmungslinien einer in den Kreispunkt eintretenden s-Linie bestimmen. Wenn nämlich die geodätische Krümmung $\frac{1}{R_s}$ der fraglichen s-Linie keinen unendlich grossen Werth hat, erhellt es, dass bei Abnahme von R_t nach Null hin die der fraglichen s-Linie am nächsten verlaufenden Krümmungslinien derselben Schaar, d. h. ihre collateralen Krümmungslinien, ihr die convexe bezw. concave Seite zuwenden müssen, je nachdem $\frac{dR_t}{ds} + 1$ positiv oder negativ ist. Da nun zugleich die Tangenten dieser collateralen s-Linien Normalen der t-Linien sind, so findet man, dass bei Eintritt einer Krümmungslinie ohne unendlich grosser geodätischer Krümmung in den Kreispunkt im allgemeinen Falle, wo R_t nach Null hin abnimmt, die collateralen s-Linien bei $\frac{dR_t}{ds} > 0$ mit divergirenden Tangenten ihre convexe Seite der fraglichen s-Linie zukehren, bei $\frac{dR_t}{ds} + 1 > 0 > \frac{dR_t}{ds}$ ihre convexe Seite der fraglichen s-Linie zukehren, während die Tangenten nach einem zwischen der t-Linie und dem Kreispunkt gelegenen Punkt convergiren, bei $\frac{dR_t}{ds} + 1 < 0$ schliesslich die concave Seite der fraglichen s-Linie zukehren, während die Tangenten nach

einem jenseits des Kreispunkts belegenen Punkt convergiren. Ich nenne den Verlauf der collateralen s-Linien in diesen drei Fällen *ausbiegend, anschmiegend* bezw. *umbiegend,* wodurch zwar von den anschmiegenden collateralen Krümmungslinien gesagt ist, dass sie längs der Tangente der fraglichen s-Linie zusammen mit dieser in den Kreispunkt eintreten, aber vom weiteren Verlauf der in Bezug auf eine in den Kreispunkt eintretende Krümmungslinie aus- bezw. umbiegenden collateralen Krümmungslinien nichts ausgesagt sein soll. Im Falle $\frac{dR_t}{ds} = 0$ wobei also $\nu > \mu$ ist, ergiebt sich, wenn $\nu - \mu$ eine gerade Zahl ist, ein anschmiegender bezw. ausbiegender Verlauf der collateralen Krümmungslinien, je nachdem $d^{\nu-\mu+1} R_t$ negatives oder positives Vorzeichen hat, während im entgegengesetzten Falle dies nur für den positiven Theil der s-Linie gilt, längs dem negativen Theile aber die collateralen Krümmungslinien den anderen dieser Verlaufstypen aufweisen. Der Fall $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$, in welchem die t-Linie der abwickelbaren Normalfläche eine Berührung höherer Ordnung mit der Kreispunktsnormale hat, wird weiter unten berücksichtigt werden. Hat R_t einen endlichen Limeswerth, unterscheidet sich der Verlauf der collateralen Krümmungslinien nicht von dem beim allgemeinen Flächenpunkte.

Daraus, dass Krümmungslinien nur längs den Linien $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ in einen Kreispunkt eintreten können, folgt natürlich nicht, dass dies längs allen solchen Linien der Fall sei. Es hat zwar für einen Kreispunkt n^{ter} Ordnung die n-malige Differentiation der Differentialgleichung

$$(1 + p^2)s - pqr + \lambda[(1 + p^2)t - (1 + q^2)r] + \lambda^2[pqt - (1 + q^2)s] = 0$$

für die Hauptkrümmungslinien die Werthe von λ gegeben, es müssen aber auch sämmtliche successiven Differentiationen höherer Ordnung reelle Werthe für $d\lambda$, $d^2\lambda$ u. s. w. ergeben. Im allgemeinen Flächenpunkte ist das immer der Fall, da im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ bei $\lambda = 0$ ein Differential beliebiger Ordnung $d^m\lambda$ immer erst in der durch die m-malige Differentiation erhaltene Gleichung auftritt und zwar mit dem Coefficienten $t - r$. Auf ähnliche Weise tritt derselbe Differentialquotient im Kreispunkte n^{ter} Ordnung und im Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y} = 0$ bei

$\lambda = 0$ immer erst in der durch die $(n+m)$-malige successive Differentiation erhaltenen Gleichung auf, aber mit dem Coefficienten:

$$\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots m}\left[\frac{n+m+1}{m+1}\left(\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^n \partial y^2} - \frac{\partial^{n+2}z_1}{\partial x^n \partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n+2}} - \frac{\partial^{n+2}z_1}{\partial x^{n+2}}\right)\right]$$

welcher theils aus der Differentiation des Produktes $\lambda(t-r)$ theils aus dem Differentialquotienten $d^{n+m}s$ stammt. In den Fällen wo ein solcher Coefficient gleich Null ist, tritt entweder die fragliche Krümmungslinie unter Bildung einer Spitze im Kreispunkt ein, oder es können die betreffenden Differentialquotienten von Gleichungen höherer Ordnung bestimmt werden, wobei die fragliche Krümmungslinie imaginär sein kann, oder mehrere Krümmungslinien längs derselben Tangente eintreten können. Solche Verhältnisse können aber nur vorliegen, wenn sowohl $\frac{d^n D_s}{ds^n}$ als $\frac{d^n D_t}{ds^n}$ gleich Null sind, d. h. wenn längs der fraglichen Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ die Ordnungszahl nicht nur des Kreispunkts sondern auch der Osculation mit einer Sphäre höher als n bezw. $n+1$ ist, und eben darum eignen sich diese Fälle nicht für eine allgemeine Untersuchung. Diese Fälle ausgenommen, kann ersichtlicherweise in den durch beliebig wiederholte successive Differentiationen erhaltenen Gleichungen nur dann (und zwar nur in einer Gleichung) der Coefficient des betreffenden Differentiales von λ Null werden, wenn die Bedingung $(n+1)\frac{d^n D_t}{ds^n} \gtrless \frac{d^n D_s}{ds^n} \gtrless \frac{d^n D_t}{ds^n} \gtrless 0$ erfüllt ist, d. h. wenn die fragliche in den Kreispunkt eintretende Krümmungslinie ohnehin von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet ist. In allen anderen Fällen tritt längs einer Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eine und nur eine Krümmungslinie in den Kreispunkt ein, und für diese kann weder die geodätische Krümmung, welche laut dem angegebenen Ausdruck den Werth

$$\frac{1}{R_s} = \frac{2\frac{\partial^{n+3}z}{\partial x^{n+2}\partial y}}{(n+1)\left(2\frac{d^n D_s}{ds^n} - (n+2)\frac{d^n D_t}{ds^n}\right)}$$

hat, noch irgend eine der successiven Ableitungen derselben einen unendlich grossen Werth haben, falls Kanten und Spitzen auf der untersuchten Fläche ausgeschlossen sind, was stillschweigend angenommen worden ist.

Für eine Umdrehungsfläche, deren Achse die Z-Achse ist, gilt

$$qx = py$$

wonach, wenn die Fläche im Kreispunkt n^{ter} Ordnung eine Berührung wenigstens der Ordnung $n+2$ mit einer Umdrehungsfläche hat, die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^nD}{ds^n} = 0$ für alle Werthe von ϑ erfüllt ist. Dass hier längs jeder Tangente des Kreispunkts eine Krümmungslinie verläuft, wird daraus bewiesen, dass, wie die eben ausgeführte Untersuchung lehrt, in jedem Coordinatensystem $p = q = 0$ successive Differentiationen bestimmte, nicht unendlich grosse Werthe für $d\lambda$, $d^2\lambda$ u. s. w. geben.

Wenn man mittels einer geschlossenen Linie ein Gebiet um einen Kreispunkt abgrenzt, welches keinen weiteren Kreispunkt enthält, so hat die von den Flächennormalen längs dieser Linie gebildete geradlinige Fläche einer Berührungslinie mit jeder der beiden Evolutenschalen, und von den Schnittpunkten einer beliebigen Generatrice mit diesen Linien gehört immer derjenige, dessen längs der Normale gemessener Abstand von der Fläche der kleinere ist, einer und derselben Schale an. Da dasselbe Verhalten auf den die genannte geradlinige Fläche schneidenden, durch den Kreispunkt gehenden abwickelbaren Normalflächen stattfindet, so ist es ersichtlich, dass das Vorzeichen der Differenz

$$d^\nu D_s - d^\nu D_t$$

die Schar bestimmt, welcher die fragliche Krümmungslinie angehört, wenn ν wie früher die partielle Ordnungszahl des Kreispunktes längs dieser Linie ist. Es geht daraus hervor, dass, wenn diese Zahl gerade ist, die Linie beiderseits von Kreispunkt einer und derselben Schaar angehört, im entgegengesetzten Falle aber nicht.

Ein weiteres Hilfsmittel für die Untersuchung giebt die Differentiation der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^nD}{ds^n} = 0$ ab. Wird diese auf dieselbe Weise ausgeführt, wie diese Gleichung selbst gewonnen worden ist, so ergiebt sich für $\lambda = 0$:

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^nD}{ds^n} = (n+2)\left((n+1)\frac{d^nD_t}{ds^n} - \frac{d^nD_s}{ds^n}\right) = n(n+2)\frac{d^nD_t}{ds^n}\left(\frac{dR_t}{ds} + 1\right).$$

Es folgt hieraus, dass umbiegende collaterale Krümmungslinien nur dann vorkommen, wenn $\frac{d^n D}{ds^n}$ als Funktion von ϑ ein numerisches Maximum in der fraglichen s-Linie hat, anschmiegende nur, wenn ein numerisches Minimum vorliegt, während ausbiegende collaterale Krümmungslinien ein numerisches Minimum bezw. Maximum angeben, je nachdem das Produkt $\frac{d^n D_s}{ds^n}\frac{d^n D_t}{ds^n}$ positiven oder negativen Werth hat.

Da die Gleichung $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ von derselben Gradzahl ist wie die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ mithin die Anzahl ihrer Wurzeln nicht grösser als diese Gradzahl sein kann, so erhellt es, dass eine in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinie, für welche $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ d. h. $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$ ist, ein Zusammenfallen von wenigstens zwei Wurzeln der letzterwähnten Gleichung repräsentiren muss. Ist die Anzahl der zusammenfallenden Wurzeln ungerade, so stellt die Linie wieder eine Linie $\frac{d^n D}{ds^n} =$ Max. bezw. Min. dar und hat dementsprechend umbiegende bezw. anschmiegende collaterale Krümmungslinien. Im anderen Falle sind die collateralen Krümmungslinien auf der Seite zunehmender bezw. abnehmender ϑ anschmiegend bezw. umbiegend, je nachdem $\frac{d^3}{d\vartheta^3}\frac{d^n D}{ds^n}$ dasselbe Vorzeichen wie $\frac{d^n D}{ds^n}$ hat oder entgegengesetztes, auf der anderen Seite umgekehrt. Da, abgesehen von diesen, ein Zusammenfallen von wenigstens zwei Wurzeln der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ repräsentirenden Linien, $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n}$ von Linie zu Linie Vorzeichen wechselt, da weiter anschmiegende collaterale Krümmungslinien der Bedingung $\left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds^n} - \frac{d^n D_s}{ds^n}\right)\left(\frac{d^n D_s}{ds^n} - \frac{d^n D_t}{ds^n}\right) > 0$ entsprechen, und das Vorzeichen der Differenz $\frac{d^n D_s}{ds^n} - \frac{d^n D_t}{ds^n}$ entscheidet, welcher Schaar eine Krümmungslinie angehört, so ist es ersichtlich, was a priori postulirt werden könnte, dass wenn zwei consecutive Krümmungslinien einer und derselben Schaar angehören, die eine anschmiegende collaterale Krümmungslinien hat und umgekehrt, sowie die Unmöglichkeit des Vorkommens von zwei consecutiven Krümmungslinien, welche beide anschmiegende collaterale Krümmungslinien hätten, daraus hervorgeht, dass dieser Typus einem numerischen

Minimum von $\frac{d^n D}{ds^n}$ als Funktion von ϑ entspricht. Ein Gebiet, in welchem Krümmungslinien längs gemeinsamer Tangente in einen Kreispunkt einlaufen, oder ein offenes Nodalgebiet der Autoren, ist also immer durch eine Krümmungslinie, längs welcher innerhalb des fraglichen Gebietes keine anschmiegende Krümmungslinien eintreten, beiderseits abgegrenzt, und es stellt das erwähnte Verhalten bei einer Linie $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$ nur eine scheinbare Ausnahme von dieser Regel dar, indem die eine Grenzlinie des offenen Nodalgebietes mit den einlaufenden Krümmungslinien gemensame Tangente hat.

Zu den angeführten Hilfsmitteln um die Krümmungslinienfigur eines Kreispunkts zu untersuchen kann noch der Limeswerth der geodätischen Krümmungssymmetrie einer die s-Linie in unendlich kleinem Abstande vom Kreispunkt schneidenden t-Linie gefügt werden. Aus dem im allgemeinen Flächenpunkte giltigen Werthe

$$\psi'' = -\frac{\partial^{13}}{r - t} + \frac{w(3v - 2u)}{(r - t)^2}$$

erhält man bei unendlich kleinem Werthe von R_t:

$$\frac{dR_t}{dt} = -R_t^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{R_t} = \frac{2u}{w} = \frac{2U}{W}$$

welcher Ausdruck, da im Kreispunkte n^{ter} Ordnung

$$\frac{d^{n-1} U}{ds^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n-1} \partial y^3}$$

sein muss, weil die Differentialquotienten niedrigerer Ordnung der Normalschnittkrümmung gleich Null sind, durch Differentiation von Zähler und Nenner den Limeswerth

$$\frac{dR_t}{dt} = \frac{2 \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n-1} \partial y^3}}{\frac{d^n D_t}{ds^n}}$$

ergiebt.

Die angeführten Eigenschaften der s- und t-Linien der abwickelbaren Normalflächen reichen im allgemeinen dazu aus, die gestaltlichen Verhält-

nisse der Evolute hinreichend kennen zu lernen. Für die einfacheren Kreispunktstypen kann man noch die Schnittlinien der Evolute mit der durch den Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts parallel zur Tangentialebene gelegten Ebene hinzuziehen, deren Tangenten bei Kreispunkten erster Ordnung durch eine quadratische, bei solchen Kreispunkten zweiter Ordnung, welche Schnittpunkte zweier auf der bezüglichen Fläche verlaufenden Symmetrielinien sind, durch eine als quadratische auflösbare Gleichung vierten Grades angegeben werden.

Durch Differentiation von Zähler und Nenner im allgemeinen Ausdruck für das Krümmungsmass der Evolute findet man, dass das Vorzeichen des Krümmungsmasses bei unendlich kleiner Differenz der Hauptkrümmungen dem Vorzeichen des Produktes $\frac{d^n D_s}{ds^n} \frac{d^n D_t}{ds^n}$ entgegengesetzt ist, was für den Theil der Evolute gilt auf welchem die s-Linie einer abwickelbaren, die Kreispunktsnormale enthaltenden, Fläche eine geodätische Linie ist.

Für eine mit einer t-Linie der abwickelbaren Normalfläche zusammenfallenden Kante entscheidet der Limeswerth des für den allgemeinen Flächenpunkt giltigen Ausdruckes

$$\Phi'' - \partial^{04} \qquad 3t^3 - \frac{3w^2}{r - t}$$

ob sie nach der Fläche schaut oder nicht. Da die beiden ersten Glieder zusammen die Abflachung des auf der fraglichen s-Linie senkrechten Normalschnittes bedeuten, welche mit φ^t bezeichnet werden mag, so kann dieser Ausdruck allgemein als eine Gleichung

$$\Phi^t = \varphi^t + \frac{3W}{R_t}$$

zwischen rein geometrischen vom Coordinatensystem unabhängigen Grössen geschrieben werden. Man ersieht, dass in den Kreispunkten erster Ordnung Φ^t beim Durchgang der fraglichen s-Linie durch den Kreispunkt einen unendlich grossen Werth erhält und das Vorzeichen wechselt. Für diesen Fall setzt man am geeignetsten

$$\frac{1}{\Phi^t} = \frac{R_t}{3W + R_t\varphi^t}$$

und erhält durch Differentiation:

$$d\frac{\mathrm{I}}{\Phi^t} = \frac{dR_t}{3W} = \frac{\frac{dD_t}{ds} - \frac{dD_s}{ds}}{3\left(\frac{dD_t}{ds}\right)^2} ds.$$

Für die Kreispunkte zweiter Ordnung erhält man den Limeswerth

$$\Phi^t = \varphi^t + \frac{6\left(\frac{d^2D_t}{ds^2}\right)^2}{\frac{d^2D_t}{ds^2} - \frac{d^2D_s}{ds^2}}$$

und für solche höherer Ordnung nach $n - \mathrm{I}$ Differentiationen allgemein:

$$(n - \mathrm{I})\, dR_t d^{n-2}(\Phi^t - \varphi^t) = 3d^{n-1} W$$

mithin:

$$\frac{d^{n-2}\Phi^t}{ds^{n-2}} - \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n-2}\partial y^4} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^{n-2}\partial y^4} + \frac{3n}{n - \mathrm{I}} \frac{\left(\frac{d^n D_t}{ds^n}\right)^2}{\frac{d^n D_t}{ds^n} \quad \frac{d^n D_s}{ds^n}}.$$

Mit den angegebenen Hilfsmitteln können nun die gestaltlichen Verhältnisse sowohl der Krümmungslinien wie der Evolute eines Kreispunktes beliebiger Ordnung untersucht werden, wenn die betreffenden Differentialquotienten der Flächengleichung bekannt sind, indem nach numerischer Auflösung der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = \mathrm{o}$ in den verschiedenen Coordinatensystemen $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y} = \mathrm{o}$ die bezüglichen Werthe $\frac{d^n D_s}{ds^n}, \frac{d^n D_t}{ds^n}$ ermittelt werden. Für eine allgemeinere Untersuchung von besonderen Kreispunktstypen giebt es aber bequemere Mittel. So genügt z. B. die Kenntniss der Wurzeln der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = \mathrm{o}$ um das Vorzeichen von $\frac{d^n D_s}{ds^n}$ für jede der Linien $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = \mathrm{o}$ zu bestimmen. Um Ähnliches auch betreffs $\frac{d^n D_t}{ds^n}$ und der Differenz $\frac{d^n D_s}{ds^n} - \frac{d^n D_t}{ds^n}$ erreichen zu können, kann man auf folgende Weise verfahren. Nach derselben Methode wie die Gleichung für $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n}$

kann eine Gleichung für $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n}$ erhalten werden. Mittels der leicht zu constatirenden Identitäten

$$\frac{d}{d\vartheta}(d^{n+1}p - d^{n+1}p_1) = (n+1)[(d^n s - d^n s_1)dx - (d^n r - d^n r_1)dy],$$

$$\frac{d}{d\vartheta}(d^{n+1}q - d^{n+1}q_1) = (n+1)[(d^n t - d^n t_1)dx - (d^n s - d^n s_1)dy]$$

und der schon beviesenen Relation

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds^n} - \frac{d^n D_s}{ds^n}\right)$$

erhält man die Gleichung

$$d^n D_t = \frac{(d^n t - d^n t_1)dx^2 - 2(d^n s - d^n s_1)dxdy + (d^n r - d^n r_1)dy^2}{ds^2}$$

wonach unter Anwendung der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ in folgender Form

$$(d^n s - d^n s_1)(dx^2 - dy^2) = (d^n r - d^n r_1 - d^n t + d^n t_1)dxdy$$

für jede beliebige Krümmungslinie die Gleichung

$$d^n D_s - d^n D_t = (d^n r - d^n r_1 - d^n t + d^n t_1)\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2 - dy^2} = (d^n s - d^n s_1)\frac{dx^2 + dy^2}{dxdy}$$

besteht, in welcher $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ zu erhalten ist.

Zum Schlusse dieses Capitels mag es mir gestattet sein die Eigenschaften der Krümmungslinien im allgemeinen Flächenpunkte den hier bewiesenen Eigenschaften im Kreispunkte zusammenfassend gegenüberzustellen.

Wenn allgemein Krümmung, geodätische Torsion und Bogenlänge einer Normalschnittlinie der Fläche bezw. der kürzeste Abstand zwischen den Flächennormalen in zwei auf dieser Linie belegenen Punkten mit D, T und s bezw. σ bezeichnet werden, und ϑ den Winkel zwischen der

Tangente der Normalschnittlinie und einer fixen Tangente bedeutet, so gelten für den allgemeinen Flächenpunkt die Beziehungen

$$\frac{dD}{d\vartheta} = -2T, \qquad \frac{d\sigma}{ds} = \pm \frac{T}{\sqrt{D^2 + T^2}}$$

und es ist im Coordinatensystem $p = q = 0$ für die die Coordinatenachsen berührenden Normalschnittlinien

$$\frac{dD}{d\vartheta} = \pm 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

wobei das obere Zeichen für die die X-Achse, das untere für die die Y-Achse berührende Linie gilt. Im Kreispunkt n^{ter} Ordnung, in welchem mithin eine vollständige Berührung der Ordnung $n + 1$ mit der osculirenden Sphäre besteht, sind diese sowie die, sämmtlichen successiven Ableitungen bis einschliesslich der Ordnung $n - 1$ entsprechenden, Werthe gleich Null und es bestehen die Relationen

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = -(n+2)\frac{d^n T}{ds^n}, \qquad \frac{d^{n+1}\sigma}{ds^{n+1}} = \pm \frac{\frac{d^n T}{ds^n}}{\sqrt{D^2 + T^2}}$$

wobei im Coordinatensystem $p = q = 0$ für die die X-Achse bezw. die Y-Achse berührende Normalschnittlinie

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y} \quad \text{bezw.} \quad \frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = -(n+2)\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x \partial y^{n+1}}$$

ist.

Die Krümmungslinien, oder die ohne geodätische Torsion auf der Fläche verlaufenden Linien, oder die Schnittlinien der Fläche mit ihren abwickelbaren Normalflächen, haben allgemein die Eigenschaft, dass der kürzeste Abstand der Flächennormalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten, wenn diese Punkte auf einer Krümmungslinie liegen, ein Unendlichkleines höherer Ordnung darstellt, als sonst. Im allgemeinen Flächenpunkt verlaufen sie in den durch eine Gleichung zweiten Grades bestimmten Richtungen $\frac{dD}{d\vartheta} = 0$ und werden im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ von den Coordinatenachsen berührt. Im Kreispunkte n^{ter} Ordnung verlaufen sie in den durch eine Gleichung vom Grade $n + 2$

bestimmten Richtungen $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ und es wird in jedem Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y} = 0$ bezw. $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x \partial y^{n+1}} = 0$ eine Krümmungslinie von der X-Achse bezw. von der Y-Achse berührt

Wie ersichtlich, würden die Gesetze für den allgemeinen Flächenpunkt in den für die Kreispunkte geltenden enthalten sein, wenn man den allgemeinen Flächenpunkt als Kreispunkt von der Ordnung Null und eine Funktion als ihre eigene Ableitung von der Ordnung Null bezeichnen dürfte.

Unter dieser Bedingung würde übrigens der im Kreispunkt geltende Werth für die geodätische Krümmung einer eintretenden Krümmungslinie auch im allgemeinen Flächenpunkte die Giltigkeit behalten.

III. Die wichtigsten Kreispunktstypen.

1. *Kreispunkte erster Ordnung.*

Es mag allgemein als eine Linie $u = 0$ bezw. eine Linie $w = 0$ u. s. w. eine Linie bezeichnet werden, welche in einem Coordinatensystem $p = q = u = 0$ bezw. in einem Coordinatensystem $p = q = w = 0$ u. s. w. mit der X-Achse zusammenfällt. Die Krümmungslinien sind also die Linien $v = 0$ deren Orientation durch die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{dD_s}{ds} = 0$ angegeben wird, welche folgende Form hat

$$v dx^3 - (u - 2w) dx^2 dy + (w - 2v) dx dy^2 - w dy^3 = 0$$

und in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ für die Orientirung der beiden übrigen Haupttangenten die quadratische Gleichung

$$w \operatorname{tg}^2 \vartheta - w \operatorname{tg} \vartheta + u - 2w = 0$$

giebt, in welcher $\frac{dy}{dx}$ mit $\operatorname{tg} \vartheta$ bezeichnet ist.

Für die die X-Achse in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ berührende Hauptkrümmungslinie haben wir nun, indem wir die mit den Bezeichnungen im allgemeinen Flächenelemente analogen Bezeichnungen

$$\frac{dD_s}{ds} = U, \qquad \frac{dD_t}{ds} = W, \qquad \frac{d^2 D_s}{ds^2} = \Phi, \qquad \frac{d^2 D_t}{ds^2} = \Omega$$

einführen, laut obigen Deductionen:

$$U = u, \qquad W = w, \qquad \Phi = \partial^{40} - 3r^3, \qquad \Omega = \partial^{22} - r^3 + \frac{m\partial^{31}}{2u - 3w},$$

$$\frac{1}{R_s} = \frac{\partial^{31}}{2u - 3w}, \qquad \frac{dR_t}{ds} = \frac{w - u}{w} = \frac{W - U}{W}.$$

Die Krümmung der s- bezw. t-Linie der abwickelbaren Normalfläche deren Schnittlinie mit der Fläche die fragliche Krümmungslinie darstellt, welche mit $\frac{1}{R^s}$ bezw. $\frac{1}{R^t}$ bezeichnet werden mag, ist:

$$\frac{1}{R^s} = \frac{r^3}{u} = \frac{D^3}{U}, \qquad \frac{1}{R^t} = -\frac{r^3(u - 2w)}{w^2} = -\frac{D^3(U - 2W)}{W^2}.$$

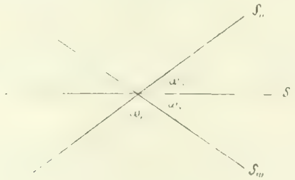


Fig. 1.

Es mögen weiter nach dem Schema der Fig. 1 die positiven Richtungen der drei möglichen Krümmungslinien mit s_1 s_{11} s_{111} und die zwischen ihnen gebildeten, immer positiv gerechneten Winkel mit ω_1 ω_{11} ω_{111} sowie die Werthe, welche u w $\frac{dR_t}{ds}$ u. s. w. annehmen, wenn der positive Theil der betreffenden Hauptkrümmungslinie mit dem positiven Theile der X-Achse zusammenfällt mit $u_1 u_{11}$ $w_1 w_{11}$ $\frac{dR_t}{ds_1} \frac{dR_t}{ds_{11}}$ u. s. w. bezeichnet werden.

Aus der S. 82 angegebenen Gleichung

$$d^n D_s - d^n D_t = (d^n s - d^n s_1) \frac{dx^2 + dy^2}{dx\,dy}$$

welche in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ die Form

$$U_n - W_n = \frac{w}{\cos \vartheta}$$

hat, und in welcher U_n bezw. W_n die Werthe für eine Hauptkrümmungslinie angeben, deren Tangente mit der X-Achse den Winkel ϑ bildet, resultiren in den verschiedenen Coordinatensystem $p = q = v = 0$ folgende Gleichungen

$$\cos\omega_{\mathrm{I}} = -\cos(\omega_{\mathrm{II}} + \omega_{\mathrm{III}}) = -\frac{w_{\mathrm{II}}}{u_{\mathrm{III}} - w_{\mathrm{III}}} = -\frac{w_{\mathrm{III}}}{u_{\mathrm{II}} - w_{\mathrm{II}}},$$

$$\cos\omega_{\mathrm{II}} = \frac{w_{\mathrm{III}}}{u_{\mathrm{I}} - w_{\mathrm{I}}} = \frac{w_{\mathrm{I}}}{u_{\mathrm{III}} - w_{\mathrm{III}}},$$

$$\cos\omega_{\mathrm{III}} = \frac{w_{\mathrm{I}}}{u_{\mathrm{II}} - w_{\mathrm{II}}} = \frac{w_{\mathrm{II}}}{u_{\mathrm{I}} - w_{\mathrm{I}}}$$

aus welchen einestheils hervorgeht, dass das Product $w(u-w)$ in allen Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ denselben Werth hat, d. h. dass das mit dem negativen Werthe dieses Productes identische Product $W^2 \frac{dR_t}{ds}$ längs jeder Hauptkrümmungslinie einen und denselben Werth hat, anderentheils aber auch die Beziehung

$$\frac{1}{\cos\omega_{\mathrm{I}}\cos\omega_{\mathrm{II}}\cos\omega_{\mathrm{III}}} = \frac{dR_t}{ds_{\mathrm{I}}} \cdot \frac{dR_t}{ds_{\mathrm{II}}} \cdot \frac{dR_t}{ds_{\mathrm{III}}}$$

hergeleitet wird.

Man erzieht hieraus, dass im Falle $W(U-W) < 0$, wobei immer drei Haupttangenten existiren, sämmtliche Winkel ω spitz sind, und für alle Hauptkrümmungslinien $\frac{dR_t}{ds} > 0$ ist. Bei $W(U-W) > 0$ können eine, zwei oder drei Hauptkrümmungslinien vorhanden sein, einer der Winkel ω ist grösser als $\frac{\pi}{2}$, so dass sämmtliche Haupttangenten innerhalb eines Quadrantes verlaufen, und $\frac{dR_t}{ds}$ hat für alle einen negativen Werth. Den Übergang zwischen den beiden Typen stellen die Fälle $W(U-W) = 0$ dar, in welchen immer zwei orthogonale Krümmungslinien und eine Linie $v = u - w = 0$ existiren. Längs der letzteren, welche mit einer der beiden anderen zusammenfallen kann, ist also der Kreispunkt von höherer Ordnung, und bei dem erwähnten Zusammenfallen besteht noch dazu längs dieser Linie eine Berührung höherer Ordnung mit der Sphäre, indem sie eine Linie $v = u = w = 0$ darstellt.

Wenn in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ auch $\mathfrak{w} = 0$ gefunden wird, so ist das Flächenelement bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der dritten symmetrisch zur XZ-Ebene, und die t-Linie der mit dieser Ebene zusammenfallenden abwickelbaren Normalfläche stellt mithin eine Kantlinie auf der Evolute dar. Um diese für die gestaltlichen Verhältnisse der Evolute bedeutungsvollen Kantlinien zu untersuchen geht man daher am besten von den Fällen aus, in welchen die vorhandenen Linien $\mathfrak{w} = 0$ mit den Krümmungslinien zusammenfallen. Wenn in der Gleichung $\frac{dD_s}{ds} = 0$ mit Rücksicht darauf dass die Linien $\mathfrak{w} = 0$ senkrecht auf den Linien $u = 0$ stehen, $\operatorname{tg}\theta$ für $-\frac{dx}{dy}$ eingesetzt wird, so erhält man im Coordinatensystem $p = q = v = 0$ für die Orientirung der Linien $\mathfrak{w} = 0$ die cubische Gleichung

$$u \operatorname{tg}^3\theta + 3w \operatorname{tg}\theta - \mathfrak{w} = 0$$

welche nur eine reelle Wurzel hat, sobald

$$u^2\mathfrak{w}^3 + 4w^3u > 0$$

ist.

Schnittlinien der Evolute mit der durch den Krümmungsmittelpunkt parallel zur Tangentialebene gelegten Ebene, der Fokalebene, findet man, indem man in den Gleichungen der Normale

$$\xi = x(1 - \zeta r) - \frac{\zeta}{2}(ux^2 + wy^2), \qquad \eta = y(1 - \zeta r) - \frac{\zeta}{2}(2wxy + \mathfrak{w}y^2),$$

$\zeta = \frac{1}{r}$, $\frac{y}{x} = y'$, $\frac{\eta}{\xi} = \eta'$ einsetzt und dann den resultirenden Ausdruck

$$\eta' = \frac{2wy' + \mathfrak{w}y'^2}{u + wy'^2} \cdot$$

differentiirt:

$$\frac{d\eta'}{dy'} = \frac{2(uw + u\mathfrak{w}y' - w^2y'^2)}{(u + wy'^2)^2}$$

indem die der Bedingung $\frac{d\eta'}{dy'} = 0$ entsprechende Werthe von η' bei nach Null hin abnehmenden Werthen von x und y die Tangenten der Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene im Fokalpunkte darstellen müssen.

Die Bedingung dafür, dass die Evolute die Fokalebene schneidet ist mithin

$$uw + uw\!\!\!\!\!\;u\,y' - w^2 y'^2 = 0$$

d. h.

$$u^2 \mathfrak{w}^2 + 4 w^3 u \geqq 0.$$

Werden die Wurzeln dieser Gleichung für y' mit $a_1 a_{11}$ und die entsprechenden Werthe für η' mit $c_1 c_{11}$ bezeichnet, dann die Werthe

$$a_1 + a_{11} = \frac{u\mathfrak{w}}{w^2}, \qquad a_1 a_{11} = -\frac{u}{w}, \qquad a_1^2 + a_{11}^2 = \frac{u^2\mathfrak{w}^2 + 2w^3 u}{w^4}$$

in den Ausdruck

$$c_1 + c_{11} = \frac{2wa_1 + \mathfrak{w}a_1^2}{u + wa_1^2} + \frac{2wa_{11} + \mathfrak{w}a_{11}^2}{u + wa_{11}^2}$$

und den entsprechenden für $c_1 c_{11}$ eingesetzt, so findet man

$$c_1 + c_{11} = \frac{\mathfrak{w}}{w}, \qquad c_1 c_{11} = -\frac{w}{u}$$

d. h. fün η' die Gleichung:

$$uw\eta'^2 - u\mathfrak{w}\eta' - w^2 = 0$$

und die Identitäten

$$c_1 = -\frac{1}{a_{11}}, \qquad c_{11} = -\frac{1}{a_1}.$$

Wird dann der Winkel, den die in der Fokalebene durch den Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts gezogenen Tangenten der Evolute bilden, der *Evolutenwinkel,* mit ε bezeichnet, so hat man:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{c_1 - c_{11}}{1 + c_1 c_{11}} = \frac{\sqrt{u^2\mathfrak{w}^2 + 4w^3 u}}{w(u - w)}.$$

Aus diesem Ausdrucke ersieht man, dass bei $u^2\mathfrak{w}^2 + 4w^3 u < 0$ d. h. wenn drei Linien $\mathfrak{w} = 0$ vorhanden sind, die Evolute nicht die Fokalebene schneidet, und dass, wenn zwei Linien $\mathfrak{w} = 0$ existiren — bei $u^2\mathfrak{w}^2 + 4w^3 u = 0$ — nur eine Schnittlinie zwischen Evolute und Fokalebene sich vorfindet, während für Kreispunkte mit nur einer Linie $\mathfrak{w} = 0$ immer zwei solche Linien existiren, deren Tangenten im Fokalpunkte den

Evolutenwinkel bilden. Die Categorie mit nur einer Linie $u = 0$ umfasst theils die Fälle $w(u - w) > 0$ und $w(u - w) = 0$, theils aber auch Fälle $w(u - w) < 0$. Hierbei muss aber, da nur eine Linie $u = 0$ vorhanden ist, immer eine Hauptkrümmungslinie vorhanden sein, längs welcher u ein numerisches Minimum darstellt. Es muss also längs dieser Linie u und $2w - u$ dasselbe Vorzeichen haben, wonach, da $w(u - w) < 0$ ist, auch w und u dasselbe Vorzeichen haben müssen. In Kreispunkten mit nur einer Linie $u = 0$ giebt es also immer ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$ in welchem sowohl u als w positive Werthe haben und folglich der aus der Normalengleichung erhaltene Werth für ξ in der Fokalebene immer negativ ist. Es folgt hieraus, dass sämmtliche Normalen die Fokalebene innerhalb eines der vier Winkel ε treffen, wonach die Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene nicht den Fokalpunkt überschreiten, sondern in ihm endigen. Der so bestimmte Winkel muss also wenigstens so gross sein als die Summe der zwei kleinsten Winkel ω. Da nun bei $w(u - w) < 0$ diese Summe grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist und beim Durchgehen des Werthes $w(u - w)$ durch Null, der Werth von $\operatorname{tg}\varepsilon$ durch ∞ hindurchgeht, so folgt hieraus, dass der angegebene Werth für $\operatorname{tg}\varepsilon$ auch dem Vorzeichen nach die Grösse des Evolutenwinkels angiebt, während seine Orientirung dadurch bestimmt ist, dass in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$, in welchem sowohl u als w positiv sind, der negative Theil der X-Achse innerhalb desselben verläuft. Näher wird die Orientirung durch die Bissectrice bestimmt, welche mit der X-Achse in einem solchen Coordinatensystem den Winkel

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{c_1 + c_{11}}{1 - c_1 c_{11}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{uu}{w(u + w)}$$

bildet.

Die Bedingung $u^2 u^2 + 4w^3 u > 0$ bedeutet übrigens auch eine Beziehung zwischen den Winkeln ω. Aus der für ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$ giltigen Gleichung

$$w \operatorname{tg}^2 \vartheta - u \operatorname{tg} \vartheta + u - 2w = 0$$

für die Orientirung der beiden übrigen Hauptkrümmungslinien, findet man nämlich, wenn die s_1-Linie mit der X-Achse zusammenfällt, und wenn $\operatorname{tg}\vartheta_1$ $\operatorname{tg}\vartheta_{11}$ die beiden Wurzeln der Gleichung sind:

$$-\operatorname{tg}\vartheta_1 \operatorname{tg}\vartheta_{11} = \frac{2w-u}{w} = \frac{dR_t}{ds_1} + 1 = \operatorname{tg}\omega_{11} \operatorname{tg}\omega_{111}$$

wonach aus der für $\omega_1 + \omega_{11} + \omega_{111} = \pi$ giltigen Beziehung

$$\operatorname{tg}\omega_1 + \operatorname{tg}\omega_{11} + \operatorname{tg}\omega_{111} = \operatorname{tg}\omega_1 \operatorname{tg}\omega_{11} \operatorname{tg}\omega_{111}$$

die Identität

$$\frac{dR_t}{ds_1} = \frac{\operatorname{tg}\omega_{11} + \operatorname{tg}\omega_{111}}{\operatorname{tg}\omega_1}$$

erhalten wird. Wird nun diejenige Hauptkrümmungslinie in einem Kreispunkte vom Typus $w(u-w) < 0$ mit nur einer Linie $\mathfrak{w} = 0$, für welche $w \gtrless u \gtrless 0$ mithin $\frac{dR_t}{ds} < 1$ ist, als die s_1-Linie bezeichnet, so erhellt es, dass die Bedingung $u^2\mathfrak{w}^2 + 4w^3u > 0$ mit der Bedingung, dass die trigonometrische Tangente eines der Winkel ω grösser ist als die Summe der trigonometrischen Tangenten der beiden anderen, zusammenfällt.

In den Fällen $u^2\mathfrak{w}^2 + 4w^3u < 0$, in welchen sowohl u als w zwischen zwei consecutiven Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ Vorzeichen wechseln, ist dass Krümmungsmass der Evolute längs den s-Linien der abwickelbaren Normalflächen positiv, und die drei Linien $\mathfrak{w} = 0$ können mit den Hauptkrümmungslinien zusammenfallen, wonach sie ebenso viele Kanten auf der Evolute darstellen. Man findet, dass die beiden Evolutenschalen Trichter mit drei Kanten bilden und im Fokalpunkte sich gegenseitig mit den Spitzen berühren.

In den Fällen $u^2\mathfrak{w}^2 + 4w^3u > 0$ findet man, dass der auf der einen Seite der Fokalebene gelegene Theil der s-Linie der abwickelbaren Normalfläche derselben Schale der Evolute angehört wie der auf der anderen Seite der Fokalebene gelegene Theil der t-Linie derselben. Da nun diese mit der Linie $\mathfrak{w} = 0$ zusammenfallen und somit eine Kante darstellen kann, so findet man, dass jede Evolutenschale eineKante hat, welche im Fokalpunkte endigt, und dass die Schnittlinien der beiden Schalen mit der Fokalebene im Fokalpunkte dieselben Tangenten haben, welche den Evolutenwinkel bilden. Der S. 81 angegebene Werth für $\frac{d}{ds}\frac{1}{\Phi^t}$ ergiebt in jedem Falle, dass die Kante der einen Schale nach der anderen Schale schaut.

Die angeführten Relationen reichen dazu aus, um alle Fälle in Detail zu untersuchen ausser der Fälle, in welchen längs einer Krümmungslinie

sowohl die Ordnungszahl des Kreispunkts wie die Osculation mit der Sphäre von höherer Ordnung ist. Für diese durch ein Coordinatensystem $p=q=v=u=w=0$ charakterisirten Fälle, welche man am besten durch die Untersuchung vom Zusammenrücken mehrerer Kreispunkte kennen lernt, so wie für die detaillirtere Untersuchung verweise ich auf meine a. a. O. gegebene Darstellung und beschränke mich hier auf folgende Zusammenfassung.

1. *Umbiegende Krümmungslinien.* In den Coordinatensystemen

$$p=q=v=0$$

ist $w(u-w)>0$. Die zwei Evolutenschalen sind offen und haben jede eine Kante, welche im Fokalpunkte endigt. Sie schneiden sich beim Durch-

Fig. 2.

gang durch die Fokalebene, wobei ihre in dieser belegenen Tangenten einen Evolutenwinkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bilden. Sämmtliche Haupttangenten verlaufen innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$. Bei $m^2<4w(u-2w)$ existirt nur eine Haupttangente. Wenn in einem Coordinatensystem $p=q=v=0$, $m^2=4w(u-2w)$ ist, so giebt es noch ein anderes, in welchem $u=2w$ ist, wobei die entsprechende Krümmungslinie auf der nach dem spitzen Winkel zwischen den zwei Haupttangenten gewendeten Seite von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet ist. Bei $m^2>4w(u-2w)$ giebt es immer drei Haupttangenten, und diese Bedingung ist für alle drei Coordinatensysteme $p=q=v=0$ erfüllt. Die mittlere der drei in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien ist beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet. S. Fig. 2.

2. *Ausbiegende Krümmungslinien.* Drei Coordinatensysteme

$$p=q=v=0.$$

In allen $w(u - w) < 0$. Nirgends mehr als zwei Haupttangenten innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$. S. Fig. 3.

a) $u^2 w^2 + 4 w^3 u > 0$ in den Coordinatensystemen $p = q = v = 0$. Die Tangente des einen Winkels zwischen zwei Haupttangenten ist grösser als die Tangentensumme der beiden anderen. Die Evoluten schneiden einander in der Fokalebene. Evolutenwinkel grösser als $\frac{\pi}{2}$. Jede Schale hat eine Kante, welche im Fokalpunkte endigt.

b) In zwei der bezüglichen Coordinatensystemen ist $u^2 w^2 + 4 w^3 u = 0$ im dritten $u = 0$. Die Tangente des einen Winkels zwischen zwei Haupttangenten ist gleich der Tangentensumme der beiden anderen. Jede Evolutenschale hat eine Kante, welche in dem Fokalpunkt endigt. Die eine Schale geht mit nur einer Schnittlinie durch die Fokalebene. Die andere ist längs einer diese Schnittlinie im Fokalpunkt berührenden Kante umgebogen und liegt ganz auf der einen Seite der Fokalebene.

Fig. 3.

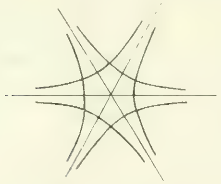
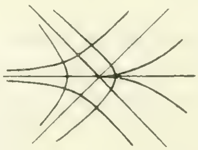


Fig. 4.



c) In allen Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ ist $u^2 w^2 + 4 w^3 u < 0$. Kein Winkel zwischen zwei Haupttangenten hat eine trigonometrische Tangente, welche die Tangentensumme der beiden anderen erreicht oder übersteigt. Die Evolutenschalen bilden jede einen geschlossenen Trichter mit drei Kanten, sind auf verschiedenen Seiten der Fokalebene belegen und stossen mit ihren Spitzen im Fokalpunkt zusammen.

3. *Eine durchgehende Krümmungslinie und zwei orthogonale.* Für alle bezüglichen Coordinatensysteme ist $w(u - w) = 0$. Der Krümmungslinientypus zeigt eine Combination von ausbiegenden und umbiegenden Krümmungslinien. S. Fig. 4. Beide Evolutenschalen schneiden die Fokalebene.

Der Evolutenwinkel ist $\frac{\pi}{2}$. Die eine Schale ist ohne Kanten, die andere hat eine durch den Fokalpunkt hindurchgehende. Die zwei orthogonalen Krümmungslinien entsprechen Coordinatensystemen $p = q = v = w = 0$. Im dritten Coordinatensystem $p = q = v = 0$ ist $u = w$ und die Ordnungszahl des Kreispunkts eine gerade. Ist in einem Kreispunkte $w(u - w) = 0$ längs der Linie $u = w$ die Ordnungszahl des Kreispunkts eine ungerade, so gehört er dem Typus mit umbiegenden Krümmungslinien bezw. dem Typus mit ausbiegenden Krümmungslinien und $u^2 m^2 + 4w^3 u > 0$ an, je nachdem längs dieser Linie der erste Differentialquotient der Differenz $D_s - D_t$ welcher von Null verschieden ist, dasselbe Vorzeichen wie w hat oder umgekehrt. Fällt die Linie $u - w = 0$ mit einer der orthogonalen Krümmungslinien zusammen, wobei längs dieser nicht nur die Ordnungszahl des Kreispunkts, sondern auch der Osculation mit der Sphäre höher ist, so entstehen besondere Typen.

2. *Kreispunkte zweiter Ordnung.*

Die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^2 D_s}{ds^2} = 0$ für die Orientirung der Hauptttangenten lautet:

$$\partial^{31} dx^4 + (3\partial^{22} - \partial^{40}) dx^3 dy + 3(\partial^{13} - \partial^{31}) dx^2 dy^2 +$$
$$+ (\partial^{04} - 3\partial^{22}) dx dy^3 - \partial^{13} dy^4 = 0$$

und in einem Coordinatensystem $p = q = \partial^{31} = 0$ gelten für die von der X-Achse berührten Hauptkrümmungslinie die Werthe

$$\Phi = \partial^{40} - 3r^3, \qquad \Omega = \partial^{22} - r^3, \qquad \Phi^t = \partial^{04} - r^3 - \frac{6\Omega^2}{\Phi - \Omega},$$
$$\frac{1}{R_s} = \frac{\partial^{41}}{3(\Phi - 2\Omega)}, \qquad \frac{dR_t}{ds} = \frac{\Omega - \Phi}{2\Omega}.$$

Die s- und t-Linien der von der XZ-Ebene in diesem Coordinatensystem berührten abwickelbaren Normalfläche bilden im allgemeinen Falle Spitzen im Fokalpunkt, welche bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der dritten mit denjenigen von semicubischen Parabeln zusammenfallen.

Die der s-Linie entsprechende semicubische Parabel ist

$$9\Phi\xi^2 = -8D^4(\zeta - \rho)^3$$

deren Spitze eine Evolute vom Krümmungshalbmesser $+\frac{\Phi}{D^4}$ hat. Dieser Krümmungshalbmesser ist für die t-Linie

$$+\frac{4\Omega^3}{D^4(\Phi - 3\Omega)^2}$$

und die Gleichung der ihr entsprechenden semicubischen Parabel

$$9\Omega^3\xi^2 = -2D^4(\Phi - 3\Omega)^2(\zeta - \rho)^3.$$

Von den Kreispunkten zweiter Ordnung sind diejenigen, welche zwei Symmetrieebene besitzen zugleich die wichtigsten und der Untersuchung am leichtesten zugänglich. Sie haben zwei Coordinatensysteme

$$p = q = \partial^{31} = \partial^{13} = 0,$$

in welchen also sowohl die Y- als die X-Achse Haupttangenten sind und können ausserdem noch zwei symmetrisch zu diesen Haupttangenten verlaufenden Krümmungslinien haben. Die geometrischen Grössen, welche die von der X- bezw. Y-Achse in einem solchen Coordinatensystem berührten Hauptkrümmungslinien charakterisiren, mögen mit $\Phi_1\ \Phi'_1$ bezw. $\Phi_{11}\ \Phi'_{11}$ u. s. w. bezeichnet werden, die für die beiden übrigen gemeinsamen mit $\Phi_{111}\ \Phi'_{111}$ u. s. w. Da nun aber $\Omega_1 = \Omega_{11}$ ist, mag für diese Werthe die Bezeichnung Ω gebraucht werden.

In einem Coordinatensystem $p = q = \partial^{31} = \partial^{13} = 0$ erhält man für einen beliebigen Normalschnitt

$$\frac{d^2 D_s}{ds^2} = \Phi_1 \cos^4\vartheta + 6\Omega\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + \Phi_{11}\sin^4\vartheta$$

und für die beiden s_{111}-Linien

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{\Phi_1 - 3\Omega}{\Phi_{11} - 3\Omega}$$

woraus resultirt

$$\Phi_{111} = \frac{\Phi_1\Phi_{11} - 9\Omega^2}{\Phi_1 + \Phi_{11} - 6\Omega}.$$

Die S. 82 angebene Gleichung für $d^n D_s - d^n D_t$ längs einer beliebigen Hauptkrümmungslinie hat die Form

$$\Phi_{111} - \Omega_{111} = 2\Omega.$$

Auf der Evolute hat das Krümmungsmass längs der s-Linie einer abwickelbaren Normalfläche entgegengesetztes Vorzeichen gegen dem Produkt $\Phi\Omega$. Als Bedingung für Schnittlinien zwischen Evolute und Fokalebene findet man auf ähnliche Weise wie in den Kreispunkten erster Ordnung

$$\frac{d\eta'}{dy'} = \frac{3\{\Phi_{11}\Omega y'^4 + (\Phi_1\Phi_{11} - 3\Omega^2)y'^2 + \Phi_1\Omega\}}{(\Phi_1 + 3\Omega y'^2)^2},$$

woraus resultirt

$$y'^2 = \frac{3\Omega^2 - \Phi_1\Phi_{11} \pm \sqrt{(\Phi_1\Phi_{11} - \Omega^2)(\Phi_1\Phi_{11} - 9\Omega^2)}}{2\Phi_{11}\Omega}.$$

Dieser Ausdruck lehrt, dass, wenn Φ_1 und Φ_{11} verschiedenes Vorzeichen haben, für y'^2 immer ein positiver und ein negativer Werth erhalten wird, so dass immer zwei symmetrische Schnittlinien mit der Fokalebene existiren. Wenn alle drei Grössen dasselbe Vorzeichen haben sind bei $\Omega^2 \geqq \Phi_1\Phi_{11}$ vier bezw. zwei Schnittlinien vorhanden. Haben endlich Φ_1 und Φ_{11} dasselbe, Ω aber entgegengesetztes Vorzeichen so muss die Bedingung $\Phi_1\Phi_{11} \geq 9\Omega^2$ erfüllt sein, wenn Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene vorhanden sein sollen, und man findet dabei wieder vier bezw. zwei dieser Linien, welche immer paarweise symmetrisch zu den orthogonalen Haupttangenten verlaufen.

Von den mittels dieser Hülfsmittel erhaltenen Resultaten gebe ich hier eine kurzgefasste Zusammenstellung, in welcher ich zu meiner a. a. O. gegebenen Darstellung einige durch die Untersuchung der Kantlinien mittelst der Werthe Φ' gewonnene Details hinzugefügt habe.

Kreispunkte zweiter Ordnung mit zwei Symmetrieebenen.

1. *Einlaufende Krümmungslinien der einen Schaar und umkreisende der anderen.* $\Omega(\Phi_1 - \Omega) > 0$, $\Omega(\Phi_{11} - \Omega) > 0$. Zwei oder vier Krümmungslinien, jede zweite beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien umgeben. (Figg. 5 und 6.) Die Evolute bildet zwei geschlossene Trichter auf einer und derselben Seite der Fokalebene. Die eine Schale ist ohne Kanten, die andere hat zwei oder vier durch die Spitze hindurchgehende Kanten je nach der Zahl der vorhandenen Haupttangenten, wie es die Fig. 7 in zur Fokalebene parallelen Schnitten der Evolute andeutet. Doch kann bei Vorhandensein von nur zwei Haupttangenten die eine durch die Spitze hin-

durchgehende Kante in drei zerfallen, so dass vier anstatt zwei Kanten vorhanden sind. In Falle $\Phi_1 = \Phi_{11} = 3\Omega$ besteht eine Berührung höherer Ordnung mit dem Scheitelpunkte einer Umdrehungsfläche, wobei jede Tangente des Kreispunkts eine Haupttangente ist, und eine Vermehrung der Anzahl der Kanten auf der betreffenden Evolutenschale bezw. das Degeneriren dieser in eine Umdrehungsachse stattfindet.

Fig. 5.

Fig. 6.

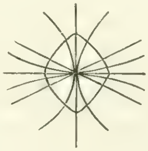
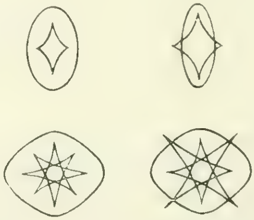


Fig. 7.



2. *Ausbiegende Krümmungslinien.* $\Omega(\Phi_1 - \Omega) < 0$, $\Omega(\Phi_{11} - \Omega) < 0$. Immer vier Haupttangenten, jede zweite einer anderen Schaar angehörend. Die Evolutenschalen bilden entweder zwei geschlossene Trichter, einen auf jeder Seite der Fokalebene, mit je zwei durch die Spitze hindurchgehenden Kanten und positiven Krümmungsmass der Flächen, oder es ist einer der Trichter theilweise durch die Fokalebene hindurch umgebogen, wobei entweder vier Schnittlinien mit der Fokalebene und zwei auf dem nicht umgebogenen Theil durch den Fokalpunkt hindurchgehende Kanten vorhanden sind, oder auch nur zwei Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene existiren, in welchem Falle die Kanten der fraglichen Evolutenschale verschwinden. Im sämmtlichen Typen kann eine Vermehrung der Anzahl der Kanten vorkommen, indem eine Kante in drei zerfallen kann.

3. *Eine durchgehende Krümmungslinie jeder Schaar.*

$$(\Phi_1 - \Omega)(\Phi_{11} - \Omega) < 0.$$

Zwei oder vier Haupttangenten. Im letzteren Falle gehören drei, welche innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$ verlaufen, einer und derselben Schaar an, wobei die mittlere beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet

ist (Fig. 8). Die eine Evolutenschale bildet einen geschlossenen Trichter mit einer durch den Fokalpunkt hindurchgehenden Kante. Die andere kann einen auf derselben Seite der Fokalebene gelegenen geschlossenen Trichter mit drei durch den Fokalpunkt hindurchgehenden Kanten bilden, wie es die Fig. 9 in zur Fokalebene parallelen Schnitten andeutet — bei A sind vier Haupttangenten vorhanden, bei B ist für eine Krümmungslinie $\Omega > 0$, $\Phi - 4\Omega > 0$. Bei erheblicher Zunahme dieser Differenz können auch die drei Kanten in der Fig. 9 B in eine nach aussen schauende zusammenfallen. In anderen Fällen ist die fragliche Evolutenschale theilweise durch die Fokalebene hindurch umgebogen, wobei entweder auf der-

Fig. 8.

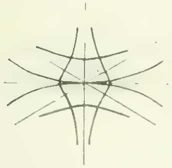


Fig. 9.

selben Seite wie die erste Schale vier Blätter bleiben, von denen zwei eine gemeinsame durch den Fokalpunkt hindurchgehende Kante haben, vier Schnittlinien mit der Fokalebene vorhanden sind, und auf dem umgebogenen Theile zwei Kanten durch den Fokalpunkt gehen, oder aber auf der ursprünglichen Seite der Fokalebene nur zwei Blätter mit einer gemeinsamen durch den Fokalpunkt hindurchgehenden Kante bleiben, nur zwei Schnittlinien mit der Fokalebene vorhanden sind, und keine Kante auf den umgebogenen Theilen verläuft. Der in diese Categorie gehörige Specialfall $\Omega = 0$ bietet eine Evolutenschale auf jeder Seite der Evolute dar mit je einer Kante, deren Tangente in der Fokalebene belegen ist und diejenige der anderen Schale rechtwinkelig schneidet.

4. *Kreispunkte, welche längs einer oder zwei Krümmungslinien von höherer Ordnung als der zweiten sind.* $(\Phi_1 - \Omega)(\Phi_{11} - \Omega) = 0$ oder $\Omega = 0$

bei $\Phi_1 \Phi_{11} > 0$. Diese Fälle, welche man durch Untersuchung des Zusammenfallens von zwei oder mehreren Kreispunkten erster und zweiter Ordnung kennen lernt, bieten verschiedene Combinationen der erwähnten Typen dar.

3. *Kreispunkte höherer Ordnung.*

Aus der Beziehung

$$d^n D\, ds^2 = d^{n+2} z - d^{n+2} z_1$$

erhellt es, da

$$d^{n+2} z - d^{n+2} z_1$$

nur Differentialquotienten der Flächengleichung von der Ordnung $n + 2$ enthält, dass sämmtliche Glieder und folglich auch sämmtliche Wurzeln der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ frei gewählt werden können. Es können also sämmtliche Wurzeln reell sein. Dabei muss aber in jedem Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y} = 0$, in welchem die Gleichung die Form

$$0 = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^{n+2}} + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \left(\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^n \partial y^2} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^n \partial y^2} \right) \operatorname{tg}^2 \vartheta + \dots$$

hat, wegen der Bedeutung der Coefficienten, $\frac{d^n D_s}{ds^n} \cdot \frac{d^n D_t}{ds^n} < 0$ sein. Da nun wenigstens eine Linie $\frac{d}{d\vartheta} \frac{d^n D}{ds^n} = 0$ d. h. eine Hauptkrümmungslinie immer zwischen zwei Linien $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ belegen sein muss, so findet man, dass unabhängig von der Ordnungszahl des Kreispunkts immer ein Typus existirt mit $n + 2$ Hauptkrümmungslinien, von welchen jede zweite einer anderen Schaar angehört, mit allseitig ausbiegendem Krümmungslinientypus und positivem Krümmungsmass der Evolute längs den s-Linien der abwickelbaren Normalflächen, und in welchem die Evolute zwei geschlossene sich gegenseitig mit den Spitzen im Fokalpunkt berührende Trichter mit $n + 2$ Kanten bilden, einen auf jeder Seite der Fokalebene.

In den Kreispunkten ungerader Ordnung ist die Zahl der Glieder in den Gleichungen $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ und $\frac{d}{d\vartheta} \frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eine gerade, und jedes Glied

mit gerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ enthält zwei Glieder mit ungerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$, das letzte ausgenommen, welches nur das vorletzte Glied dieser Gleichung enthält. Auf dieselbe Weise enthält jedes Glied ungerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$, das erste ausgenommen, zwei Glieder der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$, und zwar in der Weise, dass sämmtliche Coefficienten und folglich auch sämmtliche Wurzeln der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ frei gewählt werden können, wobei auch sämmtliche Glieder der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eindeutig bestimmt werden. Man kan also erstere Gleichung so wählen, dass nur eine reelle Wurzel existirt. Es resultirt für alle Kreispunkte ungerader Ordung ein Typus mit nur einer Krümmungslinie, umbiegendem Krümmungslinientypus und einer Evolute, welche aus zwei die Fokalebene schneidenden Schalen mit wenigstens je einer im Fokalpunkte endigenden Kante besteht.

In den Kreispunkten gerader Ordnung ist die Anzahl der Glieder in den Gleichungen $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ und $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eine ungerade, woraus folgt, dass in letzterer Gleichung wohl alle Glieder gerader Ordnungszahl, nicht aber alle Glieder ungerader Ordnungszahl frei gewählt werden können, sowie dass die Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ nicht durch die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eindeutig bestimmt ist. Wenn aber sämmtliche Glieder gerader Ordnungszahl in der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ gleich Null sind, so sind auch sämmtliche Glieder ungerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ Null, und die übrigen Glieder können frei gewählt werden. Setzt man alle diese Glieder mit Ausnahme der zweiten und der vorletzten gleich Null, so nimmt diese Gleichung die Form

$$\left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds_1^n} - \frac{d^n D_s}{ds_1^n}\right)\cos^{n+1}\vartheta\sin\vartheta - \left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds_{11}^n} - \frac{d^n D_s}{ds_{11}^n}\right)\cos\vartheta\sin^{n+1}\vartheta = 0$$

an, wobei mit s_1 bezw. s_{11} die mit der X- bezw. Y-Achse zusammenfallende Krümmungslinie bezeichnet wird. Da nun die betreffenden Glieder der Gleichung $\frac{d^n D_s}{ds^n} = 0$ erst dann bestimmt werden, wenn noch eine Be-

ziehung zwischen den vier in obiger Gleichung enthaltenen Grössen eingeführt wird, so kann man, wenn mit k eine beliebige Zahl gemeint wird, eine der Bedingungen

$$\frac{d^n D_s}{ds_1^n} - \frac{d^n D_t}{ds_1^n} = \pm k^2 \left(\frac{d^n D_s}{ds_{11}^n} - \frac{d^n D_t}{ds_{11}^n} \right)$$

benutzen, woraus dann erhellt, dass bei Kreispunkten gerader Ordnung immer sowohl ein Typus mit zwei einlaufenden Krümmungslinien der einen Schaar und umkreisenden der anderen wie ein Typus mit einer durchgehenden Krümmungslinie jeder Schaar vorkommt.

Wie man ersieht, kehren in den Kreispunkten höherer Ordnung die in den Kreispunkten erster und zweiter Ordnung vorkommenden Haupttypen wieder. Es lässt sich aber erwarten, dass die Zwischenformen mit steigender Ordnungszahl der Kreispunkte immer complicirter werden.

4. *Linien sphärischer Krümmung.*

Von diesen giebt es zwei Hauptformen: solche mit variirender und solche mit constanter sphärischer Krümmung. Erstere Form besteht aus einer unendlichen Reihe von Kreispunkten erster Ordnung mit einer durchgehenden Krümmungslinie und zwei orthogonalen. Die Krümmungslinien jeder Schaar schneiden also, unter sich orthogonal, die Linie sphärischer Krümmung unter endlichen Winkeln, biegen aber in den Schnittpunkten rechtwinkelig um. Die Schnittlinie der Fläche

$$z = \frac{1}{2a} \left(x^2 + \frac{a^2 y^2}{x^2 + a^2} \right)$$

mit der XZ-Ebene giebt ein Beispiel für eine solche Linie ab.

Linien constanter sphärischer Krümmung kommen auf Umdrehungsflächen vor, und sind von Kreispunkten zusammengesetzt, welche längs dem Meridiane von gerader oder ungerader Ordnung sind, je nachdem die Evolute dieser Linie im betreffenden Krümmungsmittelpunkt eine Spitze hat oder nicht. In ersten Falle gehören die Meridiane auf beiden Seiten der Linie sphärischer Krümmung derselben Schaar an, im letzteren biegen die Krümmungslinien beiderseits rechtwinkelig in die Linie sphärischer Krümmung um, und die Meridiane auf der einen Seite gehören derselben Schaar an wie die Parallelkreise auf der anderen, wobei die Umdrehungsachse aus Theilen beider Evolutenschalen entstanden ist.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE

(cinquième note)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

J'ai consacré le § 2 de ma quatrième note [1] à une étude approfondie d'une généralisation de l'intégrale LAPLACE-ABEL dont les conséquences ont

[1] Après la publication de la quatrième note ont paru les travaux suivants qui se rapportent au mémoire présent:

ÉDOUARD A. FOUËT. *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* Paris 1902. Prem. partie. Chap. V.

ALFRED PRINGSHEIM. *Jacques Hadamard. La série de Taylor et son prolongement analytique.* Archiv. der Math. u. Physik. III Reihe, Bd. 3, 1902, pag. 289, 290, 294, 295.

ERNST LINDELÖF. *Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor.* Comptes Rendus, etc. T. 135, 29 décembre 1902, pag. 1315—1318.

FRANC G. RADELFINGER. *Analytical representation of complex functions.* Phil. Soc. of Washington. Bull. Vol. 14. 1902, pp. 227—232.

FRANC G. RADELFINGER. Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 8, 1901—1902, pp. 15, 16.

F. R. MOUTTON. Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 9, pp. 98, 99.

LUCIUS HANNI. *Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Lefflers n-fach unendliche Reihe.* Monatshefte für Math. und Physik. Jahrg. 14, 1903, pag. 105—124.

SALVATORE PINCHERLE. *Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione.* Rend. R. Accad. delle scienze dell' Ist. di Bologna. 8 marzo 1903, pag. 4.

GEORG FABER. *Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorschen Reihen.* Math. Annalen. Bd. 57. H. 3, 1903, pag. 385.

GEORG FABER. *Über polynomische Entwickelungen.* Math. Annalen. Bd. 57. H. 3, 1903, pag. 406—408.

ERNST LINDELÖF. *Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytiques des séries de Taylor.* Journ. de math. pures et appl. Sér. 5. T. 9, 1903, pag. 213—221.

été résumés dans le théorème 7 b. J'arriverai dans la note présente par une seconde voie à une nouvelle généralisation qui amène à un résultat

J. Malmquist. *Sur le calcul des intégrales d'un système d'équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz.* Arkiv för Mat. Astr. och Fysik. Stockholm. Bd. 1. 13 maj 1903, pag. 149—156.

Helge von Koch. *Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendentes.* Arkiv för Mat. Astr. och Fysik. Stockholm. Bd. 1. 9 sept. 1903, pag. 205—208.

Georg Faber. *Über Reihenentwickelungen analytischer Functionen.* Inaug. Diss. München 1903, pag. 65—66.

Ernst Lindelöf. *Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor.* Bull des. sciences math. Sér. 2. T. 27, août 1903, pag. 224, 225.

Leopold Fejer. *Untersuchung über Fourier'sche Reihen.* Math. Annalen. Bd. 58, pag. 51.

S. Pincherle. *Sulla Sviluppabilità di una funzioni in serie de fettoriali.* R. Ac. d. Lincei. Vol. 12. 2 sem. Serie 5, 8 nov. 1903.

S. Pincherle. *Sulle funzioni meromorfe.* R. Ac. d. Lincei. Vol. 12. 2 sem. Serie 5, 22 nov. 1903.

E. Phragmén. *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions.* Ce journal. T. 28, pag. 351—368.

Émile Picard. *Sur certains développements en séries déduits de la méthode de Cauchy dans la théorie des équations différentielles ordinaires.* An. École Norm. T. 21. An. 1902, pag. 141—151.

Sous presse:

L. Hanni. *Über die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Function durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode des Mittelwerte des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf.* Acta Math. Ce Tôme.

A. Wiman. *Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Functionen $E_a(x)$.* Acta Math. Ce Tôme.

A. Wiman. *Über die Nullstellen der Functionen $E_a(x)$.* Ce Tôme.

J. Malmquist. *Étude d'une fonction entière.* Acta Math. Ce Tôme.

Voir encore mes articles:

Sur l'intégrale de Laplace-Abel. Comptes Rendus etc. T. 135, 1 décembre 1902, pag. 937—939.

Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel. Comptes Rendus etc. T. 136, 2 mars 1903, pag. 537—539.

Sur la nouvelle fonction $E_a(x)$. Comptes Rendus etc. T. 137, 12 octobre 1903, pag. 554—558.

Sopra la funzione $E_a(x)$. R. Accad. dei Lincei. Atti. Ser. 5. Vol. 13, 3 gennaio 1904, pag. 3—5.

final de la même portée que l'autre, ayant de plus l'avantage d'être d'une très grande simplicité et de mettre mon problème sous un jour nouveau.

Rappelons d'abord la définition de l'intégrale Laplace-Abel. Soit $k_0, k_1, k_2, \ldots$ une suite de constantes assujetties à la condition que la limite supérieure des valeurs limites des nombres $|\sqrt[\nu]{k_\nu}|$ soit finie.[1] On sait que l'inverse de cette limite supérieure, soit r, est le rayon de convergence de la série.

J'exprimerai avec M. Pringsheim[2] cette propriété des constantes k_0, $k_1, k_2, \ldots$ par la formule

$$\text{(1)} \qquad \lim_{\nu=\infty} |\sqrt[\nu]{k_\nu}| = \frac{1}{r}$$

et je désignerai par $F(x)$ la fonction analytique qui est définie par les constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$.

On sait que

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\underline{|\nu}}} = 0.$$

La série

$$\text{(2)} \qquad \overline{F}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} x^\nu$$

est donc une série toujours convergente. C'est alors l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega} \overline{F}(\omega x) d\omega$$

où l'intégrale est prise par rapport aux valeurs positives de ω qui est la célèbre intégrale Laplace-Abel.

Monsieur Borel dans une série de travaux[3] d'une très grande im-

Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques. Comptes Rendus etc. T. 138, 11 avril 1904, pag. 881—884.

Une nouvelle fonction entière. Comptes Rendus etc. T. 138, 18 avril 1904, pag. 941, 942.

[1] c. f. première note, pag. 43, note 12.

[2] Alfred Pringsheim. *Zur Theorie des Doppel-Integrals.* Sitzb. d. math. phys. Cl. d. K. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 28. 1898, H. 1, pag. 62.

[3] Voir surtout:

Émile Borel. *Mémoire sur les séries divergentes.* Annales de l'École normale. Sér. 3. T. 16. Année 1899.

Émile Borel. *Leçons sur les series divergentes.* Paris, Gauthier-Villars, 1901.

portance est arrivé le premier à fixer le domaine de x pour lequel l'intégrale converge.

Ce domaine est une étoile de centre zéro inscrite dans l'étoile principale définie par les constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ et circonscrite au cercle de convergence de la série $k_0 + k_1x + k_2x^2 + \ldots$.[1] Je désignerai dans la présente note cette étoile par la lettre $B^{(1)}$. L'étoile s'obtient de la manière suivante. On limite chacun des vecteurs l issu du centre à une longueur ρ qui est la limite supérieure d'une autre longueur d, limitant l elle-même, et telle que le cercle ayant d comme diamètre fasse partie de l'étoile principale A.

M. Borel avait démontré la convergence de l'intégrale Laplace-Abel pour l'intérieur de $B^{(1)}$. M. Phragmén[2] est arrivé à montrer que l'intégrale Laplace-Abel ne peut pas converger en dehors de $B^{(1)}$. L'étoile $B^{(1)}$ est donc quant à la variable x une véritable étoile de convergence pour l'intégrale Laplace-Abel, de même que le cercle C de centre zéro et de rayon r est un cercle de convergence de la série $k_0 + k_1x + k_2x^2 + \ldots$. L'égalité

$$FB^{(1)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega}\overline{F}(\omega x)d\omega \tag{3}$$

a lieu pour un domaine quelconque à l'intérieur de $B^{(1)}$ de même que l'égalité de Taylor

$$FC(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu \tag{4}$$

a lieu pour chaque domaine à l'intérieur de C.

Voyons maintenant une manière fort simple de généraliser l'intégrale Laplace-Abel qui permet d'obtenir une étoile de convergence plus étendue que $B^{(1)}$ s'approchant indéfiniment avec la variation d'un certain paramètre

[1] voir pour la définition de »l'étoile», »l'étoile principale», »étoile inscrite» et »étoile circonscrite»: première note page 47, seconde note page 200, seconde note page 183. J'ai désigné auparavant l'étoile A comme étoile principale des constantes $k_0, \lfloor 1\, k_1, \lfloor 2\, k_2, \lfloor 3\, k_3, \ldots$.

[2] E. Phragmén. *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$. Comptes Rendus. etc. 10 juin 1901.

de l'étoile principale A. Introduisons au lieu de »la fonction génératrice» d'ABEL $\overline{F}(x)$ une nouvelle fonction génératrice un peu plus générale définie par l'égalité

(5) $$F_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor a\nu} x^\nu$$

où

(6) $$\lfloor \alpha\nu = \Gamma(\alpha\nu + 1)$$

et où α désigne une quantite positive donnée. On a

(7) $$F_1(x) = \overline{F}(x),$$

et on voit que $F_a(x)$ est une série toujours convergente de même que $\overline{F}(x)$.

J'introduirai donc au lieu de l'intégrale LAPLACE-ABEL:

$$\int_0^\infty e^{-\omega} F_1(\omega x) d\omega$$

l'intégrale nouvelle plus générale

(8) $$f(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{a}} = \int_0^\infty e^{-\omega} F_a(\omega^a x) d\omega$$

et je démontrerai le théorème suivant:

»L'intégrale $f(x)$ possède par rapport à x une étoile de convergence $B^{(a)}$ qui est inscrite dans l'étoile A et qui tend indéfiniment vers cette étoile en même temps que α tend vers zéro. L'égalité

$$FB^{(a)}(x) = f(x)$$

a lieu partout à l'intérieur de $B^{(a)}$.»

La démonstration de ce théorème sera partagée en trois parties différentes.

1° »L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente l'intégrale $f(x)$ est uniformément convergente pour le domaine $\theta x_0 (\theta_0 \leq \theta \leq 1)$, où θ_0 désigne une quantité positive.»

2° »L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente l'intégrale $f(x)$ représente sur le vecteur $(0 x_0)$ la fonction $FC(x)$ ainsi que sa continuation analytique le long de ce vecteur.

Faisons parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur de l'étoile A pour lesquels le domaine [1]

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1\,; \quad \begin{matrix} -\alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} & (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ -\pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi & (\text{si } \alpha \geqq 2) \end{matrix}$$

est situé à l'intérieur de A et appelons $B^{(\alpha)}$ l'étoile obtenue de cette manière. L'intégrale $f(x)$ n'est jamais convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$.»

3° L'intégrale $f(x)$ converge d'une manière uniforme pour tout domaine à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.»

Les deux propositions 1 et 2 seront démontrées dans le § 1. Quant à la proposition 3 elle demande pour être démontrée l'intervention d'une nouvelle transcendente qu'on obtient en simplifiant $F_\alpha(x)$ en faisant

$$k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = k_\nu = \ldots = 1$$

et que je désignerai par

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}. \tag{9}$$

Des propriétés différentes de cette transcendente seront développées dans les §§ 2 et 3. La démonstration complète de la proposition 3 sera donnée dans le § 4.

Dans le cas $\alpha = 1$ l'intégrale Laplace-Abel

$$\int_0^\infty e^{-\omega} F_1(\omega x)\, d\omega$$

pouvait être transformée dans l'expression de M. Borel:

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_n x^n) \frac{\omega^{n+1}}{\underline{|n+1}}$$

qui a le même domaine de convergence $B^{(1)}$ que l'intégrale. J'obtiendrai dans le § 4 pour α quelconque une nouvelle expression ayant la même forme que celle de M. Borel. J'obtiendrai de même deux nouvelles expression d'une forme interessante. Dans le § 5, où je laisse tomber la condition que l'étoile de l'expression doit être une étoile de convergence j'obtiendrai encore des nouvelles expressions.

[1] Je désigne par $R(z)$ la partie réelle de z et par $Arg(z)$ l'argument de z.

§ 1.

Je commence par établir le théorème suivant.

A. »Si on admet que l'intégrale

$$f(x_0) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est convergente, l'intégrale

$$f(\theta x_0) = \int_0^{r} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega \theta x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est nécessairement uniformément convergente pour le domaine $\theta x_0 (\theta_0 \leq \theta \leq 1)$ où θ_0 désigne une quantité positive.»

On voit l'analogie complète avec le célèbre théorème d'ABEL pour la série de puissances.[1] La démonstration est absolument la même que celle que M. PHRAGMÉN a donnée pour le cas $\alpha = 1$.[2]

Posons

$$F_\alpha(\omega x_0) = \varphi(\omega) + i\psi(\omega)$$

$\varphi(\omega)$ et $\psi(\omega)$ étant réels. Les deux intégrales

$$\int_0^{r} \varphi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \int_0^{r} \psi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

[1] *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$ Théorème 4. Oeuvres. Nouvelle éd. T. 1, pag. 223

[2] E. PHRAGMÉN. *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^{\infty} F(ax) e^{-a} da$. Comptes Rendus etc. 10 juin 1901.

convergent, et il s'agit de démontrer, que les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}d\omega^{\frac{1}{a}}, \qquad \int_0^\infty \psi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}d\omega^{\frac{1}{a}}$$

convergent de même d'une manière uniforme pour le domaine $\theta_0 \leq \theta \leq 1$, θ_0 étant positif. Considérons par exemple la première. On a:

$$\int_{\omega_1^{\frac{1}{a}}}^{\omega_2^{\frac{1}{a}}} \varphi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}d\omega^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}}\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{a}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{a}}} \varphi(\omega)e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{a}}}d\omega^{\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}}\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{a}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}}-1\right)}\varphi(\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Appliquons maintenant le second théorème de la moyenne pour les intégrales définies et nous aurons:

$$\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{a}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}}-1\right)}\varphi(\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}d\omega^{\frac{1}{a}} = e^{-\omega_1^{\frac{1}{a}}\left(1-\theta^{\frac{1}{a}}\right)}\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{a}}}^{(\theta\varpi)^{\frac{1}{a}}} \varphi(\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}d\omega^{\frac{1}{a}}$$

ϖ désignant une certaine valeur entre ω_1 et ω_2. Il s'ensuit immédiatement que l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}d\omega^{\frac{1}{a}}$ converge uniformément pour $\theta_0 \leq \theta \leq 1$, θ_0 étant positif.

Le théorème $\boldsymbol{A}$ est par conséquent démontré.

Quant à la fonction $F_a(\omega x_0)$ la seule condition à laquelle elle soit assujetie dans le théorème est, on le voit, que l'expression

$$e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}F_a(\omega x)d\omega^{\frac{1}{a}}$$

soit intégrable. L'importance de cette remarque qui a été déjà faite par M. Phragmén sera mise en évidence dans une autre occasion.

L'intégrale $f(\theta x_0)$ peut être transformée de la manière suivante

$$(10) \qquad f(\theta x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega\theta x_0) d\omega^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} \int_0^x e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Posons encore:

$$(11) \qquad \Phi_a(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente la limite supérieure de l'intégrale $\Phi_a(\omega)$ reste évidemment finie.

On a:

$$(12) \qquad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}} - 1\right)} \frac{d\Phi_a(\omega)}{d\omega^{\frac{1}{a}}} d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

On obtient par conséquent en faisant l'intégration par partie:

$$(13) \qquad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} \left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} - 1 \right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}} - 1\right)} \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Le second membre de cette égalité converge évidemment pour

$$R\left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}}\right) > 1$$

θ étant ou réel ou complexe, c'est à dire il converge pour

$$R\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{a}}\right) > 1.$$

Par conséquent:

B. »L'intégrale

$$f(x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

étant convergente, la transformée de l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

à savoir l'intégrale:

$$(14) \qquad \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)} \Phi_\alpha(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

où

$$\Phi_\alpha(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est convergente tant que

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1 \text{.»}$$

L'intégrale

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)} \Phi_\alpha(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

représente évidemment pour chaque domaine

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1\,; \qquad \begin{array}{ll} 2k\pi - \alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + \alpha\frac{\pi}{2} & (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ 2k\pi - \pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + \pi & (\text{si } \alpha > 2) \end{array}$$

$$k = -\infty \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

une branche fonctionnelle. Cette branche est en général pour chaque domaine différent la branche d'une fonction différente. La seule considération intéressante pour l'instant est celle du domaine qui correspond à $k = 0$. Ce domaine embrasse le vecteur $(0 x_0)$, et l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega \theta x_0) d\omega^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} \left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} - 1 \right) \int_0^x e^{-\omega^{\frac{1}{a}} \left(\theta^{-\frac{1}{a}} - 1\right)} \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

a lieu pour les valeurs positives de θ, $\theta_0 \leqq \theta \leqq 1$. Par conséquent:

C. »L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

étant convergente, l'intégrale

$$\int_0^x e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

représente sur le vecteur $(\theta_0 x_0, x_0)$, où θ_0 est une quantité positive si petite qu'elle soit, une fonction analytique de x.»

Les théorèmes ***B*** et ***C*** sont encore valables comme l'était auparavant le théorème ***A*** quand la seule condition à laquelle soit assujettie la fonction $F_a(\omega x)$ est que l'expression $e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$ sera intégrable.

Dans notre cas où la fonction $F_a(x)$ est définie par l'égalité (5) nous montrerons que la fonction analytique qui est représentée le long du vecteur $(0 x_0)$ par l'intégrale

$$\int_0^x e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

est identique à la fonction $FC(x)$ et à la continuation analytique de $FC(x)$ le long du même vecteur.

En realité on sait que

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-\omega}\omega^{\alpha\nu}d\omega = \Gamma(\alpha\nu + 1) = \underline{|\alpha\nu}.$$

A cause de la supposition exprimée par la formule (1) on peut toujours en déterminant un nombre positif ε aussi petit que l'on voudra trouver un entier positif n tel que l'on ait

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} |k_\nu| \cdot |x|^\nu < \frac{\varepsilon}{2}$$

pourvu que

$$|x| \leqq r' < r.$$

Pour ce domaine de x, en désignant par ω' et ω'' deux quantités positives telles que $\omega' < \omega''$ on aura donc

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{|k_\nu|}{\underline{|\alpha\nu}} \int_{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} |x|^\nu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part pour ce même domaine de x en choisissant ω' suffisamment grand on aura

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|k_\nu|}{\underline{|\alpha\nu}} \int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} |x|^\nu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, en prenant ε et r' arbitrairement on peut toujours trouver un nombre positiv ω' suffisamment grand pour que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|k_\nu|}{\underline{|\alpha\nu}} \int_{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} |x|^\nu < \varepsilon \tag{16}$$

pourvu que

$$|x| \leqq r' < r.$$

La série de puissances

(5) $$F_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor \alpha\nu} x^\nu$$

est toujours convergente. Il en est donc de même de la série:

$$e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu} x^\nu$$

considérée par rapport à $\omega^{\frac{1}{\alpha}}$. On obtient donc $\int e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ en intégrant chaque terme separément et on a le droit d'écrire

(17) $$\int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor \alpha\nu} \int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu.$$

On a par suite en vertu de (16)

(18) $$\left| \int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right| < \varepsilon$$

pourvu que

$$|x| \leqq r' < r.$$

L'intégrale

(9) $$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

regardée comme fonction de x est donc uniformément convergente dans chaque domaine

$$|x| \leqq r' < r.$$

On a maintenant en désignant par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ une suite de constantes positives croissant au delà de toute limite:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\omega_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= k_0 + \frac{k_1}{\lfloor \alpha.1} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x + \frac{k_2}{\lfloor \alpha.2} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^2 + \ldots$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| k_0 + \frac{k_1}{\lfloor \alpha.1} \int_{\omega_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x + \frac{k_2}{\lfloor \alpha.2} \int_{\omega_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^2 + \ldots \right|$$

égalité valable pour le domaine $|x| \leq r' < r$.

On a donc en vertu du théorème fondamental de WEIERSTRASS [1]

$$(19) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu x^\nu = FC(x)$$

égalité valable au moins pour chaque domaine à l'intérieur du cercle de convergence C de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu$.

La fonction analytique qui, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

[1] KARL WEIERSTRASS. *Zur Functionenlehre.* Werke. Bd. 2, pag. 205.

étant convergente, est représentée par l'intégrale

$$\int_0^x e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

le long du vecteur (ox_0) coincide donc pour les points $|x| < r$ sur ce vecteur avec $FC(x)$. Par conséquent:

D. »L'intégrale $\int_0^x e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ étant convergente l'intégrale $\int_0^x e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ représente sur le vecteur (ox_0) une branche fonctionnelle qui est identique à $FC(x)$ et à la continuation analytique de $FC(x)$ le long de vecteur.»

Soit maintenant $B^{(\alpha)}$ une étoile définie comme à la page 106. L'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ ne peut pas être convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$. On a en effet en admettant qu'elle soit convergente et en posant

$$\Phi_\alpha(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \tag{11}$$

l'égalité:

$$\int_0^x e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)} \Phi_\alpha(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Le premier et le second membre représentent tous les deux la même fonction analytique sur le vecteur (ox_0). Le second membre nous montre que cette fonction est régulière partout dans le domaine

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1; \quad \begin{array}{l} -\alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} \quad (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ -\pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi \quad (\text{si } \alpha \geq 2). \end{array}$$

On voit donc en vertu du théorème $\boldsymbol{D}$ et de la définition de $B^{(\alpha)}$ que le point x_0 ne peut pas être situé en dehors de $B^{(\alpha)}$.

Par conséquent:

$\boldsymbol{E}$. »Faisons parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur de l'étoile principale A définie par les constantes $k_0, k_1, \ldots, k_\mu, \ldots$ pour lesquelles le domaine

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1; \quad \begin{array}{l} -\alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} \quad (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ -\pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi \quad (\text{si } \alpha \geqq 1) \end{array}$$

est situé à l'intérieur de A et désignons par $B^{(\alpha)}$ l'étoile qui est obtenue de cette manière.

L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

ne peut jamais être convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$.»[1]

Il reste maintenant à voir si l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ qui ne peut pas être convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$ converge partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$. C'est seulement si cette circonstance a lieu et si la convergence est uniforme pour tout domaine à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ que $B^{(\alpha)}$ est en realité une étoile de convergence à notre intégrale.

On ne voit pas au premier abord la possibilité d'étendre au cas général où α est quelconque la démonstration que j'ai employée dans la note 4, § 2, pour le cas $\alpha = 1$. Il faut donc chercher une autre voie.

Je simplifierai d'abord le problème en introduisant au lieu de $F(x)$ la fonction élémentaire $\frac{1}{1-x}$.

Je démontrerai ensuite qu'on peut ramener le cas général à ce cas.

[1] En parcourant de nouveau ma note 4 j'ai remarqué une omission dans la démonstration page 378. J'y suppose tacitement $\frac{1}{x_0 - a}$ réel et je ne mentionne pas le cas général qui se ramène du reste immédiatement au cas réel.

MM. Phragmén et Borel [1] de leur côté ont démontré que si l'on sait développer $\frac{1}{1-x}$ en une série dont les termes différents sont des fonctions rationnelles de x, on obtient immédiatement le développement de $F(x)$ en une pareille série. Lorsqu'ils ont publié leurs résultats ils n'ont pas remarqué que j'avais démontré ce même théorème il y a déjà plus de vingt et un ans.[2]

[1] Émile Borel. *Addition au mémoire sur les séries divergentes.* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. T. 16. Année 1899, pag. 132—134.

E. Phragmén. *Sur une extension d'un théorème de Mittag-Leffler.* Comptes Rendus 12 juin 1899.

[2] *Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd af första slaget.* Öfversigt af K. Vet. Ak. Förhandl. 8 febr. 1882.

J'y ai démontré (pag. 25, 26) la formule

$$F(x) = B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \ldots + B_n k_n x^n$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(z)\left| \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z}\left(B_0 + B_1\frac{x}{z} + \ldots + B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right| dz$$

où $B_0, B_1, \ldots, B_n$ sont des constantes par rapport à z mais non par rapport à x, et où S est un contour limitant une surface simplement connexe pour laquelle $F(z)$ est régulière. J'ai même donné la formule sous la forme plus générale

$$F(x) = B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \ldots + B_n k_n x^n + \sum_{\nu=0}^{m}\left[G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m-1} B_\mu A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu \right]$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(z)\left| \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z}\left(B_0 + B_1\frac{x}{z} + \ldots + B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right| dz$$

où la fonction, uniforme pour la surface limitée par S et régulière sur le contour S lui-même, possède un nombre limité de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_m$ à l'intérieur de S; et où $G_1(z), \ldots G_m(z)$ sont des fonctions entières définies par l'égalité

$$F(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x-a_\nu)$$

qui a lieu dans le voisinage de a_ν, l'égalité

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu$$

Si dans ce mémoire je n'ai pas eu recours auparavant à la méthode qui consiste à ramener l'étude de $F(x)$ à celle de $\frac{1}{1-x}$ c'est pour les deux raisons suivantes.

Mes développements seraient dans les deux cas devenus au fond absolument les mêmes et j'aurais obtenu par conséquent une simplification plutôt formelle que réelle.[1]

En second lieu — et c'est la raison qui m'a déterminé pour mes trois premières notes — j'ai voulu arriver au but par des considérations directes et purement élémentaires, et par conséquent sans avoir recours à l'intégrale de Cauchy. Mais la méthode qui consiste à ramener le développement de $F(x)$ au développement de $\frac{1}{1-x}$ présuppose essentiellement le passage par l'intégrale de Cauchy. Or dans cette note le cas n'est plus le même et la simplification à laquelle on arrive en étudiant d'abord

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

devient d'une importance capitale.

ayant lieu dans le voisinage de $x = 0$. Ma formule montre immédiatement qu'en ayant

$$\frac{1}{z-x} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{z}\left(B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \ldots + B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)$$

à l'intérieur d'une figure génératrice (c. f. troisième note, page 219) passant par les points 0, x et enveloppant la ligne $(0x)$ l'égalité

$$F(x) = \lim_{n=\infty} (B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \ldots + B_n k_n x^n)$$

a lieu pour une étoile E qu'on obtient en construisant autour de chaque vecteur issu de l'origine la plus grande des figures génératrices qui n'embrasse aucun point singulier de $F(x)$ et en adjugeant à E la partie du vecteur entre l'origine et x.

C'est justement le même théorème qui à été démontré par MM. Borel et Phragmén.

[1] Les auteurs qui ont parlé de la simplification de ma première démonstration à laquelle d'autres auteurs seraient arrivés après moi (voir p. ex. Pringsheim, Jacques Hadamard. *La série de Taylor et son prolongement analytique.* Archiv d. Math. und Physik. 3 Reihe. Bd. 3, pag. 289) ne paraissent pas avoir saisi le fond de ma pensée.

§ 2.

En faisant

$$(20) \qquad F(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

on obtient pour $F_\alpha(x)$ la série:

$$(9) \qquad E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\alpha\nu}.$$

Dans le paragraphe actuel j'aborderai l'étude de la fonction $E_\alpha(x)$ à l'aide de la formule sommatoire de MACLAURIN éclaircie par les méthodes d'ABEL et de CAUCHY.[1]

J'imposerai encore au nombre positif α la restriction suivante:

$$(21) \qquad 2 \geq \alpha > 0.$$

Désignons par ε une quantité positive plus petite que un et par n un nombre entier positif. Soit R un rectangle dont deux côtés situés à la distance n de part et d'autre de l'axe réel sont parallèles à cet axe et dont les deux autres perpendiculaires à cet axe passent l'un par le point $-\varepsilon$ et l'autre par le point $n + 1 - \varepsilon$.

Nous aurons:

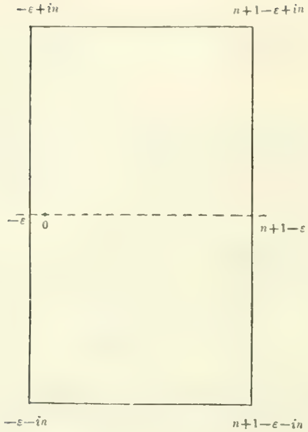
$$(22) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\alpha\nu} = \int_R \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^z}{\alpha z} dz.$$

[1] Voir par exemple:

JULIUS PETERSEN. *Vorlesungen über Functionstheorie.* Kopenhagen. Andr. Fr. Høst & søn 1898. Kapitel 8, §§ 78, 79.

HJ. MELLIN. *Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Functionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht.* Acta Soc. Sc. Fennicae. T. 31, nº 2.

ERNST LINDELÖF. *Quelques applications d'une formule sommatoire générale.* Acta Soc. Sc. Fennicae. T. 31, nº 3.



Faisons

$$(23)\qquad \int^{R} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|az}}dz = \int^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|az}}dz + \int^{R_2} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|az}}dz$$

où R_1 désigne la ligne $(n+1-\varepsilon\,,\ n+1-\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon)$ et R_2 la ligne $(-\varepsilon\,,\ -\varepsilon-in\,,\ n+1-\varepsilon-in\,,\ n+1-\varepsilon)$.

En introduisant:

$$(24)\qquad z = \tau + it,$$

$$(25)\qquad x = re^{i\varphi}$$

où τ, t, φ désignent des quantités réelles et où r est le module $|x|$, on trouve:

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \int^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|az}}dz &= i\int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}}r^{it}e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt \\ &\quad - \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|a(\tau+in)}}r^{in}e^{i\varphi\tau}d\tau \\ &\quad - i\int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}}r^{it}e^{-i\varphi\varepsilon}dt. \end{aligned}\right.$$

$$
(27)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\int\limits^{R_2}\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\,\frac{x^z}{\underline{|az}}\,dz-i\int\limits_0^{n}\frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}}\,r^{-it}e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt\\
&\qquad+\int\limits_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\frac{1}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|a(\tau-in)}}\,r^{-in}e^{i\varphi\tau}\,d\tau\\
&\qquad-i\int\limits_0^{n}\frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}}\,r^{-it}e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt.
\end{aligned}\right.
$$

Par conséquent:

$$
(28)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\int\limits^{R}\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\,\frac{x}{\underline{|az}}\,dz\\
&=i\int\limits_0^{n}\left[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}}\right]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt\\
&+\int\limits_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\left[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|a(\tau-in)}}-\frac{r^{in}}{e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|a(\tau+in)}}\right]e^{i\varphi\tau}\,d\tau\\
&-i\int\limits_0^{n}\left[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}}+\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}}\right]e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt.
\end{aligned}\right.
$$

Pour discuter la formule (28) il nous faut connaître le module de $\frac{1}{\underline{|z}}$. L'expression de WEIERSTRASS nous donne:[1]

[1] Voir par exemple: SCHLÖMILCH. *Compendium der höheren Analysis.* 2ter Band. 3 Aufl., pag. 248.

$$\frac{1}{\Gamma(\tau+it)}\frac{1}{\Gamma(\tau-it)} = e^{c(\tau+it)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau+it}{n}\right)e^{-\frac{\tau+it}{n}}\cdot e^{c(\tau-it)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau-it}{n}\right)e^{-\frac{\tau-it}{n}}$$

$$= e^{2c\tau}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2\tau}{n}+\frac{\tau^2+t^2}{n^2}\right)e^{-\frac{2\tau}{n}}$$

$$= \left[e^{c\tau}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau}{n}\right)e^{-\frac{\tau}{n}}\right]^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(\Gamma(\tau))^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right).$$

Par conséquent:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\frac{1}{\Gamma(\tau+it)}\right| < \frac{1}{\Gamma(\tau)}\sqrt{\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}}; \qquad \tau>0,\ +\infty>t>-\infty, \\ &\left|\frac{1}{\Gamma(-\varepsilon+it)}\right| < \frac{1}{|\Gamma(-\varepsilon)|}\sqrt{\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}}\sqrt{1+\frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}}; \qquad 0<\varepsilon<1. \end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant la première intégrale dans le second membre de la formule (28). En vertu de la première formule (29) et puisque le minimum des deux modules $|e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1|$ et $|e^{-2\pi i\varepsilon}-e^{-2\pi t}|$; $0\leqq t$ est une quantité h différente de zéro, on aura:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\int_0^{n}\left[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(\alpha(n+1-\varepsilon+it))}+\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(\alpha(n+1-\varepsilon-it))}\right]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt\right| \\ &\qquad \leqq \frac{r^{n+1-\varepsilon}}{\Gamma(\alpha(n+1-\varepsilon))}\frac{1}{h}\int_0^{\infty}\left(e^{-\varphi t}+e^{-(2\pi-\varphi)t}\right)\sqrt{\frac{e^{\alpha\pi t}-e^{-\alpha\pi t}}{2\alpha\pi t}}\,dt. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale du second membre est convergente si φ remplit la condition

$$(31)\qquad 2\pi-\alpha\frac{\pi}{2}\geqq\varphi\geqq\alpha\frac{\pi}{2}.$$

L'expression $\dfrac{r^{n+1-\varepsilon}}{\Gamma(\alpha(n+1-\varepsilon))}$ tend indéfiniment vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$. Le module de l'intégrale

$$\int_0^{n}\left[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(\alpha(n+1-\varepsilon+it))}+\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(\alpha(n+1-\varepsilon-it))}\right]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt$$

s'approche donc indéfiniment de zéro avec $\frac{1}{n}$, tant que φ remplit la condition (31).

Considérons maintenant la seconde intégrale du second membre de la formule (28). On a en vertu de la seconde des formules (29)

$$
(32)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\left[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau-in)}}-\frac{r^{in}}{e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau+in)}}\right]e^{i\varphi\tau}d\tau\right| \\
&<\frac{e^{-(2\pi-\varphi)n}+e^{-\varphi n}}{1-e^{-2\pi n}}\sqrt{1+\frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}}\sqrt{\frac{e^{\alpha\pi n}-e^{-\alpha\pi n}}{2\alpha\pi n}}\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}\frac{r^{\tau}}{\underline{|\alpha\tau}}dt
\end{aligned}
\right.
$$

l'intégrale $\displaystyle\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}\frac{r^{\tau}}{\underline{|\alpha\tau}}d\tau$ ayant une valeur finie. Le second membre de la formule (32) tendra indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$, tant que φ remplira la condition:

$$(33)\qquad 2\pi-\alpha\frac{\pi}{2}>\varphi>\alpha\frac{\pi}{2}.$$

Cette condition suppose essentiellement

$$(34)\qquad 2>\alpha>0.$$

En ajoutant à la condition (21) pour α cette nouvelle condition (34) et en supposant que φ remplit la condition (33) on voit donc que le module de chacune des deux premières intégrales du second membre de (27) tend indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

On obtient donc la formule fondamentale:

$$
(35)\qquad E_\alpha(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}}
$$

$$
=-i\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon-it)}}+\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon+it)}}\right]e^{-i\varphi\varepsilon}dt.
$$

On a:

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \int\limits_0^{\infty} \left[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\, \frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(\alpha(-\varepsilon-it))} + \frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\, \frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(\alpha(-\varepsilon+it))} \right] e^{-i\varphi\varepsilon}\, dt \right| \\ & < \frac{1}{h}\, \frac{r^{-\varepsilon}}{\Gamma(-\alpha\varepsilon)} \int\limits_0^{\infty} (e^{-(2\pi-\varphi)t} + e^{-\varphi t}) \sqrt{1 + \frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{\alpha\pi t}-e^{-\alpha\pi t}}{2\alpha\pi t}}\, dt. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale du second membre est convergente tant que φ remplit la condition (33). Les deux conditions (34) et (33) étant vérifiées l'intégrale du second membre de la formule (35) est par conséquent convergente. Mais la formule (36) nous donne encore un autre renseignement précieux. On a:

$$\operatorname*{Lim}_{r=\infty} \frac{r^{-\varepsilon}}{\Gamma(-\alpha\varepsilon)} = 0$$

tandis que l'intégrale:

$$\int\limits_0^{\infty} (e^{-(2\pi-\varphi)t} + e^{-\varphi t}) \sqrt{1 + \frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{\alpha\pi t}-e^{-\alpha\pi t}}{2\alpha\pi t}}\, dt$$

est indépendante de r.

Par conséquent le théorème suivant à lieu:

F. »Supposons

$$(34)\qquad 2 > \alpha > 0.$$

Le module de $E_\alpha(x)$ s'approche indéfiniment de zéro avec $\frac{1}{r}$ quand x tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle

$$(33)\qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.«$$

En faisant $\alpha = 1$ on obtient une propriété connue de la fonction exponentielle $E_1(x) = e^x$. Par ce théorème se trouve encore tranchée une question importante soulevée il y a quelques années par M. Borel.[1]

[1] Intermédiaire des mathématiciens. T. 6, n° 4, avril 1899.

»Peut-on trouver une fonction entière dont le module ne dépasse l'unité qu'à l'intérieur d'un angle aussi petit que l'on veut donné d'avance, ou si non, peut-on démontrer rigoureusement que cette question doit être résolue par la négative?

La question doit être résolue par l'affirmative et on obtient en $E_\alpha(x)$ la fonction désirée en donnant seulement à α une valeur suffisamment petite. Il n'est pas difficile de former encore d'autres fonctions que la fonction $E_\alpha(x)$ jouissant de cette même propriété.

Une pareille fonction est la suivante par exemple,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\underline{|\alpha_1\nu}\,\underline{|\alpha_2\nu}\ldots\underline{|\alpha_m\nu}}; \qquad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=\alpha.$$

La fonction

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{(\underline{|\alpha_1\nu})^{\beta_1}(\underline{|\alpha_2\nu})^{\beta_2}\ldots(\underline{|\alpha_m\nu})^{\beta_m}}; \qquad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_m\beta_m=\alpha$$

en est une autre.

Le raisonnement que nous avons employé pour $E_\alpha(x)$ nous fait voir de même que le module de chacune de ces fonctions tend indéfiniment vers zéro quand $|x|$ croît au delà de toute limite le long d'un vecteur situé dans l'angle

$$(33) \qquad 2\pi-\alpha\frac{\pi}{2}>\varphi>\alpha\frac{\pi}{2}.$$

Nous connaissons donc la croissance de $E_\alpha(x)$ dans cet angle. Abordons maintenant la question de la croissance de $E_\alpha(x)$ dans l'autre partie du plan, c'est à dire dans l'angle

$$(37) \qquad \alpha\frac{\pi}{2}\geqq\varphi\geqq-\alpha\frac{\pi}{2}.$$

Revenons à la formule (23) où nous ferons subir à l'intégrale $\int^{(\alpha)}$ une légère modification.

On a:

$$\frac{1}{e^{2\pi iz}-1} = -1 - \frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}. \tag{38}$$

Par conséquent,

$$\int^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}\,dz = -\int^{R_1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}\,dz - \int^{R_1}\frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}\,dz. \tag{39}$$

La fonction $\dfrac{x^z}{\underline{|\alpha z}}$ se comporte d'une manière régulière à l'intérieur du rectangle $(-\varepsilon\,,\ n+1-\varepsilon\,,\ n+1-\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon)$ et sur son contour.

Par suite

$$-\int^{R_1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}\,dz = \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\frac{x^\tau}{\underline{|\alpha\tau}}\,d\tau. \tag{40}$$

On a d'autre part:

$$\left\{\begin{aligned}
&-\int^{R_1}\frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}\,dz\\
&= -i\int_0^n \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(n+1-\varepsilon+it)}}\,r^{it}e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt\\
&\quad+\int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\frac{1}{e^{-2\pi i\tau+2\pi n}-1}\frac{r^\tau e^{-\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau+in)}}\,r^{in}e^{i\varphi\tau}\,d\tau\\
&\quad+i\int_0^n\frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon+it)}}\,r^{it}e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt.
\end{aligned}\right. \tag{41}$$

On a donc en vertu des formules (23), (39), (40), (41), (27)

$$
(42)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\int^{R} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\,\frac{x^{z}}{\Gamma(az)}\,dz \\
&= \int_{\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{x^{\tau}}{\Gamma(a\tau)}\,d\tau \\
&+ i\int_{0}^{n}\Bigg[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(a(n+1-\varepsilon-it))} \\
&\qquad\qquad - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(a(n+1-\varepsilon+it))}\Bigg]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt \\
&+ \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\Bigg[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\Gamma(a(\tau-in))} + \frac{r^{in}}{e^{-2\pi i\tau+2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\Gamma(a(\tau+in))}\Bigg]e^{i\varphi\tau}\,d\tau \\
&- i\int_{0}^{n}\Bigg[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(a(-\varepsilon-it))} - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(a(-\varepsilon+it))}\Bigg]e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt
\end{aligned}
\right.
$$

formule qui est un pendant à la formule (28).

L'intégrale:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\tau}}{\Gamma(a\tau)}\,d\tau$$

est convergente pour toutes les valeurs de r et de φ. On a pour la seconde intégrale du second membre

$$
(43)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\Bigg|\int_{0}^{n}\Bigg[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(a(n+1-\varepsilon-it))} \\
&\qquad\qquad - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(a(n+1-\varepsilon+it))}\Bigg]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt\Bigg| \\
&\leqq \frac{r^{n+1-\varepsilon}}{\Gamma(a(n+1-\varepsilon))}\,\frac{1}{h}\int_{0}^{\infty}\left(e^{-(2\pi-\varphi)t}+e^{-(2\pi+\varphi)t}\right)\sqrt{\frac{e^{a\pi t}-e^{-a\pi t}}{2a\pi t}}\,dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Le module de cette intégrale tend donc indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pourvu que φ remplisse la condition:

$$(44) \qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

Quant à la troisième intégrale du second membre de la formule (42) on a:

$$(45) \qquad \begin{aligned} &\left| \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \left(\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1} \frac{r^{\tau} e^{\varphi n}}{|\!\underline{\alpha(\tau-in)}} + \frac{r^{in}}{e^{-2\pi i\tau+2\pi n}-1} \frac{r^{\tau} e^{-\varphi n}}{|\!\underline{\alpha(\tau+in)}} \right) e^{i\varphi\tau} d\tau \right| \\ &< \left(e^{-(2\pi-\varphi)n} + e^{-(2\pi+\varphi)n}\right) \sqrt{1 + \frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{\alpha\pi n} - e^{-\alpha\pi n}}{2\alpha\pi n}} \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{r^{\tau}}{|\!\underline{\alpha\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

Le module de cette intégrale tend donc indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$ lorsque φ remplit la condition:

$$(46) \qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

On obtient par conséquent:

$$(47) \qquad \begin{aligned} E_\alpha(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{|\!\underline{\alpha\nu}} \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{|\!\underline{\alpha\tau}} d\tau + i\int_0^{\infty} \left(\frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{|\!\underline{\alpha(-\varepsilon+it)}} - \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{\varphi t}}{|\!\underline{\alpha(-\varepsilon-it)}} \right) e^{-i\varphi\varepsilon} dt \end{aligned}$$

formule qui doit être mise à côté de la formule (35) et où l'intégrale:

$$(48) \qquad \int_0^{\infty} \left(\frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{|\!\underline{\alpha(-\varepsilon+it)}} - \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{\varphi t}}{|\!\underline{\alpha(-\varepsilon-it)}} \right) e^{-i\varphi\varepsilon} dt$$

est convergente tant que la condition (46) est remplie. Le module de l'intégrale étant inférieur à $Kr^{-\varepsilon}$ où K est une constante indépendante de

r (c. f. la discussion concernant la formule (36)) tend indéfiniment vers zéro en même temps que r augmente au dela de toute limite le long d'un vecteur situé dans l'angle (46). Quant à la quantité positive α la condition (46) revient simplement à

$$4 > \alpha > 0 \tag{49}$$

et la convergence de l'intégrale (48) a lieu sous les deux conditions (49) et (46).

La formule (47) donne:

$$E_1(x) = e^x = e^{re^{i\varphi}} = \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{\underline{|\tau}} d\tau + \partial_r^{(1)}. \tag{50}$$

Dans cette formule l'argument φ de x est supposé remplir la condition

$$\frac{3\pi}{2} > \varphi > -\frac{3\pi}{2} \tag{51}$$

qui dérive de (46). Le module de $\partial_r^{(1)}$ diminue indéfiniment avec $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$ quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur situé dans l'angle (51).

On a:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{\underline{|\alpha\tau}} d\tau = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\underline{|\tau}} d\tau.$$

Par suite en vertu de (50) et en y introduisant $\alpha\varepsilon$ au lieu de ε et en désignant par $\partial_r^{(\alpha)}$ la transformée de $\partial_r^{(1)}$ par cette substitution:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{\underline{|\alpha\tau}} d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{i\varphi}{\alpha}}} - \frac{1}{\alpha} \partial_r^{(\alpha)},$$

égalité qui exige que la condition

$$\alpha\frac{3\pi}{2} > \varphi > -\alpha\frac{3\pi}{2} \tag{52}$$

soit remplie.

En retournant à la formule (47) on obtient par conséquent le théorème suivant:

G. »Supposons

$$(49) \qquad 4 > \alpha > 0.$$

Dans le cas où x est situé dans un angle intérieur à l'angle défini par les deux conditions:

$$(46) \qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(52) \qquad \alpha\frac{3\pi}{2} > \varphi > -\alpha\frac{3\pi}{2}$$

on a:

$$(53) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\varphi}{\alpha}}} + \varepsilon_r^{(\alpha)}$$

où le module de $\varepsilon_r^{(\alpha)}$ diminue indéfiniment en même temps que $|x| = r$ augmente au dela de toute limite.»

Les deux théorèmes ***F*** et ***G*** pris ensemble nous renseignent complètement sur la croissance de $E_\alpha(x)$ dans toutes les différentes directions, pourvu que:

$$(34) \qquad 2 > \alpha > 0.$$

On pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 8 a. La fonction $E_\alpha(x)$ où α désigne une constante positive vérifiant la condition

$$(34) \qquad 2 > \alpha > 0$$

se comporte quant à sa croissance dans les diverses directions de la manière suivante:

On doit distinguer trois cas différents. Le module de x augmente indéfiniment dans un angle intérieur à l'angle

$$(33) \qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas le module $|E_\alpha(x)|$ tend en même temps indéfiniment vers zéro. Le module $|x|$ augmente indéfiniment le long d'un des deux vecteurs:

$$\varphi = \pm \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas le module $|E_\alpha(x)|$ tend en même temps indéfiniment vers $\frac{1}{\alpha}$. Le module $|x|$ augmente indéfiniment dans un angle intérieur à l'angle

$$\alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > -\alpha \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas le module $|E_\alpha(x)|$ augmente en même temps au dela de toute limite, tandis que

$$\left| E_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\varphi}{\alpha}}} \right|$$

diminue indéfiniment.»

Pour $\alpha = 1$ on retombe sur la propriété connue et caractéristique de la fonction exponentielle $E_1(x) = e^x$.

Le théorème $\boldsymbol{G}$ nous renseigne encore sur la croissance de $E_\alpha(x)$ dans le cas

$$\alpha = 2$$

pourvu que

$$\pi > \varphi > -\pi.$$

Nous voyons que $|E_2(x)|$ augmente indéfiniment en même temps que $|x|$ tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle

$$\pi > \varphi > -\pi$$

tandis que

$$\left| E_2(x) - \frac{1}{2} e^{r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}} \right|$$

diminue en même temps indéfiniment.

Mais ni le théorème $\boldsymbol{F}$ ni le théorème $\boldsymbol{G}$ ne donne la croissance de $|E_2(x)|$ dans le cas

$$\varphi = \pm \pi.$$

Cette croissance s'obtient au contraire directement si on a égard à l'égalité

$$(53) \qquad E_2(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = \frac{e^{r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}} + e^{-r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}}}{2}$$

d'où l'on tire

$$(54) \qquad E_2(re^{i\pi}) = E_2(-r) = \cos r^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le présent paragraphe nous avons donc complètement épuisé la question relative à la croissance de $E_\alpha(x)$ dans le cas

$$(21) \qquad 2 \geqq \alpha > 0.$$

Je montrerai dans le paragraphe suivant qu'on peut encore arriver à la connaissance complète de la croissance de $E_\alpha(x)$ dans le cas

$$\alpha > 2.$$

§ 3.

Dans le paragraphe précédent j'ai étudié la croissance de la fonction $E_\alpha(x)$ à l'aide de la formule sommatoire de MACLAURIN. La constante α était alors soumise à la restriction

$$(21) \qquad 2 \geqq \alpha > 0.$$

Je suivrai dans ce paragraphe une nouvelle voie et nous verrons que celle-ci nous conduit à la connaissance de la croissance non seulement d'une fonction $E_\alpha(x)$ qui correspond à une valeur α limitée par la restriction (21), mais en même temps à la connaissance de la croissance d'une fonction $E_\alpha(x)$ correspondant à α réel positif quelconque.

Quelque temps après la publication du mémoire de RIEMANN sur les nombres premiers [1] HANKEL publia un mémoire fort remarquable [2] où

[1] *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Monatsber. der Berl. Academie. Nov. 1859. Ges. Werke. Zweite Aufl. pag. 145.

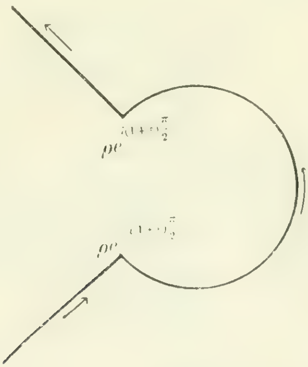
[2] *Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes.* Zur Habilitation in der philos. Facultät der Universität Leipzig bearb. von Dr HERMANN HANKEL. In Commission bei Leopold Voss. 1863. Zeitschrift für Math. und Physik. Neuntes Jahrgang, pag. 1—21.

il obtenait une expression pour $\frac{1}{\Gamma(z)}$ au moyen d'une intégrale définie analogue à celle donnée auparavant par Riemann pour la fonction $\zeta(z)$.[1] Cette expression est:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S} e^t t^{-z} \frac{dt}{t} \tag{55}$$

où le contour S est un contour ouvert laissant l'origine à gauche, parcouru dans le sens positif et qui peut être défini de la manière suivante.

On introduit deux quantités positives ρ et ε dont l'une ε est plus petite que le nombre deux. Le contour se compose de trois lignes différentes. D'abord la partie d'un vecteur, issu de l'origine et ayant pour argument $-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ entre l'infini et le point $\rho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Ensuite l'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de la longueur ρ tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\rho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Finalement la partie d'un nouveau vecteur, issue de l'origine et ayant pour argument $i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, entre le point $\rho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et l'infini.



[1] Werke. Zweite Auflage, pag. 146.

Supposons:

$$|x| < \rho^a$$

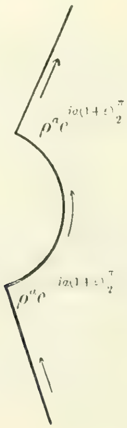
nous aurons:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\lfloor a\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int^{S} e^t\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{x}{t^a}\right)^\nu\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{1}{a}e^t\frac{dt^a}{t^a - x}.$$

Faisons

$$t^a = \omega$$

et désignons par $\bar{S}$ un nouveau contour ouvert dans le plan des ω laissant l'origine à gauche et formé de la partie entre l'infini et $\rho^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ d'un vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, de l'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de longueur ρ^a tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\rho^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et ensuite de la partie entre $\rho^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et l'infini d'un vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$.



Nous aurons:

(56) $$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{|\alpha\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int^{\bar{S}} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

où l'intégrale est prise dans le sens direct. L'intégrale représente une seule et même fonction de x tant que x est situé du même côté de $\bar{S}$ que l'origine.

Regardons le cas:

(34) $$2 > \alpha > 0.$$

La quantité positive ε étant aussi petite qu'on veut, la formule (56) nous montre que $|E_\alpha(x)|$ diminue infiniment avec $\frac{1}{r}$ $(x = re^{i\varphi})$ quand x tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle

(33) $$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

C'est le théorème $\boldsymbol{F}$ § 2.

La formule (56) nous renseigne encore sur la croissance de $E_\alpha(x)$ dans l'angle

(37) $$\alpha\frac{\pi}{2} \geqq \varphi \geqq -\alpha\frac{\pi}{2}$$

dans le cas (34) et nous donne dans le cas

(57) $$\alpha \geqq 2$$

la croissance de $E_\alpha(x)$ dans toutes les différentes directions.

Supposons que α étant quelconque x soit situé dans l'angle (37).

Introduisons deux contours différents à savoir $\bar{S}_1$ correspondant au rayon $\rho = \rho_1$ et $\bar{S}_2$ correspondant au rayon $\rho = \rho_2$ où

$$\rho_2 < |x| < \rho_1.$$

On a:

(58) $$E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int^{S_1} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x}.$$

Désignons par R un quadrilatère, formé des quatres lignes suivantes. L'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de longueur ρ_1^a tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\rho_1^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho_1^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. La partie entre $\rho_1^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et $\rho_2^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ du vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $i\alpha(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2}$. L'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de longueur ρ_2^a tournant autour de l'origine dans le sens invers de $\rho_2^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho_2^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Finalement la partie entre $\rho_2^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et $\rho_1^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ du vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $-i\alpha(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2}$.

On a:

$$(59) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}_1} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x} = \frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}_2} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x} + \frac{1}{2\pi i}\int^{R} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x}.$$

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\overline{S}_2} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

qui représentait une seule et même fonction de x quand x était situé du même côté de $\overline{S}_2$ que l'origine représente aussi bien une autre seule et même fonction de x quand x est situé du côté opposé à l'origine. Cette intégrale tend indéfiniment vers zéro en même temps que x va vers l'infini dans l'angle:

$$\alpha(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2} > \varphi > -\alpha(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2}. \tag{60}$$

Nous mettons donc:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\overline{S}_2} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x} = \varepsilon_r^{(\alpha)}. \tag{61}$$

Il s'ensuit qu'on a dans l'angle (60)

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{R} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x} + \varepsilon_r^{(\alpha)} \tag{62}$$

où le module de $\varepsilon_r^{(\alpha)}$ diminue indéfiniment avec $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$.

Dans le cas

$$2 > \alpha > 0 \tag{34}$$

on a en choisissant ε suffisamment petit

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{R} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x} = \frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{63}$$

On obtient donc dans ce cas:

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} + \varepsilon_r^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{i\varphi}{\alpha}}} + \varepsilon_r^{(\alpha)} \tag{64}$$

égalité valable dans l'angle (60) et le théorème 8 a est par conséquent démontré.

La formule (62) nous fournira encore le moyen de faire une étude complète de la croissance de la fonction

$$(65) \qquad E_\alpha(x); \qquad \alpha \geqq 2.$$

Cette fonction est d'une autre nature que la fonction

$$(66) \qquad E_\alpha(x); \qquad 2 > \alpha > 0$$

et paraît bien moins importante. Il est pourtant intéressant de voir que les propriétés caractéristiques des deux fonctions dérivent de la même source.

Pour simplifier nous ferons en sorte que dans l'intégrale

$$(56) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

les parties infinies du chemin d'intégration se confondent toutes deux avec l'axe réel positif (ou dans un cas particulier avec un vecteur voisin de cet axe). Cela est possible parce que dans le cas

$$(57) \qquad \alpha \geqq 2$$

il existe toujours un nombre pair tel que

$$(67) \qquad \frac{\alpha}{2} < 2m < \frac{3\alpha}{2}.$$

Le nombre m étant fixé le chemin d'intégration $\overline{S}$ sera composé des parties suivantes:

1° la partie de l'axe réel extérieur à un cercle d'un certain rayon ρ^α cet axe étant parcouru dans le sens négatif;

2° la circonférence de rayon ρ^α parcourue $2m$ fois dans le sens positif;

3° la partie de l'axe réel nommée dans 1° parcourue dans le sens positif.

Nous déterminerons la fonctions $\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ de manière que, au point de l'axe réel où finit la m^e et commence la $(m+1)^e$ circonférence, elle ait une valeur réelle et positive. Grâce à cette détermination on aura, sur les parties du chemin d'intégration situées à distance infinie

$$\omega^{\frac{1}{a}} = \left|\omega^{\frac{1}{a}}\right| e^{\pm \frac{2m}{a}\pi i}$$

ce qui démontre à cause de l'inégalité (67) la convergence de l'intégrale (56).

Revenons maintenant à la formule:

$$E_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}}^{R} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x} + \varepsilon_r^{(a)}. \tag{62}$$

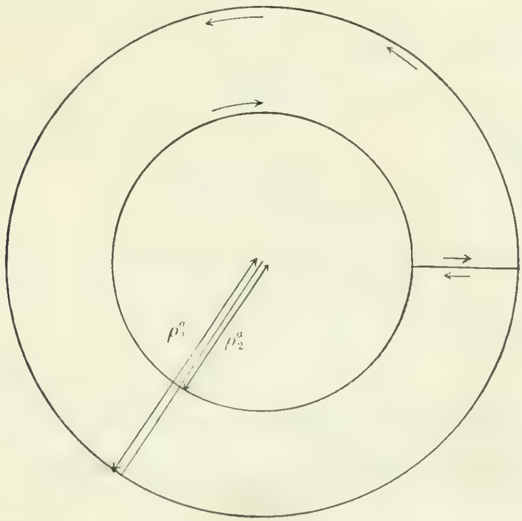
L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}}^{R} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

se réduit à la somme de $2m$ intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

le chemin d'intégration, qui est le même dans toutes les intégrales, étant celui indiqué dans la figure ci-jointe.



Ce qui est différent dans les diverses intégrales c'est la détermination de la fonction $\omega^{\frac{1}{a}}$. En effet, en posant $\omega = \rho e^{i\theta}$, on doit prendre

dans la $(m+1)^e$ intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta}{a}}$

. . . .

. . . .

dans la $(m+1+\nu)^e$ intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta+2\nu\pi}{a}}$ $(\nu=0, \ldots, m-1)$

. . . .

. . . .

dans la m^e intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta-2\pi}{a}}$

. . . .

. . . .

dans la $(m+1-\nu)^e$ intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta-2\nu\pi}{a}}$ $(\nu=1, \ldots, m)$

. . . .

. . . .

Par conséquent en écrivant

$$(25) \qquad x = re^{i\varphi}$$

et en supposant

$$0 < \varphi < 2\pi$$

on a pour la $(m+1+\nu)^e$ intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x} = \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} \qquad (\nu = -m \ldots + (m-1))$$

J'ai donc démontré cette formule

$$(68) \qquad E_a(x) = \sum_{\nu=-m}^{m-1} \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)}$$

formule qui dans les suppositions (57), (67) est valable pour

$$0 < \varphi < 2\pi.$$

Le cas $\varphi = 0$ est resté exclus jusqu'ici. Mais il est facile de modifier la démonstration de manière à embrasser ce cas. En effet en faisant tourner le chemin d'intégration $\overline{S}$ d'un petit angle ε dans le sens négatif on démontre de la même manière que ci-dessus que l'on a toujours

$$E_a(x) = \sum_{\nu=-m}^{m-1} \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)} \tag{68}$$

mais avec cette modification que la formule est valable pour

$$-\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$$

La formule (68) est donc valable encore pour

$$\varphi = 0.$$

On démontre d'une manière analogue qu'elle est valable pour

$$\varphi = 2\pi.$$

Il est donc démontré que la formule (68) a lieu pour

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi. \tag{69}$$

Il est évident qu'on peut négliger dans la formule (68) tous les termes pour lesquels on a:

$$\left|\frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}\right| > \frac{\pi}{2}. \tag{70}$$

En effet puisque on a dans tous ces termes à cause de (67):

$$\left|\frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}\right| \leqq \frac{2m\pi}{a} < \frac{3\pi}{2} \tag{71}$$

chacun d'eux tend vers zéro quand r devient infini.

Nous sommes par conséquent arrivés à la formule finale:

$$E_a(x) = \sum_{(\nu)} \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)} \tag{72}$$

où la sommation s'étend à tous les nombres ($\nu = -m, \ldots, +(m-1)$) pour lesquels

$$(73) \qquad \left|\frac{\varphi + 2\nu\pi}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat peut être résumé dans le théorème suivant.

Théorème 8 b. »La fonction $E_\alpha(x)$ où α désigne une constante positive remplissant la condition

$$(57) \qquad \alpha > 2$$

se comporte quant à sa croissance dans les diverses directions de la manière suivante.

Choisissons un nombre entier m qui sera soumis à la restriction

$$(67) \qquad \frac{\alpha}{2} < 2m < \frac{3\alpha}{2}.$$

Quand $|x|$ augmente au delà de toute limite le long d'un vecteur quelconque ($x = re^{i\varphi}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) le module

$$\left| E_\alpha(x) - \sum_{(\nu)} \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{2\nu\pi+\varphi}{\alpha}}} \right|$$

où la sommation s'étend à tous les nombres entiers

$$\nu = -m, -(m-1), \ldots, m-1$$

remplissant la condition

$$(73) \qquad \left|\frac{2\nu\pi + \varphi}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

diminue en même temps indéfiniment.»

On voit que $|E_\alpha(x)|$ tend vers l'infini avec $|x|$ pour tous les vecteurs sauf l'axe réel négatif. On a encore:

$$(74)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{r=\infty} e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} |E_\alpha(r)| = \frac{1}{\alpha}, \\ \lim\limits_{r=\infty} e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} |E_\alpha(x)| = 0; \qquad 0 < \varphi < 2\pi. \end{array}\right.$$

Pour l'axe réel négatif on obtient:

$$(75)\qquad E_\alpha(-r) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{2}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{2\nu+1}{\alpha}\pi} \cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{2\nu+1}{\alpha}\pi\right).$$

La fonction $E_\alpha(x)$ $(\alpha \geqq 2)$ partage donc avec $\sin x$ la propriété que son module augmente au dela de toute limite avec $|x|$ quand x tend vers l'infini le long de tout vecteur, *un seul* excepté. D'autre part le module d'une fonction entière rationnelle $G(x)$ augmente sans exception au de la de toute limite avec $|x|$ quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque.

Il est donc naturel de poser cette question. Existe-il des fonctions entières transcendantes dont le module sans exception comme celui de $G(x)$ augmente avec $|x|$ au de là de toute limite quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque déterminé?

M. Helge von Koch a répondu d'une manière affirmative à cette question[1] en donnant comme exemple la fonction $\overline{G}(x) = x \sin(x+i)$ qui possède évidemment cette propriété. Une autre fonction de cette nature est

$$(76)\qquad \overline{G}(x) = G(x) + E_\alpha(x).$$

On peut exprimer la différence entre la manière dont les fonctions $G(x)$ et $\overline{G}(x)$ tendent vers l'infini en disant que $G(x)$ tend vers l'infini d'une manière uniforme pour toutes les directions tandis que $\overline{G}(x)$ devient infini d'une manière non uniforme. La fonction $G(x)$ de son côté peut être définie par la propriété de tendre vers l'infini d'une manière uniforme.

Une autre question plus profonde se pose ici.

[1] Helge von Koch. *Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendentes.* Arkiv f. Mat. Astr. o. Fysik. Stockholm. Bd 1, 9 sept. 1903.

La fonction

$$E_\alpha(x); \qquad 0 < \alpha < 2$$

tend vers l'infini seulement à l'intérieur de l'angle

$$-\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}.$$

En faisant diminuer α on peut rendre cet angle aussi petit qu'on veut. Est-il possible de former une fonction entière qui ne devienne infinie que si $|x|$ augmente le long d'un seul vecteur, mais qui diminue indéfiniment si $|x|$ augmente le long de tous les autres vecteurs? Un de mes élèves M. J. Malmquist est parvenu à donner un tel exemple.[1] La fonction

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right)}; \qquad 0 < \alpha < 1$$

possède cette propriété. Elle tend en réalité indéfiniment vers zéro quand $|x|$ augmente au dela de toute limite le long d'un vecteur déterminé situé dans l'angle

$$0 < \varphi < 2\pi$$

tandis qu'elle augmente au dela de toute limite quand x tend vers l'infini le long de l'axe réel positif. On le démontre facilement en suivant une marche presque identique à celle que j'ai employée dans le § 2.

M. E. Lindelöf de son côté en se rattachant à ma note préliminaire des Comptes Rendus[2] et en s'appuyant sur un théorème fort remarquable trouvé par lui[3] vient de former la fonction[4]

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\log\left(\nu + \frac{1}{\alpha}\right)}\right)^\nu; \qquad 0 < \alpha < 1$$

---

[1] J. Malmquist. *Étude d'une fonction entière.* Acta math. Ce tôme.

[2] 2 mars 1903.

[3] Acta Soc. Sc. Fenn. T. 31, n° 3, pag. 29.

[4] Bull. des Sc. Math. Août 1903, pag. 224—225.

qui possède les mêmes propriétés que celle de M. MALMQUIST. Une telle fonction est encore la suivante:

$$(77) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu(\log\nu)^{\alpha}} x^{\nu}; \qquad 0 < \alpha < 1.$$

En introduisant dans l'intégrale (56) au lieu de $e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}$ une nouvelle fonction de ω nous rencontrerons dans une note suivante une nouvelle classe de fonctions de cette espèce.[1]

Désignons par $\mathfrak{E}_{\alpha}(x)$ une fonction de cette nature. A l'aide d'une telle fonction on peut répondre à une autre question intéressante. Existe-il des fonctions entières qui tendent indéfiniment vers zéro quand $|x|$ augmente au delà de toute limite le long d'un vecteur *quelconque* déterminé?

La fonction

$$(78) \qquad e^{-\mathfrak{E}_{\alpha'}(x)} - e^{-\mathfrak{E}_{\alpha''}(x)}; \qquad \alpha' \geqq \alpha''$$

possède évidemment cette propriété. On voit sans peine que l'explication de ce phénomène qui paraît d'abord assez paradoxal est que le module de la fonction diminue d'une manière *non-uniforme* quand x tend vers l'infini le long de différentes directions.

Il est facile de voir que dans tous nos exemples la fonction $\mathfrak{E}_{\alpha}(x)$ n'est pas de genre fini. Existe-il de pareilles fonctions de genre fini? La réponse est négative à cause d'un théorème de la plus haute importance qui vient d'être démontré par M. PHRAGMÉN[2] et qui n'est pas sans rapport avec les propriétés caractéristiques que j'ai démontrées concernant la fonction $E_{\alpha}(x)$. Ce théorème dans les propres termes de son auteur est le suivant:[3]

»Soit α et ρ deux quantités satisfaisant aux inégalités

$$0 < \alpha < 2, \qquad 0 < \rho < \frac{1}{\alpha}$$

[1] c. f. E. PHRAGMÉN. *Sur une extension* etc. Ce journal. T. 28, pag. 357, 358. Ainsi que mes deux notes *Un nouveau théorème* etc. Comptes Rendus 11 avril 1904 et *Une nouvelle fonction* etc. Comptes Rendus 18 avril 1904.

[2] *Sur une extension* etc.

[3] c. f. ma note des Comptes Rendus etc. pour le 12 octobre 1903.

et supposons que la fonction entière $E(x)$ satisfasse aux deux conditions suivantes. En posant

$$x = re^{i\varphi}$$

on a

$$1^\circ \qquad |E(x)|\, e^{-r^\rho} \leq A \quad \text{pour} \quad -\alpha\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \alpha\frac{\pi}{2}$$

et

$$2^\circ \qquad |E(x)| \leq B \quad \text{pour} \quad \alpha\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}$$

A et B étant deux constantes.

Je dis que cette fonction $E(x)$ sera nécessairement une constante.»

Je n'entrerai pas cette fois dans une étude plus approfondie que celle qui vient d'être faite des autres propriétés de la fonction $E_\alpha(x)$. Je laisserai d'abord la parole à M. A. Wiman qui vient de terminer un travail fort intéressant [1] sur la distribution des zéros de cette fonction. Je rappellerai encore que M. E. Phragmén [2] a montré que la fonction $E_\alpha(x)$ est à un certain point de vue la plus simple de son espèce. Pourtant il convient avant de terminer de voir si la propriété qu'a la fonction $E_1(x) = e^x$ de satisfaire à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x peut être généralisée à savoir pour $E_\alpha(x)$, α ayant d'autres valeurs que *un*. C'est en réalité ce qui a lieu quand α est rationnel.

Faisons

$$\alpha = \frac{m}{n} \tag{79}$$

où m et n sont des nombres entiers positifs. On trouve immédiatement en employant la forme symbolique:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m E_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\xi^{-\frac{m}{n}\nu}}{\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\nu\right)} + E_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right), \\ &\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m E_m(\xi^m) = E_m(\xi^m) \end{aligned}\right. \tag{80}$$

[1] *Über die Nullstellen der Functionen* $E_\alpha(x)$. Ce Tome.

[2] *Sur une extension* etc. T. 28, pag. 357.

ou

$$(81)\qquad \begin{cases} \left(\frac{m}{n}x^{1-\frac{n}{m}}\frac{d}{dx}\right)^m E_{\frac{m}{n}}(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{x^{\nu-n}}{\underline{\left|\frac{m}{n}(\nu-n)\right.}} + E_{\frac{m}{n}}(x); \qquad n > 1, \\[2ex] \left(mx^{1-\frac{1}{m}}\frac{d}{dx}\right)^m E_m(x) = E_m(x). \end{cases}$$

On a donc par exemple:

$$(82)\qquad \begin{cases} E'_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right.} + 2xE_{\frac{1}{2}}(x), \\[2ex] E'_{\frac{1}{n}}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\underline{\left|\frac{1}{n}\right.}} + \frac{x^2}{\underline{\left|\frac{2}{n}\right.}} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{\underline{\left|\frac{n-1}{n}\right.}}\right) + nx^{n-1}E_{\frac{1}{n}}(x), \\[2ex] E''_2(x) + \frac{1}{2x}E'_2(x) - \frac{1}{4x}E_2(x) = 0. \end{cases}$$

§ 4.

Je reprendrai maintenant à l'aide des théorèmes 8 l'étude de l'intégrale

$$(8)\qquad \int_0^x e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Je la simplifierai d'abord en faisant

$$F_\alpha(x) = E_\alpha(x).$$

Écrivons comme auparavant

$$(25)\qquad x = re^{i\varphi}$$

et considérons d'abord le cas

$$(34)\qquad 2 > \alpha > 0.$$

A cause du théorème 8 a et en désignant par ∂ une quantité positive qui peut devenir aussi petite que l'on voudra et en faisant croître suffisament la quantité positive ω, on a:

$$(83)\quad \begin{cases} \left| e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left| E_\alpha(\omega x) \right| - e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}\right)} \right| < \partial e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}; & -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}, \\ e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left| E_\alpha(\omega x) \right| < \partial e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}; & \alpha\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'intégrale

$$(84)\qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est convergente tant que la variable x se trouve du même côté de la ligne

$$(85)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = 1; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{2}{\pi}$$

que l'origine: c'est à dire à l'intérieur de l'étoile de centre zéro limitée par la ligne (85).

Cette ligne qui passe toujours par le point $x = 1$ a dans le cas

$$1 > \alpha > 0$$

une forme d'apparence hyperbolique et possède les deux asymptotes

$$re^{i\alpha\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad re^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}; \qquad 0 < r < \infty.$$

Quand α s'approche de zéro elle s'aplatit donc de plus en plus jusqu'à se confondre avec la ligne droite $(1, +\infty)$.

Dans le cas

$$\alpha = 1$$

elle devient la perpendiculaire à l'axe réel au point $x = 1$. Dans le cas

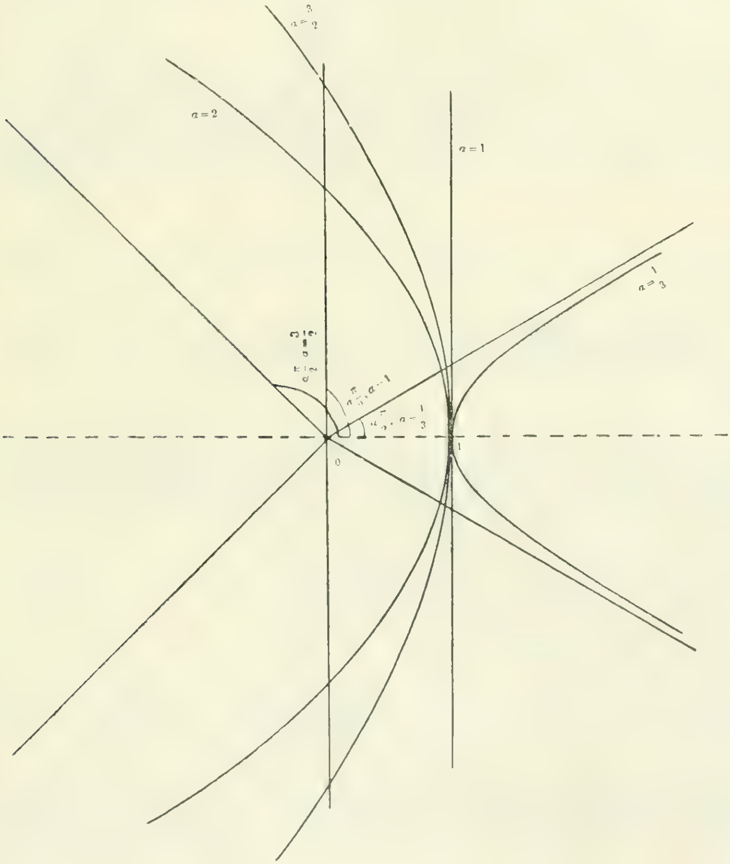
$$2 > \alpha > 1$$

elle a au contraire une forme d'apparence parabolique et s'éloigne quand

φ s'approche des angles $\alpha\frac{\pi}{2}$ et $-\alpha\frac{\pi}{2}$ indéfiniment des deux lignes $re^{i\alpha\frac{\pi}{2}}$ et $re^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}$; $0 \leq r < +\infty$. Dans le cas

$$\alpha = 2$$

elle devient un parabole.



L'étoile de centre zéro qui est limitée par la ligne

$$(85) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1\,; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}$$

est pour l'intégrale

$$(84) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

l'étoile que nous avons déjà désignée au § 1 (Théorème $\boldsymbol{E}$) par $B^{(\alpha)}$. Le théorème $\boldsymbol{E}$ montre que la convergence de l'intégrale ne peut pas avoir lieu en dehors de $B^{(\alpha)}$. L'étoile $B^{(\alpha)}$ est donc une étoile de convergence pour l'intégrale (84). D'autre part il s'ensuit du théorème $\boldsymbol{D}$ que l'égalité

$$(86) \qquad \frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

Etudions maintenant l'intégrale (84) dans le cas

$$(57) \qquad \alpha \geq 2.$$

Il s'ensuit du théorème 8 b qu'en faisant croître suffisamment la quantité positive ω et en désignant par δ une quantité positive qui peut devenir aussi petite que l'on voudra on a:

$$(87) \qquad \left| e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left| E_\alpha(\omega x) \right| - \frac{1}{\alpha} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha}\right)} \right| < \delta e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha}\right)}\,; \qquad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Par conséquent l'intégrale

$$(84) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

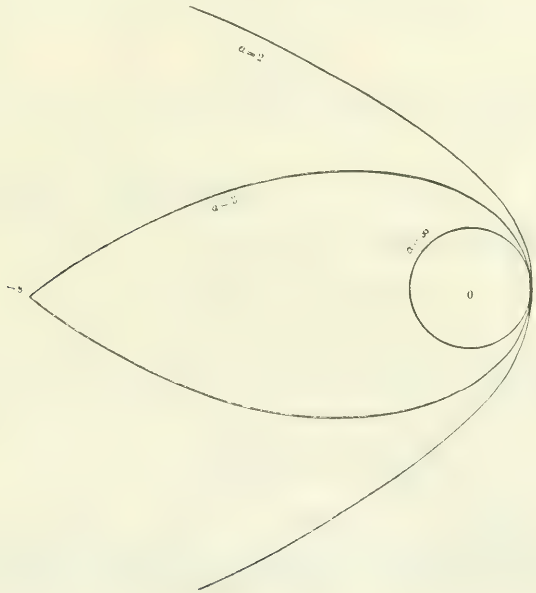
dans la supposition

$$(57) \qquad \alpha \geq 2$$

est convergente à l'intérieur de l'étoile de centre zéro limitée par la ligne

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1 ; \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi. \tag{88}$$

Cette ligne comme nous l'avons déjà remarqué (page 149) est une parabole pour $\alpha = 2$. Pour $\alpha > 2$ elle devient une ligne fermée symétrique par rapport à l'axe réel et coupant cet axe aux deux points $r = 1$, $\varphi = 0$ et $r = \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{\alpha}}\right)^{\alpha}$; $\varphi = \pm \pi$. Quand α tend vers l'infini elle s'approche de plus en plus du cercle de centre zéro et de rayon un.



On voit par les mêmes considérations que dans le cas $2 \geqq \alpha > 0$ que l'étoile de centre zéro qui est limitée par la ligne (88) est une étoile de convergence pour l'intégrale (84).

On voit encore que l'égalité

(86) $$\frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

a lieu partout à l'intérieur de cette étoile.

Nous sommes donc arrivés au théorème suivant:

Théorème 9. »L'intégrale

(84) $$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

où α est une constante positive assujettie à la condition

$$2 \geqq \alpha > 0$$

possède par rapport à $x = re^{i\varphi}$ une étoile de convergence de centre zéro limitée par la ligne

(85) $$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1 ; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2} .$$

On a partout à l'intérieur de cette étoile

(86) $$\frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} .$$

L'expression

(89) $$\lim_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède par rapport à x une étoile de convergence de centre zéro formée par tout le plan à l'exclusion de la ligne droite $(1, \infty)$. On a partout à l'intérieur de cette étoile qui est l'étoile principale des constantes $1, 1, 1, \ldots$ l'égalité

(90) $$\frac{1}{1-x} = \lim_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} .$$

Quand d'autre part

$$(57) \qquad \alpha \geqq 2$$

l'intégrale

$$(84) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède une étoile de convergence de centre zéro limitée par la ligne

$$(88) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = 1\,; \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi$$

et l'égalité

$$(86) \qquad \frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

a lieu partout à l'intérieur de cette étoile.

L'expression

$$(91) \qquad \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède par rapport à x le cercle de convergence de centre zéro et de rayon un et on a partout à l'intérieur de ce cercle

$$(92) \qquad \frac{1}{1-x} = \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

A l'aide du théorème 9 il est maintenant facile d'arriver à la connaissance complète de l'intégrale générale

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Je reviens à mon théorème de 1882 (voir la note page 117) et au lieu de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(z)\left[\frac{1}{z-x}-\frac{1}{z}\left(B_0+B_1\frac{x}{z}+\ldots+B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right]dz$$

je considère l'intégrale analogue:

$$(93)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right)dy.$$

L'étoile $B^{(\alpha)}$ a été construite de la manière suivante (Théorème $\boldsymbol{E}$). Autour du vecteur $re^{i\varphi}$ on construit dans le cas

$$2 \geqq \alpha > 0$$

une figure génératrice

$$(94)\qquad \rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \psi < \alpha\frac{\pi}{2}$$

et dans le cas

$$\alpha \geqq 2$$

une autre figure génératrice

$$(95)\qquad \rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\pi \leqq \psi \leqq \pi$$

où ρ, ψ sont des coordonnées polaires relatives au vecteur et où r est déterminé en sorte que la figure appartient entièrement à l'étoile principale A des constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ [1] Si R désigne la limite supérieure de r le contour limite de $B^{(\alpha)}$ sera décrit par $Re^{i\varphi}$; où φ parcourt les valeurs $0 \leqq \varphi < 2\pi$.

Considérons de plus près la ligne (94). C'est une ligne fermée symétrique par rapport au vecteur r, φ et qui passe par les deux points $\rho = 0$, $\rho = r$. Pour $\alpha = 1$, et c'est le cas de M. Borel elle devient un

[1] voir pour la signification des constantes k page 103.

cercle ayant la droite $(0, \varphi; r, \varphi)$ pour diamètre. L'ordonné du point (ρ, ψ) par rapport à la ligne (r, φ) est $r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}\sin\psi$. On voit donc que la ligne s'aplatit de plus en plus jusqu'à se confondre avec la ligne droite $(0, \varphi; r, \varphi)$ quand α tend vers zéro. Il s'ensuit que l'étoile $B^{(\alpha)}$ s'approche infiniment de l'étoile principale A quand α tend vers zéro.

La ligne (95) au contraire est aussi une ligne fermée symétrique par rapport à la ligne r, φ qu'elle coupe aux deux points r et $-r\left(\cos\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\alpha}$. Elle embrasse donc le point zéro. Quand α tend vers l'infini elle se rapproche infiniment du cercle de centre zéro et de rayon r. L'étoile $B^{(\alpha)}$ s'approche par conséquent infiniment du cercle de centre zéro inscrit dans l'étoile principale A en même temps que α tend vers l'infini.

Revenons à l'intégrale:

$$(93) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy$$

où x sera situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ et S sera un contour fermé qui embrasse la ligne $(0, 1)$ ainsi que la figure génératrice par rapport à cette ligne et qui est tel que le contour correspondent décrit par xy sera en même temps situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

On a:

$$(96) \qquad \left|\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \\ &= F(x) - \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y}\left(\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \end{aligned}\right.$$

où l'intégrale

$$(97) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y}\left(\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy$$

est prise le long d'un petit cercle de centre zéro. Introduisons dans l'intégrale

$$(98) \qquad \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

la série qui représente la fonction $E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)$; on aura:

$$(99) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y}\left(\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \\ & = \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y^{\nu+1}}\, dy\, \frac{\omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ & = \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(z)}{z^{\nu+1}}\, dz\, \frac{(\omega x)^\nu}{\lfloor \alpha\nu}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent:

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(x) = \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy. \end{aligned} \right.$$

Pour chaque valeur de y qui appartient à S nous avons

$$(101) \qquad \frac{1}{y-1} = \frac{1}{y}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}};$$

d'où

$$(102) \qquad F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

égalité qui est valable pour chaque domaine X situé à l'intérieur de l'étoile $B^{(\alpha)}$. Si on se remémore maintenant les théorèmes $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ on voit que l'étoile $B^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{8}$$

L'énoncé donné dans l'introduction de cette note est donc complètement démontré.

J'attirerai encore l'attention sur la formule

$$FB^{(\alpha)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu \tag{103}$$

qui est une conséquence immédiate de la formule (99) et où $B^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence de l'expression limite du second membre.

La série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu$$

est une fonction entière de x qui dépend de deux paramètres ω et α. Elle s'approche indéfiniment de $FB^{(\alpha)}(x)$ quand ω augmente au dessus de toute limite, et de $FA(x)$ quand α s'approche indéfiniment de zéro. Par conséquent:

G a. »Soit $FA(x)$ une branche fonctionnelle quelconque appartenant aux constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$, dont A est l'étoile principale. On peut toujours à l'aide des constantes k former une fonction entière de x, $G_{\omega,\alpha}(x)$ qui, en outre de x et des k, dépend de deux paramètres positifs ω et α et qui est telle que

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x) = FA(x)$$

et que l'expression

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x)$$

diverge en dehors de A.

On peut choisir $G_{\omega,\alpha}(x)$ de telle manière qu'on obtienne en même temps

$$\lim_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x) = FB^{(\alpha)}(x),$$

$$\lim_{\alpha=\infty}\lim_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x) = FC(x)$$

et que les expressions:

$$\lim_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x); \qquad \lim_{\alpha=\infty}\lim_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x)$$

divergent, la première en dehors de $B^{(\alpha)}$ et la seconde en dehors de C.»

Si on laisse tomber la condition que l'expression qui aura $FA(x)$ pour limite aura en même temps A pour étoile de convergence, il est facile de choisir la fonction entière de telle manière qu'elle ne dépende que d'un seul paramètre. Nous le verrons dans la suite au § 5. Le théorème est analogue au théorème suivant de WEIERSTRASS[1] auquel le grand analyste attachait une importance spéciale.

g. »Soit $f(x)$ une fonction quelconque réelle et continue de x. Il est toujours possible de former une fonction entière de x, soit $g_\omega(x)$ qui dépend, en outre de x d'un paramètre positif ω et qui est telle que

$$\lim_{\omega=\infty} g_\omega(x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs réelles de x.»

La formule (103) peut être transformée d'une manière intéressante. On a:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu)\left(\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} - \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^\nu - \left(\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu x^\nu\right)\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{n+1}}{\underline{|\alpha(n+1)}}\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

[1] WEIERSTRASS. *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente.* Theorem A. Berl. Sitzungsber., 9 Juli 1885. Werke, Bd 3, Pag. 4.

On a de même:

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\underline{|\alpha n}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^n \, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}} = 0$$

et par conséquent (voir 4ième note page 370 la note)

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu x^\nu \right| \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{n+1}}{\underline{|\alpha(n+1)}} \, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = 0.$$

On obtient donc:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu \, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

et par suite:

(104) $$FB^{(\alpha)}(x)$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Pour $\alpha = 1$ cette formule devient celle de M. Borel savoir:

$$FB^{(1)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{e^{-\omega} \omega^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}.$$

Le second membre de (104) est uniformément convergent par rapport à x. On peut faire par conséquent:

$$(105) \qquad FB^{(\alpha)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La formule (104) nous fait voir qu'on aurait pu obtenir les quatre formules fondamentales (102), (103), (104), (105) en faisant subir à l'intégrale (93) la transformation

$$(106) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{1}{y}\,\frac{F(xy)}{y-1}\left|\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) - y\left(E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) - 1\right)\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right| dy$$

et en appliquant au second membre des considérations tout à fait semblables à celles du § 2 de ma quatrième note.

Nous sommes donc arrivés aux égalités suivantes:

$$(107)\left\{\begin{aligned}
&FB^{(\alpha)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu)\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= FB^{(\alpha)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= FB^{(\alpha)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\,\omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^\nu
\end{aligned}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&= FB^{(\alpha)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\!\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy,
\end{aligned}
$$

$$
(108)\left\{
\begin{aligned}
FB^{(\alpha)}(x) &= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right)\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\, \omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^\nu \\
&= \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(109)\left\{
\begin{aligned}
&FA(x) \\
&= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right)\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\, \omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^\nu = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}
\right.
$$

J'ai obtenu par conséquent le théorème suivant:

Théorème 10. »Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive et par $B^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A, inscrite dans A et engendrée dans le cas $2 \geqq \alpha > 0$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$$

et dans le cas $\alpha \geqq 2$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\pi \leqq \psi \leqq \pi$$

où ρ et ψ sont des coordonnées polaires relatives au vecteurs $x - a = re^{i\varphi}$; $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. L'étoile $B^{(\alpha)}$ s'approche infiniment du cercle de centre a inscrit en A quand α tend vers l'infini. Elle augmente continuellement avec $\frac{1}{\alpha}$ et devient pour $\alpha = 1$ l'étoile de Borel (Théorème 7 a). Elle renferme dans son intérieur tout domaine situé à l'intérieur de A pourvu que α soit chosi suffisamment petit.

L'étoile A étant l'étoile principale des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... assujetties à la condition de Cauchy, l'étoile $B^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence pour l'expression:

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}(x-a) + \cdots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}(x-a)^{\nu}\right)\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}}(x-a)^{\mu}\right]d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}\frac{1}{\underline{|\alpha\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{\nu}\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\,(x-a)^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a))\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}};$$

$$F_{\alpha}(x-a) = F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}\frac{(x-a)}{\underline{|\alpha . 1}} + \frac{F^{(2)}(a)}{\underline{|2}}\frac{(x-a)^2}{\underline{|\alpha . 2}} + \frac{F^{(3)}(a)}{\underline{|3}}\frac{(x-a)^3}{\underline{|\alpha . 3}} + \cdots.$$

De plus on a l'égalité:

$$FB^{(\alpha)}(x)$$

$$= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}}(x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}}(x-a)^{\nu}\right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}}(x-a)^{\mu}\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}} \frac{1}{|\underline{\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a))\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'expression limite:

$$\lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}}(x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}}(x-a)^{\nu}\right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}}(x-a)^{\mu}\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}} \frac{1}{|\underline{\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a))\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède une étoile de convergence identique à l'étoile A et on a l'égalité:

$$FA(x)$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}(x-a) + \ldots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}(x-a)^{\nu} \right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}} (x-a)^{\nu} \right) \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}} \frac{1}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

D'un autre côté l'expression limite:

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}(x-a) + \ldots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}(x-a)^{\nu} \right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}} (x-a)^{\mu} \right) \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}} \frac{1}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu} = \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède le cercle de convergence C de centre zéro inscrit dans l'étoile principale A, et on a l'égalité

$$FC(x) = \lim_{\alpha=\infty} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}}(x-a) + \ldots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}}(x-a)^{\nu} \right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha=\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}}(x-a)^{\mu} \right) \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha=\infty} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}} \frac{1}{|\underline{\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} \, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu}$$

$$= \lim_{\alpha=\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) \, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Si dans l'intégration on s'arrète dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura l'égalité:

$$FB^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(x) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}}(x-a) + \ldots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}}(x-a)^{\nu} \right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= FB^{(\alpha)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}}(x-a)^{\mu} \right) \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= FB^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}} \frac{1}{|\underline{a\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}} (x-a)^\nu$$

$$= FB^{(a)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega(x-a))\, d\omega^{\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^S F(z) \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a\left(\omega \frac{x}{z}\right) d\omega^{\frac{1}{a}} \right) dz$$

qui a lieu partout à l'intérieur de $B^{(a)}$, S désignant un contour fermé embrassant la ligne (ax) ainsi que la figure génératrice par rapport à cette ligne et situé en même temps à l'intérieur de $B^{(a)}$.»

On peut former de plusieurs manières différentes, je le montrerai dans le paragraphe suivant, des formules tout à fait analogues aux formules (107), (108), (109); mais il paraît difficile de les établir de telle manière que l'étoile où elles convergent reste toujours, la fonction étant quelconque, une étoile de convergence. C'était là au contraire, je viens de le démontrer, une propriété fondamentale des formules (108), (109).

§ 5.

Regardons l'intégrale

(110) $$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy$$

$F(x)$ étant comme toujours défini par l'égalité

(4) $$FC(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$$

où C est un cercle de centre zéro et de rayon r déterminé par l'égalité:

(1) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left|\sqrt[\nu]{k_\nu}\right| = \frac{1}{r}$$

et $E(x)$ désignant une fonction entière de x telle que

$$E(0) = 1. \tag{111}$$

Le contour S doit faire la limite d'une surface simplement connexe pour laquelle la fonction $F(xy)$ reste régulière. Il doit être parcouru dans le sens direct et embrasser les deux points $y = 0$, $y = 1$.

On a:

$$J(x) = F(x) + \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy \tag{112}$$

ou

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1} + J(x). \tag{113}$$

La série

$$E(-\omega + h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} h^\nu$$

étant pour toutes les valeurs de ω toujours convergente par rapport à h on a pour toute valeur de ω

$$\overline{\operatorname{Lim}}_{\nu=\infty} \left| \sqrt[\nu]{\frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{\underline{|\nu}}} \right| = 0.$$

D'un autre côté en mettant $r_1 < r$ et en désignant par g_1 la limite supérieure de $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu\right|$ pour $|x| = r_1$, on a d'après le théorème de CAUCHY-WEIERSTRASS [1]

$$|k_\mu| \leq g_1 r_1^{-\mu}$$

et par conséquent

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} |k_\mu x^\mu| \leq g_1 \frac{1 - \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^{\nu+1}}{1 - \frac{|x|}{r_1}} = g_1 \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^\nu \frac{1 - \left(\frac{r_1}{|x|}\right)^{\nu+1}}{1 - \frac{r_1}{|x|}}.$$

[1] WEIERSTRASS. Werke. Bd. 1, pag. 67.

La série:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(|k_0|+|k_1x|+\ldots+|k_\nu x^\nu|\right)\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}h^{\nu+1}$$

est donc pour toutes les valeurs de x et de ω une série toujours convergente par rapport à h. Elle est encore, ω et h étant fixés, uniformément convergente pour un domaine quelconque de la variable x. Par conséquent (cf. pag. 158)

$$\text{(114)}\qquad \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\left(|k_0|+|k_1x|+\ldots+|k_\nu x^\nu|\right)\frac{\int_0^\omega E^{(\nu+2)}(-\omega)\omega^{\nu+1}\,d\omega}{\underline{|\nu+1}}=0$$

et encore en faisant

$$\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\omega^{\nu+1}=\int_0^\omega\left(\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}}\omega^\nu-\frac{E^{(\nu+2)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\omega^{\nu+1}\right)d\omega$$

et à cause du théorème fondamental de WEIERSTRASS [1]

$$\text{(115)}\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0+k_1x+\ldots+k_\nu x^\nu)\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\omega^{\nu+1}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}k_\nu\left(\int_0^\omega\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}}\omega^\nu d\omega\right)x^\nu.$$

La quantité ω étant fixée, les deux membres de cette égalité sont toujours convergents par rapport à x.

Soit maintenant W un domaine fini dans la variété ω, soit ρ une quantité positive aussi grande qu'on voudra et désignons par g la limite supérieure de $|E(-\omega+h)|$ quand ω appartient à W et h à $|h|\leq\rho$. On a alors

$$\left|\frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{\underline{|\nu}}\right|\leq g\rho^{-\nu}.$$

En se rappelant la formule

$$|k_\nu|\leq g_1r_1^{-\nu}$$

[1] WEIERSTRASS. *Zur Functionenlehre.* Werke. Bd. 2, pag. 205.

on voit donc que

$$\left| k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} \right| < (\nu + 1) \frac{g g_1}{(r_1 \rho)^\nu} \frac{1}{\rho}.$$

Par conséquent la série:

$$\sum_0^\infty k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu$$

x appartenant à un domaine fini donné, est par rapport à ω uniformément convergente pour un domaine fini quelconque. On a donc le droit de faire

$$(116) \qquad \int_0^\omega \left[\sum_{\nu=0}^\infty k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu \right] d\omega = \sum_{\nu=0}^\infty k_\nu \int_0^\omega \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^\nu d\omega}{\underline{|\nu}} x^\nu.$$

On a par conséquent et à cause de (110), (113), (115) et (116) l'égalité suivante:

$$(117) \qquad \left\{ \begin{aligned} & F(x) - \sum_0^\infty (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1} \\ & = F(x) - \sum_{\nu=0}^\infty k_\nu \left(\int_0^\omega \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu \\ & F(x) - \int_0^\omega \left[\sum_{\nu=0}^\infty k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu \right] d\omega \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy. \end{aligned} \right.$$

Nous voyons immédiatement que par un procédé absolument égal au précédent on obtient encore la formule:

$$(118) \qquad F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{1}{E(\omega)} \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\lfloor \nu+1} \omega^{\nu+1}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{F(xy)}{y-1} \frac{E\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E(\omega)} dy.$$

Pour obtenir les expressions de $F(x)$ que nous cherchons il s'agit donc de trouver des fonctions $E(x)$ telles que le dernier membre, soit de (117) ou de (118), s'approche de zéro en même temps que ω va vers l'infini.

Regardons d'abord la formule (118) et mettons

$$E(x) = E_\alpha(x).$$

Soit $B^{(\alpha)}$ l'étoile de centre zéro appartenant aux constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ déjà considérée au § 4 et soit x un point à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$. Supposons d'abord

$$(34) \qquad 2 > \alpha > 0.$$

La figure génératrice par rapport à la ligne (01) est

$$\rho^{\frac{1}{\alpha}} = \cos\frac{\psi}{\alpha}; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Choisissons pour S un contour qui embrasse cette ligne, et tel que xy soit situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

Désignons par $\bar S$ le contour décrit par $z = \frac{1}{y}$ en même temps que S est décrit par la variable y.

La ligne $\bar S$ est fermée, embrasse l'origine et reste toujours extérieure à la ligne

$$\bar\rho^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\bar\psi}{\alpha} = 1; \qquad (z = \bar\rho e^{i\bar\psi})$$

qui est la transformée de la ligne $\rho^{\frac{1}{\alpha}} = \cos\frac{\psi}{\alpha}$ au moyen de la substitution

$$z = \frac{1}{y}.$$

On sait que $\lim\limits_{\omega=\infty} E_\alpha(\omega z)$ s'approche indéfiniment de zéro pour chaque point de S situé dans l'angle

$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \psi > \alpha\frac{\pi}{2}$$

et que $\lim\limits_{\omega=\infty} |E_\alpha(\omega z)| = \frac{1}{\alpha}$ pour les points de S où

$$\psi = \pm\alpha\frac{\pi}{2}.$$

On sait encore que

$$\lim_{\omega=\infty}\left(|E_\alpha(\omega z)| - \frac{1}{\alpha}e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}\rho^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\psi}{\alpha}}\right) = 0$$

pour chaque point de S qui est situé dans l'angle

$$-\alpha\frac{\pi}{2} < \psi < \alpha\frac{\pi}{2}.$$

D'après la supposition concernant S et S, la partie de S qui est située dans l'angle

$$\alpha\frac{\pi}{2} < \psi < \alpha\frac{\pi}{2}$$

reste toujours par rapport à la ligne $\rho^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\psi}{\alpha} = 1$ du même côté que l'origine. La limite supérieure de $\rho^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\psi}{\alpha}$ dans cet angle est par conséquent toujours plus petite que un.

On voit donc que:

$$\lim_{\omega=\infty}\frac{E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_\alpha(\omega)} = 0; \qquad 2 > \alpha > 0$$

pour chaque point de S et on voit encore que $\frac{E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_\alpha(\omega)}$ s'approche d'une manière uniforme de zéro pour tous les points de S.

On arrive au même résultat pour

$$\alpha > 2.$$

La figure génératrice par rapport à la ligne (01) est alors

$$\rho^{\frac{1}{\alpha}} = \cos\frac{\psi}{\alpha}; \qquad -\pi \leq \psi \leq \pi$$

et on a (c. f. (87)), δ désignant une quantité positive qui devient infiniment petite avec $\frac{1}{\omega}$:

$$\left| |E_\alpha(\omega z)| - \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\psi}{\alpha}} \right| < \delta e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\psi}{\alpha}}; \qquad -\pi \leq \bar{\psi} \leq \pi.$$

Revenons maintenant à la formule (118).

On a:

$$\lim_{\omega=\infty} \int^{S} \frac{F(xy)}{y-1} \frac{E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_\alpha(\omega)} dy = 0 \tag{119}$$

Par conséquent:

$$\begin{cases} FB^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{1}{E_\alpha(\omega)} \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(0)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1} \\ \qquad = \lim\limits_{\omega=\infty} \dfrac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}} \end{cases} \tag{120}$$

égalité valable partout à l'intérieur de l'étoile $B^{(\alpha)}$ et où l'expression:

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}} \tag{121}$$

est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à $B^{(\alpha)}$.

On voit l'analogie complète avec l'expression de M. Borel qu'on obtient en faisant $\alpha = 1$.

Faisons encore la remarque qu'on peut mettre pour $E(x)$ au lieu de $E_\alpha(x)$ une fonction de l'espèce que j'ai considérée page 51; c'est à dire une fonction qui s'approche indéfiniment de zéro quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque autre que l'axe réel positif, tandis qu'elle sera une quantité réelle positive croissant au delà de toute limite quand x tendra vers l'infini le long de l'axe réel positif. En choisissant en outre

cette fonction de telle sorte que $\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$ s'approche de zéro d'une manière uniforme tant que x appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel positif compris entre $x = 1$ et l'infini, on obtient une expression

$$(122) \qquad \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \frac{1}{E(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1} \omega^{\nu+1}$$

qui est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A et qui représente la branche fonctionnelle $FA(x)$ partout à l'intérieur de cette étoile.

J'ai considéré ailleurs[1] une telle fonction $E(x)$ et j'y reviendrai dans une note suivante.

Le résultat auquel nous sommes arrivés par l'étude de la formule (118) peut être résumé dans le théorème suivant:

Théorème 11. Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive et par $B^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A inscrite en A et engendrée dans le cas $2 > \alpha > 0$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \psi \leq \alpha\frac{\pi}{2}$$

et dans le cas $\alpha \geq 2$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\pi < \psi < \pi$$

où ρ et ψ sont des coordonnées polaires relatives au vecteur $x - a = re^{i\varphi}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. L'étoile A étant l'étoile principale appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\nu)}(a)$, ... assujetties à la condition de Cauchy, on a les deux égalités:

[1] *Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques.* Comptes Rendus etc. T. 138, 11 avril 1904.

Voir encore pour cette fonction:

E. Phragmén. *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions.* Ce journal, t. 28, p. 357—359.

$$FB^{(\alpha)}(x) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots$$

$$+ \frac{1}{|\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \Big) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\alpha(\mu+1)}},$$

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots$$

$$+ \frac{1}{|\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \Big) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\alpha(\mu+1)}}$$

où $E_\alpha(x)$ désigne la fonction:

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{|\underline{\alpha\nu}}$$

et où ω est une variable positive.

La première de ces égalités a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ et la seconde partout à l'intérieur de A. Le second membre de la première égalité est uniformément convergent pour tout domaine intérieur à $B^{(\alpha)}$, le second membre de la deuxième égalité est uniformément convergent pour tout domaine intérieur à A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura l'égalité

$$FB^{(\alpha)}(x) - \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \Big) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\alpha(\mu+1)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{F(z)}{z-x} \frac{E_\alpha\left(\omega \frac{x-a}{z-a}\right)}{E_\alpha(\omega)} dz$$

qui a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ si on désigne par S un contour fermé qui étant situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ embrasse la figure génératrice par rapport à la droite (ax).

En désignant par $E(x)$ une fonction telle que, pour chaque domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel compris entre $x = 1$ et l'infini $\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$ s'approche uniformément de zéro lorsque ω augmente au delà de toute limite on a

$$FA(x) = \operatorname{Lim}_{\omega=\infty} \frac{1}{E(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots$$

$$+ \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \Big) \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1} \omega^{\nu+1}$$

où le second membre est uniformément convergent pour tout domaine à l'intérieur de A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on a:

$$FA(x)$$

$$-\frac{1}{E(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\omega} \Big(F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \Big) \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1} \omega^{\nu+1}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{S} \frac{F(z)}{z-x} \frac{E\left(\omega \frac{x-a}{z-a}\right)}{E(\omega)} d\omega$$

où le contour S est un contour fermé qui étant situé à l'intérieur de A embrasse la droite (ax).»

Revenons maintenant à la formule (117) et faisons y comme auparavant dans la formule (118)

$$E(x) = E_{\alpha}(x).$$

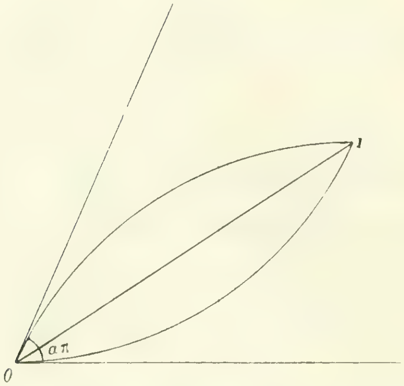
Supposons encore:

$$2 > \alpha > 0$$

Faisons décrire à la variable y autour de la ligne (01) une figure cunéiforme composée de deux arcs de cercle symétriques par rapport à cette ligne et se coupant aux deux points 0 et 1 sous l'angle $\alpha\pi$.

Désignons par $V^{(\alpha)}$ l'étoile de centre zéro inscrite dans l'étoile principale A qui est engendrée par cette figure cunéiforme comme figure génératrice.[1]

[1] pour la définition de »figure génératrice» engendrant une étoile inscrite dans une autre étoile, voir page 219 de ma troisième note.



C'est, légérement modifiée la même étoile que j'ai discutée autre fois avec M. Vito Volterra.[1]

Choisissons pour S une ligne qui embrasse la figure génératrice par rapport à la ligne (01) en étant en même temps située à l'intérieur de l'étoile $V^{(\alpha)}$. Désignons par $\bar{S}$ une ligne décrite par $z = \frac{1}{y}$ en même temps que y décrit la ligne S. A la figure cunéiforme dans le plan des y qui a la ligne (01) pour axe correspondent dans le plan des z deux demi-droites symmétriques par rapport à l'axe réel passant par le point $z = 1$ et se coupant sous l'angle $\alpha\pi$.

La ligne S est donc une ligne fermée qui embrasse l'origine et reste toujours du même côté des deux demi-droites que l'origine. On voit donc, à cause de la propriété connue de la fonction $E_\alpha(x)$, que

$$\lim_{\omega=\infty} E_\alpha(\omega(z-1))$$

s'approche indéfiniment de zéro et d'une manière uniforme, pour tous les points z qui appartiennent à S.

On a par conséquent:

$$(123) \qquad \lim_{\omega=\infty} \int_0^S \frac{F(xy)}{y-1} E_\alpha\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy = 0$$

[1] voir page 229 de ma troisième note.

et on obtient au moyen de la formule (117):

$$
(124)\quad \begin{cases}
FV^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}} \omega^{\nu+1}, \\[2ex]
FV^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\displaystyle\int_0^\omega \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu, \\[2ex]
FV^{(\alpha)}(x) = \displaystyle\int_0^\infty \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} (\omega x)^\nu \right) d\omega.
\end{cases}
$$

En faisant $\alpha = 1$ on obtient pour l'étoile $V^{(\alpha)}$ l'étoile de M. BOREL que j'ai désignée par $B^{(1)}$. La première et la troisième formule deviennent alors celles de M. BOREL, la seconde celle que j'ai indiquée dans ma quatrième note (formule (37)).

Si on introduit au lieu de $E_\alpha(x)$ une fonction $E(x)$ de l'espèce que j'ai considérée dans mes notes des Comptes Rendus aux dates du 11 et du 18 avril 1904 c'est à dire une fonction telle que $E(0) = 1$ et que, quand la variable réelle et positive ω augmente au dessus de toute limite, $E(\omega x)$ s'approche d'une manière uniforme de zéro pour un domaine fini quelconque de x ne comprenant pas l'axe réel positif, on obtient les formules:

$$
(125)\quad \begin{cases}
FA(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}} \omega^{\nu+1}, \\[2ex]
FA(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\displaystyle\int_0^\omega \dfrac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu, \\[2ex]
FA(x) = \displaystyle\int_0^\infty \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \dfrac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}} (\omega x)^\nu \right) d\omega
\end{cases}
$$

où les seconds membres sont uniformément convergents pour chaque domaine fini situé à l'intérieur de l'étoile principale.

Les résultats que nous venons d'obtenir par la considération de la formule (117) peuvent être résumés dans le théorème suivant:

Théorème 11 b. »Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive plus petite que 2 et par $V^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A, inscrite en A et engendrée par une figure cunéiforme ayant l'angle $\alpha\pi$ et tournant autour d'un de ses sommets qui doit être situé au centre a. L'étoile A étant l'étoile principale appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ assujetties à la condition de Cauchy on a les deux systèmes d'égalités.

$$FV^{(\alpha)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\Big(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}\Big)\frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\,\omega^{\nu+1},$$

$$FV^{(\alpha)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\int_0^{\omega} E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu}d\omega}{(\underline{|\nu})^2}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

$$FV^{(\alpha)}(x) = \int_0^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\underline{|\nu})^2}F^{(\nu)}(a)(\omega x)^{\nu}\Big)d\omega,$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\Big(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}\Big)\frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\,\omega^{\nu+1},$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\int_0^{\omega} E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu}d\omega}{(\underline{|\nu})^2}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\int_0^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\underline{|\nu})^2}F^{(\nu)}(a)(\omega x)^{\nu}\Big)d\omega$$

où $E_\alpha(x)$ désigne la fonction

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\Gamma(1+\alpha\nu)}$$

et où ω est une variable positive. Le premier système d'égalités a lieu partout à l'intérieur de $V^{(a)}$ et le second partout à l'intérieur de A. Les seconds membres du premier système sont uniformément convergents pour tout domaine à l'intérieur de $V^{(a)}$, les seconds membres du deuxième système sont uniformément convergents pour tout domaine à l'intérieur de A. Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura l'égalité:

$$FV^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots$$

$$+ \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \Big) \frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1}$$

$$= FV^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^\nu d\omega}{(\underline{|\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

$$= FV^{(a)}(x) - \int_0^\omega \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\underline{|\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^\nu \Big) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{F(z)}{z-x} E_\alpha\Big(\omega \frac{x-z}{z-a}\Big) dz$$

qui a lieu partout à l'intérieur de $V^{(a)}$ si S désigne un contour fermé situé à l'intérieur de $V^{(a)}$ et embrassant la figure génératrice par rapport à la droite (ax).

Si on introduit au lieu de $E_\alpha(x)$ une fonction $E(x)$ telle que $E(\omega x)$ s'approche indéfiniment de zéro quand la variable reelle positive ω augmente au dessus de toute limite tant que x appartient à un domaine fini ne comprenant pas l'axe réel positif, on obtient les formules

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(x)(x-a) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \Big) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1},$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu} d\omega}{(\underline{|\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

$$FA(x) = \int\limits_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\underline{|\nu})} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^{\nu} d\omega$$

où les seconds membres sont uniformément convergents pour tout domaine à l'intérieur de A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura:

$$FA(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \Big) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1}$$

$$FA(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu} d\omega}{(\underline{|\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

$$FA(x) - \int\limits_0^{\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\underline{|\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^{\nu} d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \frac{F(z)}{z-x} E\Big(\omega \frac{x-z}{z-a}\Big) dz$$

où S désigne un contour fermé embrassant la ligne (ax) et situé à l'intérieur de l'étoile A.

L'expression

$$\sum_{\nu=0}^{r} \frac{\int_0^\infty E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^\nu d\omega}{(\underline{|\nu})^2} k_\nu x^\nu$$

dans le second membre de l'égalité

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^\nu d\omega}{(\underline{|\nu})^2} k_\nu x^\nu \tag{126}$$

est une fonction entière de la variable x.

L'égalité (126) nous permet par conséquent de compléter ainsi le théorème ***G a.***

G b. »Soit $FA(x)$ une branche fonctionnelle quelconque appartenant aux constantes $k_0, k_1, \ldots, k_\nu, \ldots$ dont A est l'étoile principale. On peut toujours à l'aide des constantes k former une fonction entière de x, $G_\omega(x)$ qui en outre de x et des k dépende d'un paramètre réel et positif ω et qui soit telle que

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_\omega(x) = FA(x).$$

Il y a, comme je l'ai déjà remarqué à la fin du paragraphe précédent, cette différence entre les formules obtenues alors et celles du présent paragraphe qu'il n'est pas établi que les dernières ont une étoile de convergence.

REMARQUES SUR UN THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Extraits de deux lettres adressées à M. Mittag-Leffler)

PAR

ERNST LINDELÖF.

En étudiant ces derniers temps la théorie des ensembles, j'ai été amené à m'occuper en particulier du théorème fondamental de MM. CANTOR et BENDIXSON,[1] théorème sur lequel M. SCHOENFLIES est revenu dans une publication récente.[2] Les démonstrations de tous ces auteurs reposent sur la notion des nombres transfinis que M. CANTOR a introduits dans l'Analyse. Cependant, la partie la plus importante du théorème en question, celle qui concerne la décomposition d'un ensemble fermé en un ensemble parfait et un ensemble dénombrable, semble assez étrangère à la notion du transfini, et il est donc désirable d'en trouver une démonstration où cette notion n'intervienne pas. C'est aussi, si je ne me trompe, l'opinion que vous avez exprimée lors de notre dernière entrevue. Or, je me suis aperçu qu'on peut y parvenir en apportant à la démonstration de M. BENDIXSON une légère modification qui, en somme, revient à un changement de terminologie. C'est ce que je me permettrai de vous indiquer en quelques mots ci-après.

Quant à la seconde partie du même théorème, la propriété fondamentale des ensembles dérivés, jointe à la seule définition des nombres transfinis, suffit pour l'établir une fois qu'on aura démontré la première

[1] Acta mathematica, t. 2.

[2] Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1903 Heft 1.

partie. Je n'en parlerai donc pas dans la suite, et je me bornerai à la première partie du théorème qui s'énonce ainsi:

Tout ensemble fermé non dénombrable se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable.

1. Toutefois je me placerai d'abord à un point de vue plus général, en considérant un ensemble non dénombrable quelconque, (P), fermé ou non; je suppose cet ensemble situé dans un espace à un nombre fini n de dimensions, ou plutôt, pour simplifier, dans une région limitée T de cet espace, hypothèse qui ne restreint en rien la généralité, puisqu'on peut toujours la réaliser par une projection convenable de l'espace.

Voici maintenant une nouvelle notion que j'introduirai et qui va jouer un rôle fondamental dans la démonstration:

Je dirai qu'un point donné C de la région T constitue *un point de condensation de l'ensemble* (P), si une sphère construite de ce point comme centre, quelque petit qu'on en choisisse le rayon, renferme toujours une infinité non dénombrable de points P.

Cela posé, je démontre successivement les propositions suivantes:

(a) *La région T comprend au moins un point de condensation C de l'ensemble* (P).

La démonstration est analogue à celle par laquelle on prouve qu'il y a dans T au moins un point limite de (P). On peut supposer tout d'abord que la région T affecte la forme d'un cube dont les arêtes sont parallèles aux axes des coordonnées. Divisons T par exemple en 2^n cubes égaux par des plans parallèles aux plans des coordonnées. L'un au moins de ces cubes comprendra nécessairement, à l'intérieur ou à la surface, une partie non dénombrable de l'ensemble (P); car si chacun d'eux n'en comprenait qu'une partie dénombrable, la somme de tous ces ensembles partiels serait également dénombrable et, par suite, il en serait de même de (P). En choisissant donc, suivant une convention déterminée, l'un des cubes qui renferment une infinité non dénombrable de points P, puis en divisant celui-ci en 2^n cubes plus petits, et en continuant de la sorte, on arrivera bien à prouver l'existence d'un point C jouissant de la propriété distinctive des points de condensation.

(b) *L'ensemble C des points de condensation de (P) est un ensemble fermé.*

Soit en effet C' un point limite de l'ensemble (C). Toute sphère décrite de C' comme centre, quelque petite qu'elle soit, comprendra nécessairement des points C dans son intérieur et renfermera par suite, d'après la définition même des points C, une partie non dénombrable de l'ensemble (P). Le point C' est donc lui-même un point de condensation de (P) et figure, par conséquent, dans l'ensemble (C), C. Q. F. D.

En désignant maintenant par (R) l'ensemble des points P qui ne figurent pas dans l'ensemble (C), je démontrerai cette nouvelle proposition:

(c) *L'ensemble (R) est dénombrable.*

A cet effet, je n'ai qu'à répéter une démonstration donnée par M. PHRAGMÉN,[1] en y changeant seulement la terminologie.

Puisque (C) est un ensemble fermé, les distances d'un point donné quelconque de l'ensemble (R) aux différents points C admettront un minimum déterminé ∂ distinct de zéro. Fixons une suite de nombres positifs décroissant vers zéro:

$$\partial_1 > \partial_2 > \ldots > \partial_\nu > \ldots \qquad \left(\lim_{\nu=\infty} \partial_\nu = 0\right),$$

et divisons (R) en des ensembles partiels: $(R_1), (R_2), \ldots, (R_\nu), \ldots\ldots,$ (R_ν) désignant l'ensemble des points de (R) qui vérifient la condition

$$\partial_\nu < \partial \leqq \partial_{\nu-1}.$$

Je dis d'abord que chacun de ces ensembles partiels est dénombrable. En effet, si (R_ν) par exemple était un ensemble non dénombrable, il en existerait au moins un point de condensation dans la région T, d'après la première proposition démontrée ci-dessus. Ce point serait aussi point de condensation pour l'ensemble (P), dont (R_ν) fait partie, et figurerait par suite dans l'ensemble (C). Mais cela est impossible, car le point en question, étant point limite de l'ensemble (R_ν), aura nécessairement une distance $\geqq \partial_\nu$ à l'un quelconque des points C. Donc (R_ν) est bien un

[1] Acta mathematica, t. 5.

ensemble dénombrable, et comme nous n'avons qu'une infinité dénombrable de tels ensembles, leur somme, c'est à dire (R), sera également dénombrable, C. Q. F. D.

(d) *L'ensemble* (C) *est parfait.*

Puisque j'ai déjà démontré que cet ensemble est fermé, il ne me reste plus qu'à faire voir qu'il ne saurait renfermer de points isolés. Admettons donc un instant que C_1 soit un point isolé de (C) et, de ce point comme centre, décrivons une sphère S laissant à l'extérieur tous les autres points C. La partie $(P)_S$ de l'ensemble (P) qui est intérieure à cette sphère doit être un ensemble non dénombrable, puisque C_1 en est un point de condensation. Mais, d'autre part, tous les points P compris dans S, excepté le seul point C_1 dans le cas où celui-ci figure dans l'ensemble (P), font partie de l'ensemble (R), et comme celui-ci est dénombrable, d'après la proposition (c), il en doit donc être de même de $(P)_S$. Cette contradiction prouve l'exactitude de la proposition énoncée.

En somme, j'ai donc démontré ce théorème:

Étant donné un ensemble non dénombrable quelconque (P) *situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, les points de cet espace qui constituent des points de condensation de l'ensemble* (P) *forment un ensemble parfait* (C), *et les points de* (P) *qui ne figurent pas dans* (C) *forment un ensemble dénombrable* (R).

2. On voit qu'il y a des points P, et même une infinité non dénombrable de ces points, qui figurent dans l'ensemble (C), et on peut ajouter qu'une sphère arbitrairement petite décrite d'un point quelconque C comme centre renfermera toujours une infinité non dénombrable de points P faisant partie de l'ensemble (C). On peut en tirer, en particulier, cette conséquence:

Tout ensemble infini de points, situé dans un espace à un nombre fini de dimensions et tel, qu'autour de chacun de ses points on puisse construire une sphère qui n'en renferme qu'une partie dénombrable, est lui-même un ensemble dénombrable.

Je ferai remarquer qu'en s'appuyant sur cette proposition qui, au premier abord, semble presque intuitive, on peut démontrer en quelques

mots le théorème du n° 1. Il serait donc intéressant de trouver une démonstration directe et simple de la proposition en question.

3. En revenant maintenant aux considérations développées au n° 1, j'introduirai cette nouvelle hypothèse que l'ensemble (P) est *fermé*, c'est à dire qu'il comprend tous ses points limites. Tout point de condensation étant en même temps point limite, on voit que l'ensemble (C) est dans ce cas compris tout entier dans l'ensemble donné (P), de sorte qu'on aura

$$(P) = (R) + (C).$$

C'est là précisément le théorème de MM. Bendixson et Cantor que je voulais démontrer.

Helsingfors, juillet 1903.

II.

Une remarque de M. Borel, à qui j'avais communiqué le contenu de ma dernière lettre, m'ayant conduit à étudier de nouveau la proposition que j'y ai établie au n° 2, je me suis aperçu qu'on peut la rattacher à un théorème général très élémentaire, qui constitue d'ailleurs l'extension directe d'un théorème de M. Borel. Par cette voie, on arrive à une nouvelle démonstration du théorème fondamental de MM. Cantor et Bendixson qui me semble remarquable par son caractère direct et intuitif, et que je me permettrai de vous présenter ici.

1. Je commence par démontrer le lemme suivant, qui est d'ailleurs, géométriquement, presque évident.

Étant donné, dans un espace à un nombre fini de dimensions, un ensemble borné quelconque de points, (P), si, de chacun de ses points comme centre, on construit une sphère d'un rayon supérieur ou égal à une longueur donnée r, on pourra toujours choisir un nombre fini de ces sphères de telle sorte que tout point de (P) soit intérieur à l'une d'elles.

Dans l'ensemble (P), je prends au hasard un point P_1, puis je choisis un point P_2 dont la distance à P_1 soit $\geqq r$, puis un point P_3 dont la distance à chacun des points P_1 et P_2 soit $\geqq r$, puis un point P_4 dont la distance à chacun des points P_1, P_2, P_3 soit $\geqq r$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de point satisfaisant aux conditions requises.

Il est en effet évident que le procédé que je viens de décrire ne saurait fournir qu'un nombre *fini* de points

$$P_1\,,\; P_2\,,\; P_3\,,\; \ldots . \tag{1}$$

Pour le faire nettement voir, il suffit de construire de chacun de ces points comme centre une sphère de rayon $\frac{r}{2}$ et, d'autre part, une surface fermée T enveloppant tout l'ensemble (P) et ayant à l'un quelconque de ses points une distance supérieure à $\frac{r}{2}$. Les sphères seront extérieures l'une à l'autre, mais intérieures à la surface T, de sorte que la somme de leurs volumes sera inférieure au volume V limité par cette surface. Donc le nombre n des points (1) sera certainement inférieur à $\frac{V}{v}$, en désignant par v le volume d'une sphère de rayon $\frac{r}{2}$.

Tout point P ayant, d'après ce qui précède, une distance inférieure à r de l'un au moins des points (1), on voit dès lors que les n sphères S correspondant à ces mêmes points jouissent bien de cette propriété, que tout point P est intérieur à l'une d'elles.

2. J'arrive au théorème général annoncé au début de ma lettre.

Théorème. *Étant donné un ensemble quelconque de points, (P), situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, si à chaque point P on fait correspondre une sphère S ayant ce point comme centre, on pourra choisir une infinité dénombrable de ces sphères de telle sorte, que tout point de l'ensemble donné soit intérieur à l'une d'elles.*

Comme on peut décomposer un ensemble quelconque en une infinité dénombrable d'ensembles bornés, il suffit évidemment de démontrer le théorème dans le cas où *l'ensemble (P) est borné.*

Fixons une suite indéfinie de nombres positifs décroissant vers zéro:

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n > \ldots \qquad \left(\lim_{n=\infty} r_n = 0\right),$$

divisons les sphères S en ensembles partiels

$$(S)_1\,,\ (S)_2\,,\ \ldots,\ (S)_n\,,\ \ldots,$$

suivant que leurs rayons vérifient les inégalités:

$$r \geqq r_1\,, \quad \text{resp.} \quad r_1 > r \geqq r_2\,,\ \ldots,\ r_{n-1} > r \geqq r_n\,,\ \ldots.$$

et désignons par

$$(P)_1\,,\ (P)_2\,,\ \ldots,\ (P)_n\,,\ \ldots$$

les parties de l'ensemble (P) formées par les centres des sphères S comprises resp. dans les ensembles précédents.

D'après le lemme démontré ci-dessus, on pourra choisir un nombre fini de sphères de l'ensemble $(S)_1$ de telle sorte que tout point de l'ensemble $(P)_1$ soit intérieur à l'une d'elles; de même un nombre fini de sphères de l'ensemble $(S)_2$ de telle sorte que tout point de l'ensemble $(P)_2$ soit intérieur à l'une d'elles, et ainsi de suite. En somme, on aura donc une infinité dénombrable de sphères S telles que tout point de l'ensemble donné soit intérieur à l'une d'elles au moins, C. Q. F. D.

Si, en particulier, on suppose l'ensemble (P) borné et *fermé*, on peut démontrer qu'il existe un nombre *fini* de sphères S répondant aux conditions voulues. C'est là le théorème de M. Borel[1] dont j'ai parlé au début de cette lettre, et sur lequel il avait bien voulu appeler mon attention.

Du théorème que je viens de démontrer découle immédiatement la proposition suivante, établie au n° 2 de ma dernière lettre:

Étant donné un ensemble de points, (P), situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, si, autour de chacun de ses points, on peut construire une sphère qui ne renferme qu'un nombre dénombrable de points P, on peut affirmer que (P) est un ensemble dénombrable.

En effet, d'après le théorème précédent on peut, parmi les sphères envisagées, en choisir une infinité dénombrable de telle sorte que tout point

[1] Comptes rendus, 4 mai 1903. La condition que l'ensemble (P) soit fermé n'y figure pas expressément, évidemment par inadvertance, puisque cette condition joue un rôle essentiel dans la démonstration qu'avait donnée M. Borel p. 42—43 de ses *Leçons sur la théorie des fonctions*, et à laquelle il renvoie dans la note citée.

P soit intérieur à l'une d'elles, et comme chacune de ces sphères, par hypothèse, ne renferme qu'un nombre dénombrable de points P, il s'ensuit bien que l'ensemble (P) est lui-même dénombrable.

3. Après ces préliminaires, voici maintenant avec quelle facilité on établit le théorème fondamental de MM. Cantor et Bendixson:

Tout ensemble fermé non-dénombrable (P), situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable.

Écrivons $(P) = (R) + (C)$, l'ensemble (R) comprenant tout point P tel qu'on puisse l'entourer d'une sphère qui ne renferme qu'une partie dénombrable de (P), et l'ensemble (C) tous les autres points P.

De la dernière proposition démontrée ci-dessus, il résulte immédiatement que *l'ensemble (R) est dénombrable* et que, par suite, l'ensemble (C) existe effectivement et comprend une infinité non dénombrable de points.

D'après la définition même de ce dernier ensemble, tout point C jouit de cette propriété qu'une sphère arbitrairement petite ayant ce point comme centre renferme une infinité non dénombrable de points P. Or, l'ensemble (R) étant dénombrable, la sphère considérée renfermera nécessairement aussi des points C, et même une infinité non dénombrable de ces points; d'où cette conséquence que *l'ensemble (C) ne comprend pas de points isolés.*

D'ailleurs *tout point limite C' de l'ensemble (C) fait lui-même partie de cet ensemble.* En effet, le point C' est d'abord compris dans l'ensemble (P), puisque celui-ci est fermé. D'autre part, si de C' comme centre on construit une sphère aussi petite qu'on voudra, celle-ci renfermera à l'intérieur des points C et, par suite, une infinité non dénombrable de points P. Donc C' figure bien dansl'ensemble (C), ce que nous voulions démontrer.

Par conséquent, (C) *est un ensemble parfait,* et la démonstration se rouve ainsi achevée.

Helsingfors, août 1903.

ÜBER DEN FUNDAMENTALSATZ IN DER TEORIE DER FUNKTIONEN $E_\alpha(x)$

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

Erst neuerdings ist durch Herrn MITTAG-LEFFLER die Aufmerksamkeit auf die Funktion

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\Gamma(\alpha\nu + 1)}$$

gelenkt worden.[1] Von diesem Forscher sind aber auch sogleich die höchst interessanten Eigenschaften der Funktion klargelegt, auf denen die Rolle beruht, welche die Funktion bei der Herstellung in möglichst ausgedehnten Bereichen konvergierender Ausdrücke für analytische Funktionen spielen wird. Man gelangt in der Tat zur naturgemässen Erweiterung der von Herrn BOREL gegebenen exponentiellen Summationsmetode,[2] welche als spezieller Fall für $\alpha = 1$ eintritt. Für den Hauptsatz in der Teorie der Funktionen $E_\alpha(x)$ habe ich nun einen neuen Beweis gefunden, welchen ich auf der freundlichen Aufforderung des Herrn MITTAG-LEFFLER hier veröffentliche. Derselbe nimmt seinen Ausgangspunkt in den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die Funktionen $E_\alpha(x)$ für rationale α genügen.

[1] Comptes Rendus (2 mars, 12 octobre 1903).

[2] Man sehe etwa die Darstellung bei BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, chapitre III, IV (Paris 1901).

§ 1.

Es sei zunächst $\alpha = \frac{1}{k}$, wo k eine ganze rationale Zahl bedeutet. Die Funktion $E_{k-1}(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = kx^{k-1}y + k\sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}.$$

Nach der gewöhnlichen Integrationsmetode erhält man hieraus

$$(2) \qquad y = e^{x^k}\left[c + \int_0^x ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right].$$

Soll nun insbesondere $y = E_{k-1}(x)$ sein, so hat man für $x = 0$, $y = 1$, wodurch die Konstante $c = 1$ bestimmt wird. *Es besteht mithin die Identität*

$$(3) \qquad E_{k-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} = e^{x^k}\left[1 + \int_0^x ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right].$$

Die Reihe $E_{k-1}(x)$ lässt sich in eine Summe von k Partialreihen $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$ zerlegen, so dass

$$(4) \qquad E_{k-1}^{(\nu)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+kn}}{\Gamma\left(n+\frac{\nu}{k}+1\right)}.$$

Offenbar hat man $E_{k-1}^{(0)}(x) = e^{x^k}$ und für $\nu = 1, \ldots, k-1$

$$(5) \qquad E_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_0^x ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Es ist der in (3) gegebene Ausdruck für $E_{k-1}(x)$, welchen wir hier diskutieren wollen. Dabei sind für $x = re^{i\varphi}$ die folgenden *drei Hauptfälle* zu unterscheiden:

$$1)\qquad -\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k};$$

$$2)\qquad \frac{4\mu - 1}{2k}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{4\mu + 1}{2k}\pi; \qquad (\mu = 1, \ldots, k-1)$$

$$3)\qquad \frac{4\mu + 1}{2k}\pi < \varphi < \frac{4\mu + 3}{2k}\pi. \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Der Hauptsatz, welchen wir beweisen wollen, besagt nun, dass im Falle 1)

$$\lim_{x=\infty} E_{k-1}(x) = ke^{x^k},$$

dagegen in den Fällen 2) und 3)

$$\lim_{x=\infty} E_{k-1}(x) = 0.$$

§ 2.

Es sei also zunächst

$$-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}.$$

Liegt nun x auf der positiven reellen Axe, so ergiebt sich für $\nu > 0$ unmittelbar

$$(6)\qquad E_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_0^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz$$

$$= e^{x^k} - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Es handelt sich also um den Wert von

$$(7)\qquad F(\nu, x) = e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Durch wiederholte partielle Integration bekommen wir

$$(8)\qquad F_{k-1}^{(\nu)}(x) = \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-nk+\nu}}{\Gamma\left(-n+\frac{\nu}{k}+1\right)} + e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{-n_1k+\nu-1}}{\Gamma\left(-n_1+\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Für $F_{k-1}^{(\nu)}(x)$ erhält man demnach einen asymptotischen Ausdruck durch die halbkonvergente Reihe

$$(9)\qquad \sum_{n>0}\frac{x^{-nk+\nu}}{\Gamma\left(-n+\frac{\nu}{k}+1\right)};$$

welche in formaler Hinsicht als eine Fortsetzung der Reihe $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ für negative Potenzen von x aufzufassen ist. Bezüglich der hierbei erreichten Genauigkeit, so findet man nach der gewöhnlichen Metode, dass, falls man die Reihe (9) mit dem kleinsten Gliede abbricht, so hat man *den Betrag von $F_{k-1}^{(\nu)}(x)$, abgesehen von einem Restgliede von der Grössenordnung $x^{\frac{k}{2}}e^{-x^k}$.*

Berücksichtigen wir die so erhaltenen Resultate für $\nu = 1, \ldots, k-1$, so ergiebt sich

$$(10)\qquad E_{k-1}(x) = ke^{x^k} - \sum_{\nu=1}^{k-1} F_{k-1}^{(\nu)}(x) = ke^{x^k} - F_{k-1}(x),$$

wo $F_{k-1}(x)$ sich mit einer Genauigkeit von der Grössenordnung $x^{\frac{k}{2}}e^{-x^k}$ durch die halbconvergente Reihe

$$(11)\qquad \sum_{n>0}\frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)}$$

abschätzen lässt. Es liefert dabei (11) die formale Fortsetzung der Reihe $E_{k-1}(x)$ für negativen Potenzen von x.

Diese Tatsache gilt aber nicht nur für die positive reelle Axe, sondern für jede Stelle $x = re^{i\varphi}$, wenn $-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}$. Wir setzen $X = Re^{i\varphi}$ und beachten, dass

$$(12)\qquad \int ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz = 0,$$

falls man über einen geschlossenen Weg integriert, welcher sich folgendermassen zusammensetzen lässt:

1) aus der positiven reellen Axe von O bis R;

2) aus dem innerhalb unseres Bereiches verlaufenden Kreisbogen RX;

3) aus der geraden Linie XO.

Nimmt man $R = \infty$, so verschwindet das Integral über RX. Die beiden anderen sind also einander entgegengesetzt gleich. Man bekommt mithin

$$(13) \qquad \lim_{|X|=\infty} \int_0^X k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz = 1.$$ [1]

Also wird

$$(14) \qquad e^{x^k} \int_0^x k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz = e^{x^k} - \lim_{|X|=\infty} e^{x^k} \int_x^X k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz.$$

Da man für letzteres Integral auch in dem hier betrachteten allgemeineren Falle einen asymptotischen Ausdruck durch die halbkonvergente Reihe (9) findet, so ist unsere Behauptung erwiesen.

§ 3.

In ganz anderer Weise gestalten sich die Verhältnisse in einem der $k-1$ Bereiche, für welche $\frac{4\mu - 1}{2k}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{4\mu + 1}{2k}\pi$ $(\mu = 1, \ldots, k-1)$. Zuerst lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die halbierende Gerade $\varphi = \frac{2\mu}{k}\pi$. Betrachten wir also eine Stelle x auf dieser Geraden und untersuchen, wie sich die Formel (6) umändert, wenn für den Integrationsweg

---

[1] Für $\varphi = \pm \frac{\pi}{2k}$ konvergiert zwar dieses Integral nicht absolut. Man findet aber leicht, dass, falls man dasselbe in einen reellen und einen imaginären Bestandteil auflöst, diese sich wie Reihen von absolut abnehmenden, abwechselnd positiven und negativen Gliedern verhalten.

die in Rede stehende Gerade dieselbe Rolle wie im vorigen Falle die positive reelle Axe spielt. Es ergiebt sich

$$(6') \qquad E_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k} \int_0^\infty k e^{-|z|^k} \frac{|z|^{\nu-1} e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} d|z| - e^{x^k} \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz$$

$$= e^{x^k} e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i} - e^{x^k} \int_x^\infty k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz.$$

Summieren wir jetzt die $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$, so erhalten wir

$$(15) \qquad E_{k-1}(x) = e^{x^k}\left[1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i}\right] - e^{x^k} \int_x^\infty e^{-z^k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz.$$

Nach sehr bekannten Sätzen über Einheitswurzeln ist aber

$$1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i} = 0,$$

so dass

$$(15') \qquad E_{k-1}(x) = -e^{x^k} \int_x^\infty e^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz = -F_{k-1}(x).$$

Für $F_{k-1}(x)$ hat man aber hier genau wie im vorigen Paragraphen einen asymptotischen Ausdruck durch die halbkonvergente Reihe (11). *Der Unterschied ist also, dass im Ausdruck* (10) *für $E_{k-1}(x)$ das Hauptglied ke^{x^k} hier weggefallen ist.* Das kommt daher, dass im dortigen Bereiche die $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ sich zu einander mit ihren Hauptgliedern wie positive Einheiten verhalten, hier aber wie die Potenzen einer anderen k^{ten} Einheitswurzel als 1.

Diese Bedeutung der Reihe (11) *als asymptotischer Ausdruck von $-E_{k-1}(x)$ behält aber überhaupt im Bereiche, für welche*

$$\frac{4\mu-1}{2k}\pi \leq \varphi < \frac{4\mu+1}{2k}\pi,$$

ihre Gültigkeit. Dies ersieht man, indem man, ebenso wie am Ende des vorigen Paragraphen, ein geschlossenes Integral betrachtet; nur soll der Integrationsweg hier in derselben Weise in Bezug auf die halbierende Gerade orientiert sein, wie dort in Bezug auf die positive reelle Axe. *Das wesentliche ist also, dass das Integral* (13), *falls als Integrationsweg irgend eine Gerade in dem hier betrachteten Bereiche gewählt wird, zwar invariant bleibt, aber einen anderen konstanten Wert als* 1, *nämlich* $e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i}$ *annimmt.*

§ 4.

Es erübrigt noch die Verhältnisse zu untersuchen in den k Gebieten, für welche $\frac{4\mu+1}{2k}\pi < \varphi < \frac{4\mu+3}{2k}\pi$ $(\mu = 0, 1, \ldots, k-1)$. Dass für ein solches Argument φ $\lim\limits_{x=\infty} E_{k-1}(x) = 0$, ist sehr leicht aus (3) zu ersehen. Doch ist die genauere Bestimmung von $E_{k-1}(x)$ hier nicht ohne Schwierigkeit. Zu dem Ende wollen wir auf ein Verfahren einschlagen, welches auch in den vorigen Paragraphen anwendbar wäre. Den Integrationsweg zwischen 0 und x setzen wir aus zwei Stücken zusammen, nämlich aus der Geraden Ox_0 und dem Kreisbogen x_0x, wo wir den Punkt x_0 in solcher Weise wählen, dass der Modul $|x_0| = |x|$ und das Argument $= \frac{2\mu_1}{k}\pi$ wird; die ganze Zahl μ_1 bestimmen wir so, dass $\left|\varphi - \frac{2\mu_1}{k}\pi\right|$ so klein wie möglich ausfällt,[1] wenn φ nach dem Modul 2π genommen wird.

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden.

1) $$\mu_1 = 0.$$

Man bekommt dann nach § 2.

$$(16)\quad E_{k-1}(x) = ke^{x^k} + e^{x^k}\left|\int_0^{x_0} ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz + \int_{x_0}^{x} ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right|$$
$$= ke^{x^k} - F_{k-1}(x).$$

[1] Durch diese Wahl von μ_1 bekommt man die schärfste obere Grenze für das Restintegral in (17) bei der asymptotischen Darstellung. Ist aber jener kleinste Wert $= \frac{\pi}{2k}$, so hat man für μ_1 zwei Möglichkeiten, welche gleich vorteilhaft sind.

Durch partielle Integration findet man

$$(17)\qquad F_{k-1}(x)=\sum_{n=1}^{n_1}\frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)}-e^{x^k}\left[\int_{\infty}^{x_0}ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{z^{-n_1+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)}dz\right.$$

$$\left.+\int_{x_0}^{x}ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{z^{-n_1+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)}dz\right].\ [1]$$

2) $\mu_1>0.$

Nach § 3 hat man jetzt

$$(16')\qquad E_{k-1}(x)=e^{x^k}\left[\int_{\infty}^{x_0}ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz+\int_{x_0}^{x}ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right]$$

$$=-F_{k-1}(x),$$

wo wir in ersteren Integral die untere Grenze ∞ in der Richtung $\frac{2\mu_1}{k}\pi$ zu verstehen haben. Offenbar gestattet auch hier $F_{k-1}(x)$ eine Umformung wie (17). Will man nun das Restintegral in (17) abschätzen, so ist es von Bedeutung, dass die Funktion unter dem Integrationszeichen für die obere Grenze $z=x$ ihren grössten absoluten Betrag annimmt, falls man nämlich die Glieder in dem zugehörigen Polynome durch ihre Moduln ersetzt. Vermittelst Betrachtungen, welche, weil das Integral hier komplex ist, von etwas komplizierterer Art als in dem entsprechenden Falle in § 2 sind, findet man, dass n_1 sich so wählen lässt, dass das in Rede stehende

[1] Wir machen darauf aufmerksam, dass die rationale Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{k}\frac{z^{-n_1+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)}$$

in Wirklichkeit blos $k-1$ Glieder enthält, weil für $n_1-\nu=$ eine durch k teilbare Zahl der Nenner $\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)$ unendlich gross wird.

Restglied von der Grössenordnung $x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}$ wird. Eine solche Grösse bezeichnen wir mit $\left[x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right]$.

Wir dürfen also sagen, dass *die Funktion $E_{k-1}(x)$ sich in wesentlich verschiedener Weise verhält, jenachdem φ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{k}$ und $\frac{\pi}{k}$ eingeschlossen liegt oder nicht. Diese Tatsache findet ihren Ausdruck in den folgenden zwei Relationen, wo man n_1 in geeigneter Weise zu wählen hat.*[1]

1) *Hat man* $-\frac{\pi}{k} < \varphi < \frac{\pi}{k}$, *so gilt*

$$(18)\quad E_{k-1}(x) + \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)} = \sum_{n=-n_1}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} = ke^{x^k} + \left[x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right].$$

2) *In den restierenden Fällen, also für* $\frac{\pi}{k} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi}{k}$, *hat man dagegen*

$$(18')\quad E_{k-1}(x) + \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)} = \sum_{n=-n_1}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} = \left[x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right].$$

Man beachte, dass für die Grenzfälle $\varphi = \pm\frac{\pi}{k}$ die Bedeutungen von (18) und (18′) identisch sind.

Aus der Gestalt der Formeln (18) *und* (18′) *lassen sich unmittelbar Sätze über die mit den $E_{k-1}(x)$ analogen Funktionen*

$$E_{k-1,\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{k}+1\right)}$$

ablesen, wo λ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeuten kann. Durch eine blosse Umformung der genannten Formeln bekommen wir:

[1] und zwar in Abhängigkeit von $|x|$.

1) für $-\frac{\pi}{k} < \varphi < \frac{\pi}{k}$

$$(19) \qquad E_{k-1,\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{n_1+\lambda} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(\frac{-n+\lambda}{k}+1\right)}$$

$$= \sum_{n=-n_1-\lambda}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{k}+1\right)} = kx^{-\lambda}e^{x^k} + \left[x^{-\lambda+\frac{k}{2}}e^{-|x|^k}\right];$$

2) für $\frac{\pi}{k} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi}{k}$

$$(19') \qquad E_{k-1,\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{n_1+\lambda} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(\frac{-n+\lambda}{k}+1\right)}$$

$$= \sum_{n=-n_1-\lambda}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{k}+1\right)} = \left[x^{-\lambda+\frac{k}{2}}e^{-|x|^k}\right].$$

Entsprechende Sätze gelten aber noch für den Fall, dass λ keine ganze Zahl ist; Zwar folgen sie dann nicht als Korollare aus (18) und (18′), aber man kann leicht unsere nur auf die Funktionen $E_{k-1}(x)$ bezugnehmenden Rechnungen für die allgemeinere Funktionenklasse $E_{k-1,\lambda}(x)$ durchführen.

§ 5.

Die Teorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, wo α eine rationale Zahl $\frac{h}{k}$ ist, lässt sich auf den Fall, dass $\alpha = k^{-1}$ ist, zuruckführen. Es besteht ja die Identität

$$(20) \qquad E_{\frac{h}{k}}(x) = \frac{1}{h}\left[E_{k^{-1}}\left(x^{\frac{1}{h}}\right) + E_{k^{-1}}\left(\omega x^{\frac{1}{h}}\right) + \ldots + E_{k^{-1}}\left(\omega^{h-1}x^{\frac{1}{h}}\right)\right],$$

wo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{h}}$. Offenbar ist es erlaubt das Argument $\frac{\varphi}{h}$ für $x^{\frac{1}{h}}$ so zu fixieren, dass die Ungleichungen

$$0 < \frac{\varphi}{h} < \frac{2\pi}{h}$$

bestehen. In (20) kann man nun für jedes Glied $E_{k^{-1}}\left(\omega^K x^{\frac{1}{h}}\right)$ einen Ausdruck aus (18) oder (18') substituieren, und zwar aus (18), falls entweder

$$\frac{\varphi}{h} + \frac{2\pi K}{h} < \frac{\pi}{k}; \qquad \varphi + 2\pi K < \alpha\pi$$

oder auch

$$\frac{\varphi}{h} + \frac{2\pi K}{h} > 2\pi - \frac{\pi}{k}; \qquad \varphi + 2\pi(K - h) > -\alpha\pi.$$

Hiernach bekommt man die Darstellung

$$(21) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_K e^{\omega^{\frac{K}{\alpha}} x^{\frac{1}{\alpha}}} - \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma(-\alpha n + 1)} + \left[x^{\frac{1}{2\alpha}} e^{-|x|^{\frac{1}{\alpha}}}\right],$$

wo die Summation über die positiven und negativen ganzen Zahlen K ausgeführt wird, für welche

$$-\alpha\pi < \varphi + 2\pi K < \alpha\pi.$$

Um diesen hier nur für rationale Zahlen α bewiesenen Satz auf *reelle* irrationale Zahlen zu erweitern, ist man auf Grenzbetrachtungen hingewiesen. Doch wollen wir um so weniger auf die hierzu nötigen Erörterungen eingehen, als wir keine Möglichkeit sehen von unserem Ausgangspunkte eine allgemeine Teorie der Funktionen $E_\alpha(x)$ aufzubauen. Es ist uns in der Tat bekannt, dass Herr MITTAG-LEFFLER seine vielleicht interessantesten und überraschendsten Resultate eben für *imaginäre* α gewonnen hat.

ÉTUDE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR

J. MALMQUIST

à STOCKHOLM.

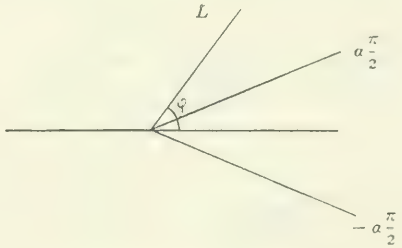
Les recherches de mon Professeur, M. MITTAG-LEFFLER, sur les séries [1]

$$E_a(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{\Gamma(1 + a\nu)}$$

ont montré l'existence d'une fonction entière $E_a(x)$ ayant la propriété suivante rélative à la croissance de la fonction le long de vecteurs issus de l'origine. Si φ est un nombre réel satisfaisant à la condition

$$\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}$$

$E_a(x)$ tendra vers zéro, si nous ferons croître x le long du vecteur L faisant l'angle φ avec l'axe réel est positif.



[1] Acta mathematica, t. 29.

Ce résultat fait probable l'existence d'une fonction entière ne devenant infinie que le long d'un seul vecteur issu de l'origine, et il est naturel de la chercher parmi les fonctions

$$\sum_\nu \frac{x^\nu}{\Gamma(1 + \nu\alpha_\nu)}$$

où α_ν est une fonction de ν tendant vers zero avec $\frac{1}{\nu}$,

Nous prendrons

$$\alpha_\nu = \frac{1}{(\log \nu)^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

et nous allons démontrer que *la fonction entière*

$$G(x) = \sum_2^\infty {}_\nu \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{(\log \nu)^\alpha}\right)}$$

tend vers zéro, si x tend vers l'infini le long d'un vecteur issu de l'origine ne coïncidant pas avec l'axe réel et positif.

D'abord, il est évident que $G(x)$ représente une fonction entière, car, la fonction $\Gamma(1 + n)$ croissant approximativement comme n^n, nous avons

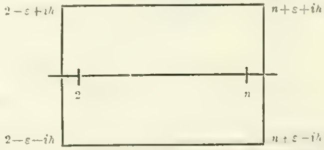
$$\lim_{\nu=\infty} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right)\right\}^{\frac{1}{\nu}} = \lim_{\nu=\infty} e^{\frac{1}{(\log \nu)^\alpha} \log \frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}} = \infty.$$

Pour démontrer la propriété énoncée de $G(x)$ concernant la croissance, considérons avec M. Mittag-Leffler l'intégrale [1]

$$\int_R \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{(\log z)^\alpha}\right)} dz$$

pris suivant un rectangle R ayant comme sommets les points

$$2 - \varepsilon - ih\,,\ 2 - \varepsilon + ih\,,\ n + \varepsilon + ih\,,\ n + \varepsilon - ih.$$



[1] loc. cit.

Nous choisirons la détermination de $(\log z)^\alpha$ que l'on obtiendra de la valeur réelle pour une valeur réelle de z par extension analytique le long d'un chemin situé dans R. Alors on trouvera facilement la valeur

$$\sum_{2}^{n}{}_{\nu} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right)}$$

de l'intégrale considerée, car les seules singularités de la fonction sous le signe $\int$ situées dans R sont

$$2, 3, \ldots, n$$

et les résidus correspondants

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{(\log 2)^\alpha}\right)}, \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{x}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{(\log 3)^\alpha}\right)}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{x^{n-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{(\log n)^\alpha}\right)}.$$

Ensuite, en posant

$$z = \tau + it$$

nous aurons

$$\frac{z}{(\log z)^\alpha} = \frac{\tau + it}{\left(\log \sqrt{\tau^2 + t^2} + i \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\tau}\right)^\alpha} = \frac{\tau + it}{\rho^\alpha (\cos \alpha\theta + i \sin \alpha\theta)} = R(\tau, t) + iI(\tau, t)$$

avec

$$\rho = \sqrt{(\log \sqrt{\tau^2 + t^2})^2 + \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\tau}\right)^2},$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\tau}}{\log \sqrt{\tau^2 + t^2}},$$

$$R(\tau, t) = \frac{1}{\rho^\alpha} (\tau \cos \alpha\theta + t \sin \alpha\theta),$$

$$I(\tau, t) = \frac{1}{\rho^\alpha} (-\tau \sin \alpha\theta + t \cos \alpha\theta)$$

les arc tg demeurant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Pour avoir une expression de la fonction $G(x)$, nous ferons croître R c'est-à-dire h et n d'une manière convenable déterminée de la façon suivante. Écrivons l'égalité évidente

$$\int_R = \int_{2-\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon-ih} + \int_{n+\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon+ih} + \int_{n+\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon+ih} + \int_{2-\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon-ih}$$

et cherchons à faire croître h et n de manière que les trois premières intégrales rectilignes tendent vers zéro.

Étudions d'abord l'intégrale

$$I_1 = \int_{n+\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon+ih} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1+\frac{z}{(\log z)^a}\right)} dz$$

qui est égale à

$$i\int_{-h}^{+h} \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1} \frac{x^{n+\varepsilon-2}x^{it}}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon, t)+iI(n+\varepsilon, t))} dt.$$

Nous aurons une valeur approchée de cette intégrale en observant que l'inégalité

$$R(\tau, t) > 0$$

a lieu pour toutes les valeurs de τ, t en question; car t et θ ont mêmes signes, si $\tau > 0$. Alors l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon, t)+iI(n+\varepsilon, t))}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon, t))}\sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon, t)}-e^{-\pi I(n+\varepsilon, t)}}{2\pi I(n+\varepsilon, t)}}$$

est vraie pour toutes les valeurs de t entre $-h$ et $+h$, car nous avons[1]

[1] loc. cit.

$$\frac{1}{\Gamma(1+\tau+it)\Gamma(1+\tau-it)}$$

$$= e^{C(\tau+it)} \prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{\tau+it}{\nu}\right) e^{-\frac{\tau+it}{\nu}} e^{C(\tau-it)} \prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{\tau-it}{\nu}\right) e^{-\frac{\tau-it}{\nu}}$$

$$= e^{2C\tau} \left\{ \prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{\tau}{\nu}\right) e^{-\frac{\tau}{\nu}} \right\}^2 \prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{t^2}{(\tau+\nu)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(1+\tau)}\right)^2 \prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{t^2}{\nu^2}\right) \frac{\prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{t^2}{(\tau+\nu)^2}\right)}{\prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{t^2}{\nu^2}\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(1+\tau)}\right)^2 \frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t} \frac{\prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{t^2}{(\tau+\nu)^2}\right)}{\prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{t^2}{\nu^2}\right)}.$$

En posant

$$x = re^{i\varphi}$$

nous concluons de là que la valeur absolue de I_1 est au plus égale à

$$M_1 = \operatorname*{Max}_{t=-h+\ldots+h} \left\{ \frac{2h}{|e^{2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1|} \frac{r^{n+\varepsilon-2}e^{-\varphi t}}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon,t))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon,t)}-e^{-\pi I(n+\varepsilon,t)}}{2\pi I(n+\varepsilon,t)}} \right\}.$$

Supposons que le maximum a lieu pour $t=t_n$. Faisons ensuite croître h et n d'une manière convenable. Nous allons voir qu'il est suffisant de poser

$$h = \frac{n}{(\log n)^\beta}, \qquad 0<\beta<1.$$

En effet, observons d'abord que l'on a

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{t_n}{n} = 0$$

d'où

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \theta(n+\varepsilon, t_n) = 0,$$

$$\rho(n+\varepsilon, t_n) = \log n(1+\varepsilon_n)$$

où

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0;$$

(Dans la suite nous entendrons toujours par ε_n une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$)

par suite

$$R(n + \varepsilon, t_n) = \frac{n}{(\log n)^\alpha}(1 + \varepsilon_n)$$

et

$$\Gamma(1 + R(n + \varepsilon, t_n)) = e^{n(\log n)^{1-\alpha}(1+\varepsilon_n)}$$

car

$$\Gamma(1 + n) = e^{n \log n(1+\varepsilon_n)};$$

de l'égalité

$$2\frac{n}{(\log n)^\beta} r^{n+\varepsilon-2} = e^{n\log r(1+\varepsilon_n)}$$

et du fait que r est constant nous concluons enfin

$$\frac{2\dfrac{n}{(\log n)^\beta} r^{r+\varepsilon-2}}{\Gamma(1 + R(n + \varepsilon, t_n))} = e^{-n(\log n)^{1-\alpha}(1+\varepsilon_n)}.$$

Pour avoir maintenant la valeur limite de M_1 quand n croît indéfiniment, il nous faut distinguer trois cas différents. Il pourrait arriver que pour certaines valeurs n' de n indéfiniment croissantes

$$\lim_{n'=\infty} \frac{t_{n'}}{n' \sin \alpha\theta(n' + \varepsilon, t_{n'})} = \infty.$$

Alors, le deuxième terme de l'expression de $I(n' + \varepsilon, t_{n'})$ en déterminera la croissance, d'où

$$I(n' + \varepsilon, t_{n'}) = \frac{t_n}{(\log n')^\alpha}(1 + \varepsilon_{n'}) = \frac{n'}{(\log n')^\alpha}\varepsilon_{n'}$$

car

$$t_{n'} = \varepsilon_{n'} n'.$$

Dans le deuxième cas nous aurons

$$\lim_{n''=\infty} \frac{t_{n''}}{n'' \sin \alpha\theta(n'' + \varepsilon, t_{n''})} = 0;$$

alors le premier terme de $I(n'' + \varepsilon, t_{n''})$ déterminera la croissance, d'où nous concluons

$$I(n'' + \varepsilon, t_{n''}) = \frac{n''}{(\log n'')^\alpha} \varepsilon_{n''}$$

comme précedemment, car $\sin \alpha\theta$ tend vers zéro.

Enfin nous aurons à considérer les valeurs n''' de n indéfiniment croissantes et telles que

$$\lim_{n'''=\infty} \frac{t_{n'''}}{n''' \sin \alpha\theta(n''' + \varepsilon, t_{n'''})} = k \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Alors, nous pouvons employer ou bien le premier ou bien le deuxième raisonnement, mais comme ils conduisent tous les deux au même résultat, il est démontré, que l'on a pour toutes les valeurs de n indéfiniment croissantes

$$I(n + \varepsilon, t_n) = \frac{n}{(\log n)^\alpha} \varepsilon_n.$$

De là nous concluons

$$\sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon, t_n)} - e^{-\pi I(n+\varepsilon, t_n)}}{2\pi I(n + \varepsilon, t_n)}} = e^{\frac{n}{(\log n)^\alpha} \varepsilon_n}$$

par suite

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^{\frac{n}{(\log n)^3}} r^{n+\varepsilon-2}}{\Gamma(1 + R(n + \varepsilon, t_n))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon, t_n)} - e^{-\pi I(n+\varepsilon, t_n)}}{2\pi I(n + \varepsilon, t_n)}} = 0.$$

Il reste à étudier

$$\left| [\text{illegible}] \quad 1 \right|;$$

pour des valeurs de n indéfiniment croissantes telles que t_n reste plus petit qu'un nombre fixe, cette expression restera aussi plus petite qu'un certain nombre fixe, pour des valeurs de n telles que

$$\lim_{n=\infty} t_n = +\infty$$

elle tendra vers zéro, si l'on a

$$\varphi > 0,$$

enfin, pour des valeurs de n telles que

$$\lim_{n=\infty} t_n = -\infty$$

elle tendra vers zéro, si

$$\varphi < 2\pi.$$

Par conséquent, h et n croissant de la manière indiquée, l'intégrale I_1 tendra vers zéro, si φ satisfait à la seule condition

$$0 < \varphi < 2\pi.$$

Passons maintenant à l'étude de l'intégrale

$$I_2 = \int_{2-\varepsilon+ih}^{n+\varepsilon+ih} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{(\log z)^\alpha}\right)} dz;$$

il est égale à

$$\int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\tau - 2\pi h} - 1} \frac{x^{\tau-2} x^{ih}}{\Gamma(1 + R(\tau, h) + iI(\tau, h))} d\tau.$$

Sa valeur absolue est donc au plus égale à

$$M_2 = \operatorname*{Max}_{\tau=2-\varepsilon \dots n+\varepsilon} \left\{ \frac{1}{|e^{2\pi i\tau - 2\pi h} - 1|} \int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} d\tau . e^{-\varphi h} \sqrt{\frac{e^{\pi I(\tau, h)} - e^{-\pi I(\tau, h)}}{2\pi I(\tau, h)}} \right\}.$$

L'intégrale

$$\int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} d\tau$$

qui se présente ici, tend vers zéro, h et n croissant de la façon supposée. En effet, en désignant par $\tau_{h,n}$ une valeur entre h et n, nous aurons

$$R(\tau_{h,n}, h) = \frac{\tau_{h,n}(1 + \varepsilon_n)}{(\log \tau_{h,n})^\alpha} \geqq k \frac{h}{(\log n)^\alpha} = k \frac{n}{(\log n)^{\alpha+\beta}} \qquad (k \text{ fixe})$$

le premier terme de $R(\tau_{h,n}, h)$ déterminant la croissance, car θ tend vers zéro. Donc

$$\int\limits_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} = \int\limits_{h}^{n+\varepsilon} + \int\limits_{2-\varepsilon}^{h} \leqq k' \frac{nr^n}{\Gamma(1 + R(\tau_{h,n}, h))} + \underset{\tau=2-\varepsilon\ldots h}{\mathrm{Max}} \frac{hr^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} \quad (k' \text{ fixe})$$

$$\leqq k'' \frac{nr^n}{e^{n(\log n)^{1-\alpha-\beta}(1+\varepsilon_n)}} + M \qquad (k'' \text{ fixe})$$

$$= \varepsilon_n + M,$$

si $\alpha + \beta < 1$, ce que nous supposons.

Soit τ_h la valeur de τ pour laquelle le maximum M aura lieu. Pour évaluer la limite de M il est suffisant de considérer deux cas. En premier lieu, pour les valeurs h' de h telles que

$$\lim_{h'=\infty} \frac{\tau_{h'}}{h' \sin \alpha\theta(\tau_{h'}, h')} = 0$$

nous aurons

$$\theta(\tau_{h'}, h') = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_{h'}}{\log h'}$$

$$\tau_{h'} = \frac{h'}{\log h'} \varepsilon_{h'};$$

en effet

$$\tau_{h'} = h' \varepsilon_{h'},$$

d'où

$$\theta(\tau_{h'}, h') = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_{h'}}{\log \sqrt{\tau_{h'}^2 + h'^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_{h'}}{\log h'};$$

ensuite, la condition imposée à h' donne la valeur assignée de $\tau_{h'}$.

La valeur trouvée de $\theta(\tau_{h'}, h')$ montre que le seconde terme de l'expression de $R(\tau_{h'}, h')$ détermine la croissance de cette fonction. Comme d'ailleurs

$$\rho(\tau_{h'}, h') = \log h'(1 + \varepsilon_{h'})$$

nous trouverons donc

$$R(\tau_{h'}, h') = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{h'(1 + \varepsilon_{h'})}{(\log h')^{1+\alpha}},$$

d'où enfin

$$\Gamma(1+R(\tau_{h'},h'))\frac{h'r^{\tau_{h'}-2}}{} = \frac{h'r^{\tau_{h'}}}{e^{\alpha\frac{\pi}{2}\frac{h'}{(\log h')^{\alpha}}(1+\varepsilon_{h'})}} = e^{-\alpha\frac{\pi}{2}\frac{h'}{(\log h')^{\alpha}}(1+\varepsilon_{h'})}.$$

Examinons maintenant le cas où h'' satisfait à la condition

$$\operatorname*{Lim}_{h''=\infty}\frac{\tau_{h''}}{h''\sin\alpha\theta(\tau_{h''},h'')} \neq 0.$$

Alors

$$\tau_{h''} = K(h'')\frac{h''}{\log h''}$$

où

$$\operatorname*{Lim}_{h''=\infty} K(h'') > 0,$$

car l'inégalité

$$\tau_h \leqq h$$

entraine

$$\theta(\tau_h, h) = \frac{\overline{K}(h)}{\log h} \quad \text{avec} \quad 0 < \overline{K}(h) < k \qquad (k \text{ fixe})$$

pour toutes les valeurs de h suffisamment grandes.

Il suit de là que

$$\tau_{h''}\cos\alpha\theta(\tau_{h''},h'') + h''\sin\alpha\theta(\tau_{h''},h'')$$

$$= K_2(h'')\frac{h''}{\log h''} + \overline{K}_1(h'')\frac{h''}{\log h''} = K_3(h'')\frac{h''}{\log h''},$$

K_2 et K_3 satisfaisant à la même condition que K, $\overline{K}_1$ ayant la même propriété que $\overline{K}$.

Comme d'ailleurs

$$\rho(\tau_{h''},h'') = \log h''(1+\varepsilon_{h''})$$

nous trouverons

$$R(\tau_{h''},h'') = K_3(h'')\frac{h''}{(\log h'')^{1+\alpha}}(1+\varepsilon_{h''})$$

et enfin

$$\frac{h'' r^{\tau_{h''}-2}}{\Gamma(1 + R(\tau_{h''}, h''))} = \frac{e^{\log r K(h'') \frac{h}{\log h''}(1+\varepsilon_{h''})}}{e^{K_3(h'') \frac{h''}{(\log h'')^\alpha}(1+\varepsilon_{h''})}} = \varepsilon_{h''}$$

car nous avons

$$K_3 = \overline{K}_1 + K_2 = \overline{K}_1 + K(1 + \varepsilon_{h''}) > K.$$

Il résulte de ces considérations que l'intégrale

$$\int_{2-\varepsilon}^{h} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} d\tau$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$; donc

$$\lim_{n=\infty} \int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma\left(1 + R\left(\tau, \frac{n}{(\log n)^\beta}\right)\right)} d\tau = 0.$$

Ensuite, observons que dans l'expression M_2

$$I(\tau, h) = h\varepsilon_h,$$

car nous avons

$$0 \leqq \tau \sin \alpha\theta < (n + 1)\theta < k\frac{n}{\log h} < k'\frac{n}{\log n} = h\varepsilon_h \qquad (k, k' \text{ fixe})$$

pour les grandes valeurs de n, d'où

$$-\tau \sin \alpha\theta + h \cos \alpha\theta = k'' h(1 + \varepsilon_h) \qquad (k'' \text{ fixe}).$$

Par suite, nous aurons

$$\lim_{h=\infty} \frac{e^{-\varphi h}}{e^{2\pi i\tau - 2\pi h} - 1} \sqrt{\frac{e^{\pi I(\tau, h)} - e^{-\pi I(\tau, h)}}{2\pi I(\tau, h)}} = 0$$

si

$$\varphi > 0$$

d'où l'on conclut que l'intégrale I_2 tend vers zéro, h et n croissant de la façon supposée.

De même, nous pouvons démontrer que sous la condition

$$\varphi < 2\pi$$

cette propriété appartient aussi à la troisième intégrale I_3 que l'on obtient de I_2 en changeant h en $-h$; car nous avons

$$R(\tau, -h) = R(\tau, h)$$

et

$$I(\tau, -h) = h\varepsilon_h$$

comme précédemment.

Nous arrivons ainsi au résultat que, sous la seule condition

$$0 < \varphi < 2\pi$$

les intégrales I_1, I_2, I_3 tendront vers zéro, le rectangle R se grandissant d'une manière convenable. De là nous concluons que *l'égalité*

$$G(x) = \operatorname*{Lim}_{h=\infty} \int_{2-\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon-ih} \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{(\log z)^a}\right)} dz$$

$$= \operatorname*{Lim}_{h=\infty} i \int_{+h}^{-h} \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1} \frac{x^{-\varepsilon+it}}{\Gamma\left(1 + \frac{2-\varepsilon+it}{(\log(2-\varepsilon+it))^a}\right)} dt$$

a lieu sous cette même condition.

Par suite, nous aurons

$$|G(x)|$$

$$< \operatorname*{Lim}_{h=\infty} \left[\int_{-h}^{+h} \frac{1}{|e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1|} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{\Gamma(1 + R(2-\varepsilon, t))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(2-\varepsilon, t)} - e^{-\pi I(2-\varepsilon, t)}}{2\pi I(2-\varepsilon, t)}} dt + \varepsilon_h \right]$$

$$= r^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1|} \frac{e^{-\varphi t}}{\Gamma(1 + R(2-\varepsilon, t))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(2-\varepsilon, t)} - e^{-\pi I(2-\varepsilon, t)}}{2\pi I(2-\varepsilon, t)}} dt$$

l'intégrale dans le dernier membre étant convergent, car nous avons

$$R(2-\varepsilon\,,\,t) = \alpha\frac{\pi}{2}\frac{|t|}{(\log|t|)^{1+a}}(1+\varepsilon_t),$$

$$I(2-\varepsilon\,,\,t) = \frac{t}{(\log|t|)^a}(1+\varepsilon_t)$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma(1+R(2-\varepsilon\,,\,t))}\sqrt{\frac{e^{\pi I(2-\varepsilon,t)}-e^{-\pi I(2-\varepsilon,t)}}{2\pi I(2-\varepsilon\,,\,t)}}$$
$$= e^{-\frac{\pi}{2}\frac{|t|}{(\log|t|)^a}(1+\varepsilon)+\frac{\pi}{2}\frac{t}{(\log|t|)^a}(1+\varepsilon_t)} = e^{t\varepsilon_t}$$

comme dans le second cas traité plus haut. Par suite, nous pouvons écrire

$$|G(x)| < r^{-\varepsilon}M(\varphi) \quad \text{si} \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

et alors, $M(\varphi)$ a la propriété d'être plus petit qu'un nombre fixe pour toutes les valeurs de φ satisfaisant à la condition

$$\varepsilon_1 < \varphi < 2\pi - \varepsilon_1,$$

ε_1 étant une certaine quantité positive. Il suit de là que $G(x)$ *tend uniformément vers zéro quand* x *s'éloigne à l'infini dans un angle déterminé par l'inégalité*

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$$

ε *étant un nombre positif arbitrairement petit.*

Au contraire, quand x s'éloigne à l'infini le long de l'axe réel et positif, $G(x)$ croit au delà de toute limite comme le montre la forme de la série représentant $G(x)$. Par une méthode directe on pourrait obtenir une valeur approchée de $G(x)$, mais cela est sans interêt en vertu d'un beau théorème de M. Phragmén [1] qui contient comme cas particulier le résultat qu'aucune fonction entière ayant la même propriété que $G(x)$ rélative à la croissance le long de vecteurs ne coinsidant pas avec l'axe réel et positif ne peut être de genre fini.

[1] Acta mathematica, t. 29. Théorème I.

ÜBER DIE NULLSTELLEN DER FUNKTIONEN $E_\alpha(x)$

VON

A. WIMAN
in UPSALA.

§ 1.

Für nähere Angaben über Lage und Dichtigkeit der Nullstellen einer in der Gestalt einer Potenzreihe gegebenen ganzen Funktion sind zwar im Allgemeinen höchst komplizierte Betrachtungen erforderlich. Doch lassen sich derartige Fragen für die ganzen Funktionen

$$E_\alpha(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \tag{1}$$

in ganz einfacher Weise erledigen. Diesen Umstand verdankt man den für die Untersuchungen äusserst bequemen Darstellungen dieser Funktionen, welche von Herrn MITTAG-LEFFLER gegeben sind.

Die fundamentale Identität ist hierbei die folgende

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i \alpha} \int \frac{e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega}{\omega - x}. \tag{2}$$

Die Integration wird über einen Kurvenzug ausgeführt, dessen Anfangspunkt und Endpunkt unendlich entfernt liegen, und zwar, falls α eine positive reelle Grösse bezeichnet, bez. in den Richtungen $\varphi = \mp \alpha\pi$; überdies soll die Stelle x bei der Integration auf der linken Seite gelassen werden. Hält man letztere Bedingung nicht aufrecht, so sind nur die nötigen Residuen hinzuzufügen. Als Integrationskurve kann man also auch die beiden Geraden $\varphi = \mp \alpha\pi$ in ihrer ganzen Länge nehmen; nur ist

eine kleine Ausbiegung vorzunehmen, falls die Stelle x eben auf einer von diesen Geraden liegen sollte. Nach einer solchen Wahl bekommt man für $x = re^{\varphi i}$

$$(3) \qquad E_a(x) = \frac{1}{a} \sum_\varkappa e^{r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{a} i}} + \frac{1}{2\pi i a} \int \frac{e^{\omega^{\frac{1}{a}}} d\omega}{\omega - x},$$

wo $\varkappa$ die positiven und negativen ganzen Zahlen (inclusive Null) durchläuft, für welche die Bedingung

$$(4) \qquad -a\pi < \varphi + 2\varkappa\pi < a\pi$$

erfüllt ist.[1]

Das in (3) auftretende Integral lässt eine Entwickelung in eine halbkonvergente Reihe zu. Schreiben wir nämlich

$$\frac{1}{\omega - x} = -\left[\frac{1}{x} + \frac{\omega}{x^2} + \ldots + \frac{\omega^{n-1}}{x^n}\right] + \frac{\omega^n}{(\omega - x)},$$

so ergiebt sich

$$(5) \qquad E_a(x) = \frac{1}{a} \sum_\varkappa e^{r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{a} i}} - \sum_1^n \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-a\nu + 1)} + \frac{1}{2\pi i a x^n} \int \frac{\omega^n e^{\omega^{\frac{1}{a}}} d\omega}{\omega - x}.$$

Ohne grosse Schwierigkeit findet man, dass bei geeigneter Wahl von n das Restglied höchstens von der Grössenordnung $e^{-|x|^{\frac{1}{a}}}$ wird.

Der zwischen den Geraden $\varphi = \mp a\pi$ enthaltene Teil von der ω-Ebene ist hier als eine durch die Relation

$$(6) \qquad t^a = \omega$$

vermittelte Abbildung der t-Ebene aufzufassen, so dass den beiden Ufern der negativen reellen Halbaxe der letzteren Ebene die Geraden $\varphi = \mp a\pi$ entsprechen.

[1] c. f. G. Mittag-Leffler. *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.* Cinquième note, § 3. Ce tome pag. 132—147.

In ähnlicher Weise gestaltet sich die Sache, falls α eine komplexe Zahl $\beta + i\gamma$ bedeutet;[1] es muss $\beta > 0$ sein, damit $E_\alpha(x)$ eine ganze Funktion bezeichne. Doch tritt hier der Unterschied ein, dass für $t = \rho e^{i\tau}$ die Geraden $\tau = \tau_1$ und die Kreise $\rho = \rho_1$ durch (6) in logaritmische Spiralen transformiert werden. Schreiben wir nämlich $\omega = Re^{i\psi}$, so erhalten wir aus (6) die beiden Relationen

$$(7)\qquad \beta \log\rho - \gamma\tau = \log R; \qquad \gamma\log\rho + \beta\tau = \psi.$$

Den Strahlen $\tau = \tau_1$ entsprechen demnach die Spiralen

$$(8)\qquad \psi = \frac{\gamma}{\beta}\log R + \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\tau_1 = \psi_0 + \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\tau_1,$$

wenn $\psi = \psi_0$ die der positiven Halbaxe zugeordnete Spirale bezeichnet. Setzt man jetzt

$$(9)\qquad \psi = \psi_0 + \varphi,$$

so werden die den Strahlen der t-Ebene entsprechenden Spiralen durch die Gleichungen

$$(10)\qquad \varphi = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\tau_1 \qquad (-\pi \leqq \tau_1 \leqq \pi)$$

definiert, und die t-Ebene wird auf den durch die Spiralen

$$(11)\qquad \varphi = \mp\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi$$

begrenzten Teil der ω-Ebene abgebildet.

Andererseits entspricht einem Kreise $\rho = \rho_1$ der durch die Spiralen (11) abgegrenzte Teil der Spirale

$$(12)\qquad \log R = -\frac{\gamma}{\beta}\psi + \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\log\rho_1 = -\frac{\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\varphi + \beta\log\rho_1.$$

Man bekommt also für je zwei Stellen auf den Spiralen (11), welche demselben Punkte auf der negativen Halbaxe der t-Ebene entsprechen, verschiedene R-Werte, nämlich bez.

$$(13)\qquad R = e^{\pm\gamma\pi}\rho_1^\beta.$$

[1] c. f. G. Mittag-Leffler. *Sopra la funzione $E_\alpha(x)$.* R. Accad. dei Lincei, Atti. Ser. 5. Vol. 13, 3 Gennaio 1904, pag. 3—5.

Für

$$x = re^{i\psi}; \qquad \psi = \frac{\gamma}{\beta}\log r + \varphi$$

findet man

$$e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} = e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{(\varphi+2\varkappa\pi)i}{\alpha}}}. \qquad (\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Der Funktion $E_\alpha(x)$ können wir jetzt die folgende Darstellung geben

$$(5') \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_\varkappa e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{(\varphi+2\varkappa\pi)i}{\alpha}}} - \sum_1^n \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-\alpha\nu+1)} + \frac{1}{2\pi i\alpha x^n}\int \frac{\omega^n e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\,d\omega}{\omega - x},$$

wo die Summation über die den Ungleichungen

$$(4') \qquad -\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi < \varphi + 2\varkappa\pi < \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi$$

genügenden ganzen Zahlen erstreckt wird, und für die Integration die Spiralen (11) dieselbe Rolle spielen wie in dem früher betrachteten speciellen Falle die Geraden $\varphi = \mp\alpha\pi$.

§ 2.

Sei zunächst α *eine reelle Grösse* ≥ 2. Es ist dann ersichtlich, dass, falls man vom Anfangspunkte in einer bestimmten anderen Richtung als $\varphi = \pi$ fortschreitet, in der Entwicklung (5) das Glied

$$\frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} \qquad (-\pi < \varphi < \pi)$$

dem absoluten Betrage nach grösser als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder wird, wenn $|x|$ einen gewissen Wert übersteigt; in einer solchen Richtung können also Nullstellen höchstens für begrenzte Werte von $|x|$ liegen. Daraus folgt zwar noch nicht, dass die Nullstellen eben auf der negativen Halbaxe liegen sollen. Doch kann man für grosse Werte der Moduln einen Beweis hierfür in sehr einfacher Weise erbringen.

Für $\varphi = \pi$ besitzt die Entwicklung (5) zwei Hauptglieder. Betrachten wir deren Summe

$$(14) \qquad \frac{1}{\alpha}\left[e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\pi i}{\alpha}}} + e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{\pi i}{\alpha}}}\right] = \frac{2}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}} \cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\pi}{\alpha}\right),$$

so finden wir, dass diese Glieder einander verstärken für

$$(15) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\pi}{\alpha} = k\pi, \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

aber einander aufheben für

$$(16) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\pi}{\alpha} = \left(k - \frac{1}{\alpha}\right)\pi.$$

Die Sache gestaltet sich doch für die durch (15) bestimmten r-Werte insofern verschieden, als der Ausdruck (14) positiv oder negativ ist, je nachdem k eine gerade oder ungerade ganze Zahl darstellt. Dies trifft auch für die Funktion $E_\alpha(x)$ zu, da ja für die fraglichen r-Werte das betreffende Glied von höherer Grössenordnung als der Rest ist. Zwischen je zwei derartigen r-Werten muss demnach $E_\alpha(x)$ (jedenfalls für genügend grosse Zahlen k) eine Nullstelle besitzen, und zwar in der Nähe der zwischenliegende Stelle (16). *Für die Anzahl der negativen Wurzeln, deren Moduln* $< r$ *sind, haben wir mithin den Ausdruck*

$$(17) \qquad \frac{r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\pi}{\alpha}}{\pi}$$

erhalten.

Dass die Funktion $E_\alpha(x)$ höchstens eine begrenzte Anzahl von imaginären Nullstellen besitzen kann, folgt jetzt daraus, dass (17) *die genaue Anzahl der Nullstellen angiebt, wenn r durch eine Identität* (15) *bestimmt wird,* und k genügend gross ist. Um dies zu beweisen, berechnen wir das Integral

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log E_\alpha(x),$$

wenn die Integration in der positiven Richtung über den Kreis $|x| = r$ erstreckt wird. Nach der Zerlegung von $E_\alpha(x)$ in zwei Faktoren:

$$(19) \qquad E_\alpha(x) = e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}}(1 + u) \qquad (-\pi \leq \varphi \leq \pi)$$

bekommen wir

$$(20)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}} + \frac{1}{2\pi i}\int d\log(1+u).$$

Es ist aber bei Bezugnahme auf die Identität (15)

$$(21)\qquad \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}} = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\pi}{\alpha}}{\pi} = k.$$

Anderseits hat man

$$(22)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log(1+u) = 0$$

Um die Richtigkeit von (22) einzusehen, bemerken wir zunächst, dass auf Grund der speciellen Wahl von r der Ausdruck $e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}}$ (und folglich auch u) für $\varphi = -\pi$ und $\varphi = \pi$ einen und denselben Wert besitzt. Können wir jetzt noch nachweisen, dass bei dem ganzen Umlaufe von $\varphi = -\pi$ bis $\varphi = \pi$ $1+u$ ein positives Glied enthält, welches grösser ist als der absolute Betrag des Restes, so folgt hieraus, dass man mit dem ursprünglichen Argumente für $1+u$ zurückkommt. Es ist aber eben dies, was in (22) ausgesprochen wird.

Den fraglichen Nachweis können wir in der folgenden Weise erbringen. Ausser in der Nähe der negativen Halbaxe ist offenbar schon $1 > |u|$. Für $\varphi = -\pi + \delta$ oder $\varphi = \pi - \delta$ braucht dies zwar nicht der Fall zu sein, falls δ genügend klein ist. In diesem Falle ist aber das in u enthaltene Hauptglied eine positive Grösse. Betrachten wir z. B. den Fall $\varphi = -\pi + \delta$, so finden wir als einziges Glied in u, dessen Betrag mit 1 vergleichbar sein kann,

$$(23)\qquad e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\pi+\delta}{\alpha} i} - r^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{(\pi-\delta)i}{\alpha}}} = e^{-2r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\pi}{\alpha}\left(\sin\frac{\delta}{\alpha} - i\cos\frac{\delta}{\alpha}\right)}$$

$$= e^{-2k\pi\sin\frac{\delta}{\alpha}}\left(\cos\left(2k\pi\cos\frac{\delta}{\alpha}\right) + i\left(2k\pi\cos\frac{\delta}{\alpha}\right)\right).$$

Schreiben wir

$$2k\pi\cos\frac{\delta}{\alpha} = 2k\pi - v.$$

so ergiebt sich zunächst

$$2k\pi \sin\frac{\delta}{\alpha} = 2\sqrt{k\pi v}\sqrt{1 - \frac{v}{4k\pi}},$$

und es nimmt jetzt der Ausdruck (23) die Gestalt

$$e^{-\sqrt{4k\pi v - v^2}}(\cos v - i \sin v) \tag{24}$$

an. Der zugehörige absolute Betrag nimmt also mit wachsendem v sehr rasch ab, und bei niedrigeren Werten von v ist, wie wir behauptet haben, das in (24) und also auch in u enthaltene Hauptglied eine positive Grösse. In ähnlicher Weise erledigt man den Fall $\varphi = \pi - \delta$.

Da es nicht ohne weiteres ersichtlich ist, dass die obigen Auseinandersetzungen für niedrigere Werte von k anwendbar sind, so ist die Unmöglichkeit einer *endlichen* Anzahl von imaginären Nullstellen noch nicht erwiesen. In dem speciellen Falle $\alpha = 2$ hat man

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x^{\frac{1}{2}}} + e^{-x^{\frac{1}{2}}}\right),$$

und die Nullstellen

$$-\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$$

sind alle negativ. Man kann auch für $\alpha > 2$ allgemein nachweisen, dass die Funktion $E_\alpha(x)$ auf der negativen Halbaxe eben so oft Zeichen wechseln muss, wie erforderlich ist, damit sämmtliche Wurzeln reell sein sollen. Es lässt sich in der Tat mit Benutzung der Entwicklung (5) wirklich darlegen, dass $E_\alpha(x)$ für *jede* durch (15) bestimmte Stelle eine positive oder negative Grösse bedeutet, je nachdem k eine gerade oder ungerade ganze Zahl darstellt.[1] *Für $\alpha \geq 2$ besitzt demnach die Funktion $E_\alpha(x)$ keine imaginären Nullstellen.*

[1] Die Entwicklung beginnt nämlich stets mit (einem oder mehreren) Gliedern

$$\frac{2}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{2\varkappa+1}{\alpha}\pi} \cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{2\varkappa+1}{\alpha}\pi\right), \qquad \left(r^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{k\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}},\ \varkappa = 0, 1, \ldots\right)$$

welche dasselbe Zeichen wie $(-1)^k$ besitzen, und deren absoluter Betrag grösser als die Summe der absoluten Beträge der restierenden Glieder ist.

§ 3.

Es sei zweitens $0 < \alpha < 2$. Die bestimmenden Glieder in der Entwicklung (5) sind jetzt[1]

$$\frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} \qquad \left(-\frac{\alpha\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

und

$$-\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha+1)} \qquad \left(\frac{\alpha\pi}{2} < \varphi < 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Ist $|x|$ genügend gross, so muss also der absolute Betrag von

$$(25) \qquad \frac{1}{\alpha}\left(e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} + \frac{r^{-1} e^{-\varphi i}}{\Gamma(-\alpha)}\right)$$

grösser als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder sein, es sei denn, dass die Moduln der beiden in (25) eingehenden Glieder annähernd gleich gross sind. Es ist in der Tat

$$-\frac{x^{-2}}{\Gamma(-2\alpha+1)}$$

das bestimmende Glied unter den Restgliedern, so dass der absolute Betrag des Restes von der Grössenordnung

$$r^{-2}$$

ist. Von höherer Grössenordnung kann also bei einer Nullstelle die Differenz

$$(26) \qquad e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}} - \frac{r^{-1}}{|\Gamma(-\alpha)|}$$

[1] Für $\alpha = 1$ verschwinden die Glieder der halbkonvergenten Reihe

$$\sum \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-\alpha\nu+1)}$$

identisch, und die Funktion $E_1(x)$ reduziert sich auf das einzige Glied e^x. Auf diesen Fall haben demnach die Auseinandersetzungen des Textes keine Anwendung.

der absoluten Beträge der beiden Hauptglieder nicht sein. Die Relation

$$(27)\qquad e^{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}} = \frac{r^{-1}}{|\Gamma(-\alpha)|}(1 + ur^{-1})$$

bestimmt mithin bei den Nullstellen eine zwar veränderliche aber *endliche* Grösse u. Aus (27) erhalten wir durch Logaritmierung

$$(28)\qquad -r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha} = \log r + \log|\Gamma(-\alpha)| + u_1 r^{-1},$$

wo u_1 eine andere endlich bleibende Grösse bedeutet.

Aus (28) ersieht man, dass bei wachsendem r die Argumente der Nullstellen auf der oberen bez. unteren Halbebene immer weniger von $\frac{\alpha}{2}\pi$ bez. $-\frac{\alpha}{2}\pi$ abweichen dürfen. Da sich alles symmetrisch in Bezug auf die reelle Axe verhält, so brauchen wir offenbar nur die Verhältnisse auf der oberen Halbebene besonders zu untersuchen. Schreiben wir

$$(29)\qquad \varphi = \frac{\alpha}{2}\pi + \delta,$$

so geht (28) in

$$(30)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\delta}{\alpha} = \log r + \log|\Gamma(-\alpha)| + u_1 r^{-1}$$

über. *Mit wachsendem r nähern sich also die Nullstellen unbegrenzt der Kurve*

$$(31)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\delta}{\alpha} = \log r + \log|\Gamma(-\alpha)|;$$

man findet ja (von niedrigeren Gliedern abgesehen) als Abstand

$$\alpha u_1 r^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Aus (31) erhält man annäherungsweise

$$(32)\qquad \delta = \alpha r^{-\frac{1}{\alpha}}\left|\log r + \log|\Gamma(-\alpha)|\right|.$$

Sucht man jetzt den Abstand einer Nullstelle von der Geraden $\varphi = \frac{\alpha}{2}\pi$, so findet man hierfür in erster Annäherung

$$(33)\qquad r\delta = \alpha r^{1-\frac{1}{\alpha}}\left(\log r + \log|\Gamma(-\alpha)|\right).$$

Dieser Ausdruck gestattet unmittelbar Folgendes zu erschliessen:

Hat man $\alpha < 1$, *so nähern sich die Nullstellen auf der oberen Halbebene mit wachsendem* r *unbegrenzt der Geraden* $\varphi = \frac{\alpha}{2}\pi$. *Ist dagegen* $\alpha > 1$, *so wächst der Abstand der Nullstellen von der in Rede stehenden Geraden mit* r *über jede Grenze. In beiden Fällen ist aber nach* (32) δ *eine mit wachsendem* r *gegen Null abnehmende positive Grösse.*

Auch bei der folgenden Diskussion gestaltet sich die Sache etwas verschieden, je nachdem $0 < \alpha < 1$ oder $1 < \alpha < 2$.

a) $0 < \alpha < 1$.

Da hier $\Gamma(-\alpha)$ eine negative Grösse bedeutet, so führt die bei einer Nullstelle annäherungsweise geltende Bedingung, dass die Argumente der beiden in (25) enthaltenen Glieder als Differenz ein ungerade Vielfaches der Grösse π haben sollen, auf eine Relation

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\varphi}{\alpha} = -\varphi + 2k\pi \tag{34}$$

oder nach Benutzung der Substitution (29)

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\delta}{\alpha} = -\frac{\alpha}{2}\pi - \delta + 2k\pi. \tag{35}$$

Beachtet man nun den in (32) gegebenen Näherungswert für δ, so lässt sich erschliessen, dass $\cos\frac{\delta}{\alpha} - 1$ von der Grössenordnung $r^{-\frac{2}{\alpha}}(\log r)^2$ sein muss. Hiernach lässt sich (35) durch eine relation von der Gestalt

$$r^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{2}\pi + 2k\pi + \left[r^{-\frac{1}{\alpha}}(\log r)^2\right] \tag{36}$$

ersetzen. Sollte nun hier zu jedem ganzzahligen Wert von k eine Nullstelle sowohl auf der oberen als unteren Halbebene gehören, so wäre die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ sind, sehr genau durch den Ausdruck

$$\frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}$$

angegeben.

In wie weit diese Vermutung bestätigt wird, wollen wir jetzt untersuchen, indem wir auch hier das Integral

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_\alpha(x)$$

berechnen. Dabei ist es vorteilhaft den Integrationskreis $|x| = r$ so zu wählen, dass der Kurve (31), und folglich auch der symmetrischen Kurve auf der unteren Halbebene, in einem solchen Punkte begegnet wird, dass die Argumente der beiden in (25) enthaltenen Glieder sich um ein Vielfaches der Grösse 2π unterscheiden. Es soll demnach für den Schnittpunkt mit der Kurve (31) eine Relation

$$(37) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\delta}{\alpha} = -\frac{\alpha}{2}\pi - \delta + (2k+1)\pi$$

gelten, wobei die positive ganze Zahl k genügend gross gewählt werden muss, damit die folgenden Auseinandersetzungen einwandfrei seien.

Jetzt zerlegen wir $E_\alpha(x)$ in zwei Faktoren, so dass das jedesmalige Hauptglied in der Entwicklung (5) den einen Faktor liefert:

$$(38) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} (1+u); \qquad \left(-\frac{\alpha}{2}\pi - \delta \leqq \varphi \leqq \frac{\alpha}{2}\pi + \delta\right),$$

$$(39) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha)}(1+u) \qquad \left(\frac{\alpha}{2}\pi + \delta \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\alpha}{2}\pi - \delta\right).$$

Für die Argumente $\pm\left(\frac{\alpha}{2}\pi + \delta\right)$ sind die Grössen $e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi}{\alpha}}}$ und $\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha)}$, auf Grund der speciellen Wahl von r einander gleich; dasselbe gilt mithin auch von den beiden in (38) und (39) auftretenden u-Werten. Es ist also $1+u$ längs der Integrationskurve eine kontinuierliche Grösse. Da sich weiter in derselben Weise wie die entsprechende Tatsache im vorigen Abschnitte nachweisen lässt, dass diese Grösse stets ein positives Hauptglied enthält, so hat man auch hier

$$(22) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log(1+u) = 0.$$

Nimmt man jetzt auf (37), (38), (39) und (22) Bezug, so ergiebt sich sofort

$$(40)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{-\frac{\alpha}{2}\pi-\delta}^{\frac{\alpha}{2}\pi+\delta} r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}} + \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{\frac{\alpha}{2}\pi+\delta}^{2\pi-\frac{\alpha}{2}\pi-\delta} - \varphi i$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\delta}{\alpha}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\pi} = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{\pi} + 2k + 1 - 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\pi} \doteq 2k.$$

Man hat aber

$$\frac{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\delta}{\alpha}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\pi} = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2} + \left[r^{-\frac{1}{\alpha}}\log r^2\right].$$

Hiernach ergiebt sich

$$(41)\qquad \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2}$$

als Ausdruck für die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ *sind. Man hat sogar hier, jedenfalls für genügend grosse* r*-Werte, die genaue Anzahl der Nullstellen, falls* r *so gewählt wird, dass* (41) *eine gerade Zahl bedeutet.*

b) $1 < \alpha < 2$.

Die Modifikationen, welche hier die vorangehenden Entwicklungen erleiden müssen, weil jetzt $\Gamma(-\alpha)$ eine positive Grösse bezeichnet, bestehen eigentlich nur darin, dass die gerade Zahl $2k$ durch die ungerade Zahl $2k+1$ ersetzt werden soll und umgekehrt.

Für die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ *sind, hat man also auch in diesem Falle den Ausdruck* (41). *Es besteht aber der Unterschied, dass man jetzt die genaue Anzahl der Nullstellen bekommt, wenn* (41) *eine ungerade Zahl bedeutet.*

Die hieraus zu ziehende Folgerung, dass die Funktion $E_\alpha(x)$ in diesem Falle *eine ungerade Anzahl negativer Nullstellen* (*und also mindestens eine*) besitzt, wird dadurch bestätigt, dass für $\lim x = -\infty$ das Hauptglied $\frac{1}{\alpha}\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha)}$ und mithin auch $E_\alpha(x)$ eine negative Grösse ist. Hieraus folgt

ja, da $E_\alpha(x)$ für positive x-Werte positiv ist, dass die Funktion auf der negativen Halbaxe eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln erleiden muss.

Man hat den Fall $\alpha = 1$ in solcher Weise als Grenzfall aufzufassen, dass für $\alpha = 1 - \delta$ oder $\alpha = \frac{1}{1-\delta}$ die Nullstellen, zu denen die niedrigsten Moduln gehören, sich mit abnehmendem δ immer mehr von dem Anfangspunkte entfernen. Die Bedeutung des Ausdruckes (41) für die Anzahl der Nullstellen fängt dann also erst bei verhältnissmässig grösseren r-Werten an.

Man überzeugt sich durch ziemlich einfache Betrachtungen, dass *die endliche Anzahl negativer Nullstellen, welche $E_\alpha(x)$ für $1 < \alpha < 2$ besitzt, jede gegebene Grenze überschreitet, wenn die Differenz $2 - \alpha = \delta$ genügend klein wird.* Betrachtet man nämlich die Verhältnisse auf der negativen Halbaxe, so ergiebt sich leicht, dass *für niedrigere r-Werte* nicht das Glied

$$\frac{1}{\alpha} \frac{r^{-1}}{\Gamma(-\alpha)},$$

sondern

$$(14) \qquad \frac{1}{\alpha}\left[e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\pi i}{\alpha}}} + e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{\pi i}{\alpha}}}\right] = \frac{2}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}} \cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

den bestimmenden Einfluss ausübt. Man hat also Grund anzunehmen, es seien den ersten Zeichenänderungen von (14) Nullstellen der Funktion $E_\alpha(x)$ zugeordnet. Unter der Voraussetzung, dass dies zutrifft, so lange

$$\frac{2}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha} \frac{r^{-1}}{\Gamma(-\alpha)},$$

würde man in erster Annäherung den Ausdruck

$$\frac{4}{\pi^2(2-\alpha)} \log \frac{1}{2-\alpha}$$

für die Anzahl der negativen Nullstellen erhalten.

Ist andererseits $\alpha - 1$ eine kleine Grösse, so erschliesst man durch ähnliche Überlegungen, dass die Funktion $E_\alpha(x)$ blos eine einzige Null-

stelle auf der negativen Halbaxe besitzt. Sucht man eine Entwicklung für den zugehörigen Modul, so ergiebt sich als Hauptglied

$$\log \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Da diese Nullstelle nach aller Wahrscheinlichkeit die dem Anfangspunkte nächstliegende ist, so ersieht man hieraus, wie die Nullstellen ins Unendliche rücken, wenn α sich dem Werte 1 nähert.

§ 4.

Ist zuletzt α *eine imaginäre Zahl* $= \beta + i\gamma$, so gestalten sich die Sachen in ganz analoger Weise. Der wesentliche Unterschied rührt davon her, dass $\varphi =$ const. jetzt nicht länger eine gerade Linie, sondern eine logarithmische Spirale bedeutet.

Zunächst findet man, dass, falls die Umgebung von einer oder zwei φ-Spiralen ausgenommen wird, die Entwicklung (5′) stets ein einziges Hauptglied enthält, dessen absoluter Betrag für genügend grosse r die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder übersteigt. *Die Nullstellen mussen also jetzt eine oder zwei Annahmespiralen begleiten.*

Unter den in (5′) auftretenden Gliedern betrachten wir zuerst diejenigen von der Gestalt

$$(42) \qquad e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\theta i}{\alpha}}} = e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \cos\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \left[\cos\left(r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \sin\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}\right) + i \sin\left(r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \sin\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}\right)\right],$$

wo mit Rücksicht auf (4′) die Ungleichungen

$$(4'') \qquad -\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi < \theta < \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi$$

stattfinden sollen. Wird nun der absolute Betrag

$$(43) \qquad e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \cos\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}}$$

für $\theta = \theta_0$ ein Maximum, so ergiebt sich die Identität

$$(44)\qquad \operatorname{tg}\frac{\beta\theta_0}{\beta^2+\gamma^2} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Hieraus findet man zwei mit (4″) verträglichen Lösungen. Doch liefert nur diejenige ein Maximum, für welche $\operatorname{arc\,tg}\frac{\gamma}{\beta}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Für das Maximum von (43) hat man nach dieser Festsetzung

$$(45)\qquad e^{r^{\frac{1}{\beta}}\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}e^{\frac{\gamma}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\gamma}{\beta}}}.$$

Ist für das Maximum $\theta_0 = 0$, so muss $\gamma = 0$, d. h. α eine reelle Grösse sein. Geht man rechts oder links von dem besonderen Argumente $\theta = \theta_0$ aus, so wächst (43) mit r über jede Grenze, so lange

$$(46)\qquad -\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta}\pi < \theta < \frac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta}\pi,$$

und man erkennt, dass für $\varphi + 2\varkappa\pi = \theta$ es stets ein derartiges Glied in der Entwicklung (5′) geben muss, falls

$$\text{a)}\qquad \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta} > 2.$$

In diesem Falle (sowie auch, wenn das Zeichen $>$ durch $=$ ersetzt wird) sind also die Hauptglieder in (5′) stets von der Gestalt (42).

Für welche φ-Spiralen bekommt man nun zwei derartige Hauptglieder? Da die Glieder, für welche die Bedingung (46) erfüllt ist, immer mehr abnehmen, wenn θ, sei es rechts oder links, sich von θ_0 entfernt, so ist es leicht ersichtlich, dass dieser Fall dann und nur dann eintritt, wenn für $\theta_1 > \theta_0 > \theta_1 - 2\pi$

$$(47)\qquad e^{r^{\frac{1}{\beta}}e^{\frac{\gamma\theta_1}{\beta^2+\gamma^2}}\cos\frac{\beta\theta_1}{\beta^2+\gamma^2}} = e^{r^{\frac{1}{\beta}}e^{\frac{\gamma(\theta_1-2\pi)}{\beta^2+\gamma^2}}\cos\frac{\beta(\theta_1-2\pi)}{\beta^2+\gamma^2}}.$$

Hiernach ergiebt sich

$$(48)\qquad \operatorname{tg}\frac{\beta\theta_1}{\beta^2+\gamma^2} = \frac{e^{\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} - \cos\frac{2\pi\beta}{\beta^2+\gamma^2}}{\sin\frac{2\pi\beta}{\beta^2+\gamma^2}} = \operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{\beta^2+\gamma^2} + \frac{e^{\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}}-1}{\sin\frac{2\pi\beta}{\beta^2+\gamma^2}}.$$

Die einzige Lösung hierzu, welche den besprochenen Nebenbedingungen genügt, *reduziert sich nur in den beiden Grenzfällen* $\gamma = 0$ *und* $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} = 2$ *auf* $\theta_1 = \pi$.

Es ist um diese Spirale $\varphi = \theta_1$, *dass sich die Nullstellen häufen, und zwar so, dass ihre Entfernung von der Spirale für* $\lim r = \infty$ *unendlich klein wird.*

Die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ sind, lässt sich auch hier durch die Berechnung des Integrals

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log E_\alpha(x)$$

bestimmen, indem man $E_\alpha(x)$ in zwei Faktoren zerlegt:

$$(49) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\gamma\varphi}{\beta^2+\gamma^2}} e^{\frac{\beta\varphi}{\beta^2+\gamma^2}i}} (1 + u) \qquad (\theta_1 - 2\pi \leqq \varphi \leqq \theta_1).$$

Wird r so gewählt, dass ersterer Faktor für $\varphi = \theta_1$ und $\varphi = \theta_1 - 2\pi$ Argumente, welche um ein Vielfaches von 2π differieren, besitzt, so lässt sich in derselben Weise wie in den vorigen Abschnitten beweisen, dass

$$(22) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log (1 + u) = 0.$$

Man bekommt alsdann

$$(50) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \Big|_{\theta_1 - 2\pi}^{\theta_1} r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} e^{\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}i}$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi} e^{\frac{\gamma(\theta_1 - \pi)}{\beta^2+\gamma^2}} \sqrt{e^{\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} + e^{-\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} - 2\cos\frac{2\pi\beta}{\beta^2+\gamma^2}}.$$

Dieser verhältnissmässig komplizierte Ausdruck vereinfacht sich in den Grenzfällen, wo $\theta_1 - \pi = 0$. Für $\gamma = 0$, also $\alpha = \beta$, ergiebt sich demnach der schon in § 2 hergeleitete Ausdruck

$$\frac{r^{\frac{1}{\alpha}} \sin \frac{\pi}{\alpha}}{\pi}.$$

Ist dagegen $\beta^2 + \gamma^2 = 2\beta$; so lässt sich (50) in die Gestalt

$$(51) \qquad \frac{r^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi}\left(e^{\frac{\gamma\pi}{2\beta}} + e^{-\frac{\gamma\pi}{2\beta}}\right)$$

umformen, d. h. man bekommt für die Anzahl der Nullstellen den gleichen Ausdruck wie im Falle

$$\text{b)} \qquad \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} < 2.$$

Da jetzt zwei Hauptglieder in (5′) auftreten, so müssen (ebenso wie im vorigen Abschnitte) an den Nullstellen die Moduln dieser Glieder annähernd gleich gross sein. Hieraus folgert man leicht, dass *die Rolle der Strahlen* $\varphi = \mp \frac{a\pi}{2}$ *in Bezug auf die Nullstellen jetzt von den Spiralen* $\varphi = \mp \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi$ *übernommen wird.* In Übereinstimmung hiermit wird der Abstand der Nullstellen von der zugehörigen Spirale mit wachsendem r verschwindend klein oder nicht, je nachdem $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} < 1$ oder $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \geqq 1$.

Ebenfalls empfiehlt es sich hier behufs der Berechnung des Integrals (18) die Funktion $E_a(x)$ in zwei Faktoren zu zerlegen, indem das jedesmalige Hauptglied den einen Faktor angiebt. Also

$$(38') \quad E_a(x) = \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\varphi i}{a}}} (1 + u); \qquad \left(-\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi - \delta_1 < \varphi \leqq \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi + \delta\right)$$

$$(39') \quad E_a(x) = \frac{1}{a}\frac{x^{-1}}{\Gamma(-a)}(1 + u), \quad \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi + \delta < \varphi \leqq 2\pi - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi - \delta_1\right)$$

wenn für $\varphi = -\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi - \delta_1$ bez. $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi + \delta$ die Differenz

$$(26') \qquad \left|e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\varphi i}{a}}}\right| - \frac{r^{-1}}{|\Gamma(-a)|}$$

gleich Null wird. In einer Hinsicht stellt doch die Sache sich hier weniger bequem, weil jetzt nicht r so gewählt werden kann, dass u an *beiden*

Grenzstellen gleiche Werte in (38′) und (39′) erhält. Für die Umgebung dieser Grenzstellen kann man aber die Diskussion an die Substitution

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left| e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma i}{\alpha}}} + \frac{r^{-1}}{\Gamma(-\alpha)} \right|(1 + v) \tag{52}$$

anknüpfen, wobei man noch eine solche Wahl von r treffen kann, dass für den Kreis $|x| = r$ die Ungleichung $|v| < 1$ erfüllt ist. Man findet so ohne Schwierigkeit, dass der Ausdruck (51) hier dieselbe Rolle für die Anzahl der Nullstellen spielt wie im vorigen Abschnitte der Ausdruck $\frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}$, auf welchen er sich ja für $\gamma = 0$ reduziert.

Die Anwendbarkeit der obigen Metoden lässt sich insbesondere nach zweierlei Richtungen erweitern.

Erstens kann man nämlich $E_\alpha(x)$ durch die Differenz von $E_\alpha(x)$ mit einer konstanten Grösse oder einer einfach gebauten ganzen Funktion ersetzen. Es treten dann nur in den Entwicklungen (5) und (5′) neue Glieder hinzu, und die Rolle der Hauptglieder in den verschiedenen Teilen der komplexen Ebene wird in anderer Weise verteilt.

Zweitens erlauben die Metoden des Herrn Mittag-Leffler andere Funktionen in mannigfaltiger Weise (auch solche von unendlicher Höhe) zu bilden, für welche sich analoge halbkonvergente Entwicklungen wie (5) und (5′) ergeben. Es lassen sich dann in ähnlicher Weise wie hier Untersuchungen über die Nullstellen ausführen.

SUR LA MÉTHODE HORISTIQUE DE GYLDÉN

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

Introduction.

Gyldén a rendu de très grands services à la Science; il a créé un certain nombre de méthodes nouvelles qui ont pu être appliquées avec succès et dans certains cas substituées avec avantage aux anciens procédés. La plupart des méthodes qu'il a proposées dans ses premiers écrits étaient correctes; Harzer et Brendel en ont tiré une théorie des petites planètes. Ces méthodes, à la vérité, n'étaient pas sans inconvénient, elles donnaient lieu à une foule de complications inutiles; au lieu de prendre le temps pour variable indépendante, elles prennent la longitude vraie, ou des variables auxiliaires peu différentes de cette longitude, elles introduisent une foule de variables parasites et encombrantes. Il en résulte que les équations perdent leur forme canonique, et que, si l'on veut simplement écrire par exemple l'équation des forces vives, il faut se livrer à des calculs interminables. J'estime donc que ces méthodes, quelque intéressantes qu'elles aient été autrefois, n'ont plus aujourd'hui qu'un intérêt historique, et qu'on ne saurait plus en recommander l'emploi, parce que maintenant il y en a d'autres, comme par exemple celles de Hill et de Brown qui ont les mêmes avantages sans avoir les mêmes inconvénients.

Plus tard Gyldén est entré dans une voie nouvelle et a abouti à des résultats qu'il a rassemblés dans son ouvrage *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes,* Stockholm 1892. Moins heureux que dans ses premiers travaux, il s'est cette fois complètement trompé.

Acta mathematica. 29. Imprimé le 10 mars 1905

Considérons une équation différentielle quelconque, faisons pager certains termes dans le 1^{er} membre, d'autres dans le 2^d. En 1^{ere} approximation, nous remplacerons *dans le 2^d membre* les fonctions inconnues par zéro et nous intégrerons les équations ainsi obtenues; en 2^{de} approximation nous remplacerons *dans le 2^d membre* les fonctions inconnues par leurs valeurs de 1^{ère} approximation, et ainsi de suite. Tel est le principe fondamental des nouvelles méthodes d'approximation de GYLDÉN, comme des anciennes et nous le retrouverons partout.

Ce principe est légitime, mais à une condition, c'est que les termes relégués dans le 2^d membre et négligés en 1^{ère} approximation soient notablement plus petits ou moins importants que les termes conservés dans le 1^{er} membre. Sans cela, il est clair que le développement ne sera pas convergent. Nous aurons donc à examiner si l'analyse de GYLDÉN satisfait à cette condition.

On sait que dans les méthodes ordinaires de la mécanique céleste, on voit s'introduire ce qu'on appelle de petits diviseurs, de sorte que le coefficient de certains termes prend la forme

$$\frac{h}{p^2}$$

p étant très petit, et deviennent infinis quand p s'annule. GYLDÉN s'efforce de prouver qu'un calcul plus exact doit donner:

$$\frac{h}{\nu^2 + p^2}$$

ν étant une quantité qui ne s'annule pas, de sorte que le coëfficient ne devient pas infini et reste même très petit. C'est ce qu'il appelle la méthode horistique, ainsi nommée d'un mot grec d'où vient également horizon.

Il cherche à tirer de là diverses conséquences:

1° Que les séries obtenues en mécanique céleste sont convergentes si l'on tient compte des termes horistiques.

2° Que les termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice ne sauraient donner lieu au phénomène connu sous le nom de libration.

Ces conséquences sont manifestement fausses; mais j'ai cru longtemps que l'erreur provenait simplement de ce que GYLDÉN ne se doutait pas de ce que les géomètres appellent une série convergente et des précautions minutieuses qu'il faut prendre dans une démonstration de convergence.

Je croyais que, si GYLDÉN est protégé contre la critique par son obscurité même, cette obscurité empêcherait également qu'on cherchât à appliquer ses méthodes qui deviendraient ainsi inoffensives et tomberaient dans l'oubli après sa mort.

Je me trompais; d'abord ses erreurs commencent, comme nous le verrons bientôt, dès le début de son analyse; on ne peut donc le prendre pour guide, non seulement pour démontrer la convergence des développements, mais même pour en calculer approximativement les 1^{ers} termes. De plus, certaines personnes ont voulu appliquer ces méthodes à des problèmes pratiques, et elles ont été naturellement conduites à l'erreur. D'autres ont repris les affirmations de GYLDÉN sur la convergence des séries et les ont présentées comme des vérités établies.

Il devenait donc nécessaire d'analyser dans ses détails l'ouvrage cité *Nouvelles Recherches*... et d'en discuter les conclusions. C'est là l'objet du présent travail, nous suivrons pas à pas l'ouvrage de GYLDÉN et nous en examinerons successivement chaque chapitre.

J'aurais voulu conserver les notations de GYLDÉN; mais elles sont tellement compliquées et tellement changeantes que je n'en ai pas eu le courage. Je donne cependant des indications suffisantes pour qu'on puisse passer facilement d'une notation à l'autre.

Dans les citations, quand je renvoie à une page ou à un paragraphe désigné par le signe § ou N° suivi d'un numéro, il faut entendre la page ou le paragraphe de l'ouvrage de GYLDÉN *Nouvelles Recherches*.... Quand je renvoie à un paragraphe en écrivant le mot paragraphe en toutes lettres, il s'agit d'un paragraphe du présent travail. Enfin quand je renvoie à mon ouvrage *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Paris, Gauthier Villars, j'écris simplement *Méthodes Nouvelles*.

Analyse du Chapitre Premier.

Le Chapitre 1^{er} est consacré à l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1-\alpha)\rho - \beta\rho^3 = -\gamma\cos v. \tag{1}$$

GYLDÉN applique à cette équation 4 méthodes différentes dont une fondée

sur l'emploi des coëfficients indéterminés et 3 sur l'emploi des fonctions elliptiques.

Mais avant d'aller plus loin, disons quels sont les résultats qui sont démontrés au sujet de cette équation et que Gyldén aurait dû retrouver. Si l'on applique à l'équation (1) la méthode de la variation des constantes arbitraires de Lagrange en regardant β et γ comme des quantités très petites, on obtient une série procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de deux arguments:

$$v \quad \text{et} \quad w = v\sqrt{1 - \alpha} + \text{const.}$$

et suivant les puissances de v; cette série où v figure en dehors des signes trigonométriques est convergente pourvu que v soit suffisamment petit. Je l'appellerai la série S.

Le terme général de la série S est donc de la forme:

$$Av^m \cos(pv + qw + h).$$

Si nous réunissons tous les termes de la série S qui contiennent en facteur une des lignes trigonométriques d'un même arc $pv + qw$; on peut en faire la somme, et cette somme a pour valeur:

$$A \cos(pv + qf + h)$$

où f est un nouvel argument de la forme

$$f = \sigma v + \varepsilon$$

σ étant une nouvelle constante donnée et ε une constante arbitraire d'intégration. En groupant les termes de cette manière, on obtient une nouvelle série S_1 procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples des deux arguments v et f, et ne contenant pas v en dehors des signes trigonométriques. Cette nouvelle série S_1 est *divergente*, au sens que les mathématiciens attachent à ce mot; elle peut néanmoins être employée dans un but pratique pourvu que ce soit avec circonspection. Elle peut donner une valeur approchée de la fonction inconnue, si l'on s'arrête à un certain terme.

Cette série S_1 dépend de deux constantes arbitraires; la 1ère est ε, et figure dans f; la 2de peut être choisie de bien de manières; à l'exemple

de GYLDÉN nous prendrons le coëfficient du terme en $\cos f$ et nous l'appellerons $\varkappa$. Si l'on fait $\varkappa = 0$, tous les termes dépendant de f disparaissent; la série S_1 ne contient plus que l'argument v, elle ne dépend plus de la constante ε; grâce à cette réduction, *la série S_1 devient convergente.* C'est la *solution périodique.*

Supposons que la constante $\varkappa$ ne soit pas nulle, mais très petite et négligeons les termes en $\varkappa^2$, nous trouvons ainsi:

$$\rho = H + \varkappa H_1 \cos f + \varkappa H_2 \sin f$$

où H indépendant de $\varkappa$ représente la solution périodique que nous venons de définir et où H, H_1, H_2 sont développables suivant les sinus et cosinus des multiples de l'argument unique v. Cette série représente les solutions très voisines de la solution périodique (cf. *Méthodes Nouvelles,* chapitre IV); *elle est convergente;* je l'appellerai S_2.

Dans les différents termes de S et de S_1 figurent ce que l'on appelle de *petits diviseurs* introduits par l'intégration. Parmi eux, nous distinguerons le petit diviseur α qui s'introduit dans la série S quand on intègre un terme en $w + n(w - v)$ et qu'on retrouve dans la série S_1 déduite de S. Parmi les termes de S_1, conservons seulement ceux qui contiennent α au dénominateur à la même puissance que β ou γ au numérateur. L'ensemble de ces termes formera une nouvelle série S_3; cette série sera *convergente.* C'est celle à laquelle conduit la *méthode de Delaunay.* Comment se fait-il que la série S_3 étant convergente, la série S_1 soit néanmoins divergente; c'est à cause de la présence des petits diviseurs autres que α; mais comme ces petits diviseurs ne se rencontrent que dans des termes d'ordre élevé, la série convergente S_3 nous donnera une valeur approchée de la fonction inconnue pourvu qu'on ne veuille pas l'appliquer pendant un intervalle de temps trop long; c'est là ce qui fait la légitimité de la méthode de DELAUNAY.

Tels sont les résultats qui sont vrais de l'équation (1) comme des équations générales du problème des 3 corps et des équations analogues.

Voyons maintenant ce qu'a fait GYLDÉN; il cherche à satisfaire à l'équation en posant

$$\rho = \varkappa \cos f + \varkappa_1 \cos v + R$$

et de façon que R soit petit par rapport aux deux autres termes. Il dé-

signe par $\frac{1}{2}(R^2)$ la partie constante de R^2, d'où il résulte que (R^2) est petit et positif et il arrive aux équations suivantes (équations 4 de la page 10)

$$(2)\qquad \begin{cases} -\sigma^2 + (1-\alpha) + \frac{3}{4}\beta x^2 - \frac{3}{2}\beta[x^2 + x_1^2 + (R^2)] = 0 \\ -\alpha + \frac{3}{4}\beta x_1^2 - \frac{3}{2}\beta[x^2 + x_1^2 + (R^2)] = -\frac{\gamma}{x_1}. \end{cases}$$

Remarquons pour comparer ces équations à celles de GYLDÉN, que α, β, σ et 1 représentent ici les β_1, β_3, $1-\varsigma$ et $1-\sigma$ de GYLDÉN.

Ces équations sont-elles exactes; il suffit pour le voir de les comparer à la série convergente S_2 définie plus haut et que nous savons former.

Soit d'abord $x = 0$; dans ce cas la série S_1 ou S_2 se réduit à celle qui définit la solution périodique; le terme le plus gros est le terme:

$$\rho = x_1 \cos v.$$

Alors les conclusions de GYLDÉN sont exactes et on trouve bien

$$(3)\qquad \frac{3}{4}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0$$

ce qui est conforme à l'équation (2), puisque x est nul et R très petit. Cette équation (3) limite bien la valeur de x_1 comme GYLDÉN l'a remarqué, et c'est cette remarque qui a été l'origine de tout son travail, où il a vainement cherché à la généraliser. On voit l'influence du terme en $\beta\rho^3$, et une comparaison physique la fera mieux comprendre. Si ce terme n'existait pas, l'équation (1) définirait le mouvement d'un pendule rigoureusement isochrone qui oscillerait sous l'influence d'une force périodique $\gamma\cos v$. Si cette force se trouve en résonance avec la période propre du pendule, les oscillations pourront devenir très-grandes. Grâce à l'addition de ce terme, le pendule n'est plus rigoureusement isochrone; s'il y a résonance pour les oscillations infiniment petites, l'amplitude croîtra d'abord, mais quand elle sera plus grande, la période propre du pendule ne sera plus la même, la résonance disparaîtra et l'amplitude cessera de croître. Les constructeurs de navires ont souvent employé un artifice analogue.

Si nous supposons au contraire γ et x_1 nuls, l'équation (1) s'intègre très aisément par les fonctions elliptiques, on pourrait alors former aisément

la $1^{\text{ère}}$ équation (2) en y faisant $x_1 = 0$ et négligeant R, qui est en effet négligeable si x est petit. On reconnaîtrait ici encore que la formule de Gyldén est exacte. Observons que dans ces deux cas, il n'y a dans ρ qu'un seul argument, v dans le 1^{er} cas, f dans le 2^{d}.

Supposons maintenant que x ne soit pas nul, mais très petit. Quelle devrait être d'après Gyldén la valeur de σ? Si x est très petit, il en sera de même de R. On aura donc.

$$\sigma^2 = 1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta x_1^2. \tag{2 bis}$$

Cherchons maintenant la *vraie* valeur de σ. Soit ρ_0 la solution périodique; et $\rho = \rho_0 + \varepsilon$; dans ce cas ρ_0 est indépendant de x et ε est de l'ordre de x; nous pouvons donc négliger ε^2, ce qui donne:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv} + (1 - \alpha - 3\beta\rho_0^2)\,\varepsilon = 0$$

et comme ρ_0 est sensiblement égal à $x_1 \cos v$, cela fait

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv^2} + \left(1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta x_1^2 - \frac{3}{2}\beta x_1^2 \cos 2v\right)\varepsilon = 0$$

ou:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv^2} + \varepsilon\,(q^2 - q_1 \cos 2v) = 0 \tag{4}$$

en posant

$$q^2 = 1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta x_1^2,\quad q_1 = \frac{3}{2}\beta x_1^2.$$

C'est là une équation qui a fait l'objet de travaux très nombreux que j'ai résumés dans le Chapitre XVII des Méthodes Nouvelles.

Soit $\varepsilon = F(v)$ la solution de l'équation (4) qui se réduit à 1 et dont la dérivée se réduit à 0 pour $v = 0$; on aura:

$$\cos\sigma\pi = F(\pi).$$

Développons $F(v)$ suivant les puissances croissantes de q_1 et de $1 - q^2 = 0$ il viendra:

$$F(v) = \cos v + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{q_1}{4}\right) v \sin v + \frac{q_1}{16}(\cos v - \cos 3v) + R_1$$

où R_1 contiendront les termes dépendant des puissances plus élevées de τ et de q_1; parmi ces termes, nous ne conserverons que ceux qui dépendent des secondes puissances, et qui ne s'annulent pas pour $v = \pi$. Or nous aurons des termes en $v \sin v$, en $(\cos v - \cos 3v)$, en $(\cos v - \cos 5v)$, en $v^2 \cos v$; nous n'avons à nous occuper que des derniers qui sont les seuls qui ne s'annulent pas pour $v = \pi$. Or R_1 est donné par l'équation:

$$\frac{d^2 R_1}{dv^2} + R_1 = (\tau + q_1 \cos 2v)\left[\left(\frac{\tau}{2} + \frac{q_1}{4}\right) v \sin v + \frac{q_1}{16}(\cos v - \cos 3v)\right].$$

Nous pouvons négliger le terme en $\cos v - \cos 3v$ qui ne peut nous donner un terme en $v^2 \cos v$. D'autre part:

$$(\tau + q_1 \cos 2v)\, v \sin v = \left(\tau - \frac{q_1}{2}\right) v \sin v + \frac{q_1}{2} v \sin 3v$$

où le 1^er^ terme seul peut nous donner un terme en $v^2 \cos v$; il nous suffira donc d'écrire:

$$\frac{d^2 R_1}{dv^2} + R_1 = \frac{1}{2}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) v \sin v + \ldots$$

d'où:

$$R_1 = -\frac{1}{8}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) v^2 \cos v + - \ldots$$

en n'exprimant que le terme en $v^2 \cos v$. Il vient donc:

$$F(\pi) = -1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right).$$

Or

$$\cos \sigma\pi = -1 + \frac{(1-\sigma)^2 \pi^2}{2}.$$

Il reste donc:

$$(1 - \sigma)^2 = \frac{1}{4}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + 3\alpha\beta x_1^2 + \frac{27}{16}\beta^2 x_1^4\right).$$

La formule de GYLDÉN donnerait.

$$(1 - \sigma)^2 = \frac{\tau^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + 3\alpha\beta x_1^2 + \frac{9}{4}\beta^2 x_1^4\right).$$

Avec la formule de GYLDÉN, σ est toujours réel; avec la *vraie* formule, σ peut devenir imaginaire et c'est ce qui arrive par exemple si α est positif, β négatif et assez grand. Les différences peuvent être tout a fait énormes; elles ne peuvent s'expliquer par l'influence du terme en (R^2) qui non seulement devrait être très petit, mais serait toujours de même signe; et étant toujours réel donnerait toujours pour $1 - \sigma$ une valeur réelle.

Cherchons d'ailleurs le terme principal de R. Un calcul simple nous donne en négligeant les carrés de τ et de q_1 et en posant $\sigma = 1 - s$

$$\rho = \varkappa_1 \cos v + \varkappa \cos f + \varkappa \cos (f - 2v) \frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}$$

ce qui nous donne la valeur de R; le terme le plus important de R, c'est en effet le terme en $\cos (f - 2v)$. Le rapport du terme en $\cos (f - 2v)$ au terme en $\cos f$ c'est:

$$\frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}.$$

Or le numérateur et le dénominateur sont du même ordre de grandeur; donc R n'est pas négligeable devant ρ_0.

Le seul cas où R serait négligeable devant ρ_0, serait celui où q_1 serait négligeable devant τ, c'est à dire $\beta \varkappa_1^2$ devant α; c'est à dire celui où la considération du terme en $\beta \rho^3$ est inutile, où les méthodes ordinaires suffisent, où celle de GYLDÉN est sans objet.

GYLDÉN dit page 17 que R reste même dans les cas exceptionnels de l'ordre de ρ_0 (c'est à dire de $\varkappa \cos f + \varkappa_1 \cos v$), mais qu'elle devient très petite dans les cas ordinaires, à savoir lorsque la valeur absolue de ω est sensiblement plus grande que l'unité (c'est à dire lorsque les 3 racines de l'équation (3) diffèrent sensiblement l'une de l'autre). On peut se demander ce qu'il entend par *sensiblement*. Quand il dit que $|\omega|$ est sensiblement > 1, veut-il dire que $|\omega| - 1$ par exemple n'est pas très petit, ou que $|\omega|$ est très grand.

Dans le 1^er^ cas, il se trompe, nous venons de voir que R est du même ordre de grandeur que ρ_0 pour toutes les valeurs de $\frac{q_1}{\tau}$, c'est à dire pour toutes les valeurs de ω, sauf pour les *très petites* valeurs de $\frac{q_1}{\tau}$.

Dans le 2[d] cas, ce qu'il dit est exact, car si ω est très grand, $\frac{q_1}{\tau}$ est très petit mais si $\frac{q_1}{\tau}$ est très petit l'emploi de la méthode n'a plus, comme nous l'avons dit, aucune raison d'être.

Il semble bien d'ailleurs que sa pensée doit être interprétée de la 1[ère] manière. Il sait trop bien le français pour avoir employé une expression impropre et le contexte semble plutôt favorable à cette interprétation.

Est-il vrai du moins que R ne peut jamais être *très grand* par rapport aux termes conservés de ρ? Oui, si l'on suppose $\varkappa$ très petit, car alors nous avons

$$\rho = \varkappa_1 \cos v + \varkappa \cos f + \varkappa' \cos (f - 2v)$$

et nous avons donné l'expression du coefficient $\varkappa'$; c'est le dernier terme qui représente R. Si nous posons:

$$2v - f = f'$$

cette équation devient:

$$\rho = \varkappa_1 \cos v + \varkappa' \cos f' + \varkappa \cos (f' - 2v).$$

On retombe donc sur une expression de même forme, mais où le rôle des coefficients $\varkappa$ et $\varkappa'$ est interverti. On peut donc *indifféremment* prendre $\varkappa$ ou $\varkappa'$ pour le coefficient du terme principal, ou pour celui de R; si l'on *convient* de regarder toujours le plus grand des deux comme représentant le terme principal, on sera certain que R ne pourra devenir très grand.

Aurait-on la même liberté si $\varkappa$ n'étant plus très petit, on devait tenir compte des puissances supérieures de $\varkappa$; on aurait alors des termes en $2f - 3v$, $2f - v$ etc. et si le coefficient de l'un de ces termes devenait très grand on ne pourrait plus employer le même artifice. Nous verrons plus loin que cela peut fort bien arriver.

Cause de l'Erreur de Gyldén.

Les conclusions de Gyldén, du Chapitre 1[er], § 1, N° 2, pages 10 à 17 sont donc fausses. Quelle est l'origine de son erreur?

Il envisage l'équation (1) et égale dans les deux membres les coefficients de $\cos f$ et $\cos v$. Si $\varkappa$ est très petit, nous pouvons écrire:

$$\rho = \varkappa_1 \cos v + \varkappa \cos f + \varkappa' \cos (f - 2v).$$

Il vient alors dans ρ^3 des termes en

$$\text{(A)} \qquad \cos^2 v \cos f\,, \quad \cos^3 f\,, \quad \cos^2 (f - 2v) \cos f$$

et en

$$\text{(B)} \qquad \cos^2 v \cos (f - 2v),$$

qui peuvent donner un terme en $\cos f$.

Nous avons aussi dans ρ^3 des termes en

$$\text{(A')} \qquad \cos^3 v\,, \quad \cos^2 f \cos v\,, \quad \cos^2 (f - 2v) \cos v$$

et en

$$\text{(B')} \qquad \cos v \;\cos f \;\cos (f - 2v),$$

qui peuvent donner un terme en $\cos v$. Gyldén tient compte des termes (A) et (A'), mais ne tient pas compte des ternes (B) et (B') qui sont du même ordre.

Si $\varkappa$ n'étant plus très petit, on ne pouvait plus négliger $\varkappa^2$, il y a bien d'autres termes dont il faudrait tenir compte.

L'introduction des termes négligés ferait perdre aux équations leur forme »horistique».

Dans le N° 3, Gyldén fait une tentative pour pousser l'approximation plus loin. Il arrive ainsi à des formules très compliquées d'où il ne tire rien; elles ne lui servent même pas à lui faire découvrir l'erreur commise dans le N° précédent. Il se borne à montrer que les résultats du N° 3 concordent approximativement avec ceux du N° 2, pourvu que la quantité qu'il appelle f page 25 soit très grande. Mais le cas où f est très grand est précisément celui où les vieilles méthodes classiques s'appliquent sans difficulté et où tout cet appareil est inutile.

Je n'ai pu arriver à déterminer quel est le but poursuivi dans le N° 4, et comme il n'est fait dans la suite aucune application des résultats qui y sont contenus, je m'abstiendrai d'en analyser ici le contenu.

Emploi des Fonctions Elliptiques.

Dans le § 2, Gyldén applique une seconde méthode, fondée sur l'emploi des fonctions elliptiques; nous allons voir qu'elle ne diffère pas de la méthode de Delaunay et qu'elle permet par conséquent d'obtenir correctement une première approximation. Nous verrons ensuite l'usage que Gyldén cherche en faire pour les approximations suivantes.

Posons

$$\rho = ge^{iv} + he^{-iv}; \; \gamma \cos v = \frac{\gamma}{2}(e^{iv} + e^{-iv}).$$

Substituons dans l'équation (1) et égalons dans les deux membres les coefficients de e^{iv} et e^{-iv}. Nous aurions aussi des termes en $e^{\pm 3iv}$, mais nous ne nous en occupons pas par ce qu'ils ne sauraient donner naissance à de petits diviseurs. Nous obtenons ainsi les deux équations.

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} g'' + 2ig' &= \alpha g + 3\beta g^2 h - \frac{\gamma}{2} \\ h'' - 2ih' &= \alpha h + 3\beta g h^2 - \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right.$$

où g', g'' désignent les dérivées successives de g par rapport à v.

Dans g et h nous ne conserverons que les termes à longue période qui seuls peuvent donner lieu à de petits diviseurs; mais alors nous pouvons négliger g'' et h'' devant g' et h', et il reste:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2ig' &= \alpha g + 3\beta g^2 h - \frac{\gamma}{2} \\ -2ih' &= \alpha h + 3\beta g h^2 - \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions par h', et g', ajoutons et intégrons, il viendra:

$$(7) \qquad \alpha g h + \frac{3}{2}\beta g^2 h^2 - \frac{\gamma}{2}(h + g) = \text{const.}$$

On peut ensuite achever l'intégration par les fonctions elliptiques. Telle est, aux notations près, la 2[de] méthode de Gyldén.

Comparons avec la méthode de Delaunay. Posons

$$F = \frac{1}{2}(\rho'^2 + \rho^2) - \frac{\alpha}{2}\rho^2 - \frac{\beta}{4}\rho^4 + \gamma\rho\cos v + u$$

ρ' désignant la dérivée de ρ par rapport à v, et u une variable auxiliaire.

L'équation (1) peut être remplacée par les équations canoniques

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{dF}{d\rho'} = \rho'; \ \dfrac{d\rho'}{dt} = -\dfrac{dF}{d\rho} = -(1-\alpha)\rho + \beta\rho^3 - \gamma\cos v \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dF}{du} = 1; \ \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{dF}{dv}. \end{cases}$$

Posons $\rho = \sqrt{2\xi}\cos\omega$, $\rho' = \sqrt{2\xi}\sin\omega$; d'où:

$$F = \xi + u - \alpha\xi\cos^2\omega - \beta\xi^2\cos^4\omega + \gamma\sqrt{2\xi}\cos v\cos\omega$$

les équations conserveront avec les variables ξ, ω; v, u la forme canonique. Si, conformément à la méthode de Delaunay, nous ne conservons que les termes à longue période; si par conséquent nous laissons de côté les termes en $\cos 2\omega$, $\cos 4\omega$, $\cos(v-\omega)$, il restera:

$$F = \xi + u - \frac{\alpha}{2}\xi - \frac{3}{8}\beta\xi^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{2\xi}\cos(v+\omega).$$

Soit

$$\omega + v = \varepsilon, \ u = \zeta - \xi$$

il viendra

$$(9)\qquad F = \zeta - \frac{\alpha}{2}\xi - \frac{3}{8}\beta\xi^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{2\xi}\cos\varepsilon$$

et les équations, devant rester canoniques, deviendront:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\varepsilon} = -\gamma\frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\sin\varepsilon; \ \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{dF}{d\xi} = +\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta\xi - \frac{\gamma\cos\varepsilon}{2\sqrt{2\xi}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dF}{d\zeta} = 1; \ \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{dF}{dv} = 0.$$

Si nous posons:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\,[illegible], \ k = \frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\,[illegible]$$

on retombera sur les équations (6) d'où il suit que la 2^de^ méthode de Gyldén, étant identique à celle de Delaunay nous donne une 1^ère^ approximation correcte.

On voit sans peine que g et h sont des fonctions doublement périodiques de v. On peut alors construire les équations correctes qui lient les quantités appelées plus haut $\varkappa, \varkappa_1$ et σ; ces équations sont transcendantes et elles n'ont par conséquent aucun rapport avec les équations (2). A ce point de vue les conclusions du § 2 sont en contradiction directe avec celles du § 1.

Dira-t-on au moins que les formules concordent quand $\varkappa$ est très petit non seulement d'une façon absolue, mais par rapport à $\varkappa_1$. Nous allons voir que non, et l'Analyse que nous venons de donner dans le paragraphe 2 suffisait d'ailleurs pour que nous en fussions sûrs d'avance.

Nous allons développer g et h suivant les puissances de $\varkappa$, et écrire:

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots, \qquad h = h_0 + h_1 + h_2 + \ldots$$

où h_n représente l'ensemble des termes de l'ordre de $\varkappa^n$. Nous trouvons d'abord:

$$g_0 = h_0 = \text{const.}; \qquad \alpha g_0 + 3\beta g_0^3 = \frac{\gamma}{2}$$

et ensuite:

$$(10) \qquad \begin{cases} 2ig_1' = (\alpha + 6\beta g_0^2)\, g_1 + 3\beta g_0^2 h_1 \\ -2ih_1' = (\alpha + 6\beta g_0^2)\, h_1 + 3\beta h_0^2 g_1. \end{cases}$$

Ce sont des équations linéaires à coefficients constants; nous pourrons y satisfaire en posant:

$$g_1 = \varkappa e^{-i\varsigma v}, \qquad h_1 = \varkappa' e^{-i\varsigma v}$$

ou bien

$$g_1 = \varkappa' e^{i\varsigma v}, \qquad h_1 = \varkappa e^{i\varsigma v}.$$

Ou bien encore en faisant la demi somme de ces deux solutions particulières; on obtient ainsi:

$$\rho = 2g_0 \cos v + \varkappa \cos f + \varkappa' \cos(f - 2v)$$

avec

$$f = (1 - \varsigma)\, v \qquad 2g_0 = \varkappa_1$$

et en substituant dans les équations (10), on trouve:

$$\varkappa(2\varsigma - \alpha - 6\beta g_0^2) = 3\beta g_0^2 \varkappa'$$

$$\varkappa'(-2\varsigma - \alpha - 6\beta g_0^2) = 3\beta g_0^2 \varkappa.$$

Mais $\alpha + 6\beta g_0^2$ c'est ce que nous avons appelé plus haut τ, et $3\beta g_0^2$, c'est ce que nous avons appelé $\frac{1}{2} q_1$; il vient ainsi:

$$\varkappa(2\varsigma - \tau) = \frac{1}{2} q_1 \varkappa'$$

$$\varkappa'(-2\varsigma - \tau) = \frac{1}{2} q_1 \varkappa$$

d'où:

$$4\varsigma^2 = \tau^2 - \frac{q_1^2}{4}$$

et

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}.$$

Ces formules sont en concordance avec les résultats du paragraphe 2 et en désaccord avec les équations (2), c'est à dire avec les équations de GYLDÉN.

Cherchons encore les termes constants de g_2 et h_2. Nous avons:

$$2ig_2' - (\alpha + 6\beta g_0^2)g_2 - 3\beta g_0^2 h_2 = 6\beta g_0 g_1 h_1 + 3\beta g_0 g_1^2$$

$$-2ih_2' - (\alpha + 6\beta g_0^2)g_2 - 3\beta g_0^2 h_2 = 6\beta g_0 g_1 h_1 + 3\beta g_0 h_1^2.$$

Nous cherchons seulement les parties constantes de g_2 et h_2; nous devons donc faire $g_2' = h_2' = 0$, $g_2 = h_2$, et remplacer $g_1 h_1$, g_1^2 et h_1^2 par leurs parties constantes. Or nous avons:

$$g_1 = \frac{\varkappa}{2} e^{-i\varsigma v} + \frac{\varkappa'}{2} e^{+i\varsigma v}$$

$$h_1 = \frac{\varkappa'}{2} e^{-i\varsigma v} + \frac{\varkappa}{2} e^{i\varsigma v}$$

d'où:

$$\text{partie constante } g_1^2 = \text{partie constante } h_1^2 = \frac{\varkappa\varkappa}{2}$$

$$\text{partie constante } g_1 h_1 = \frac{\varkappa^2 + \varkappa'^2}{4}$$

d'où:

$$-(\alpha + 9\beta g_0^2)g_2 = \frac{3\beta g_0}{2}(\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa\varkappa').$$

Or nous allons avoir; non plus $\varkappa_1 = 2g_0$ comme dans l'approximation précédente, mais:

$$\varkappa_1 = 2g_0 + 2g_2.$$

Comparons avec la seconde équation (2) qui peut s'écrire

$$-\alpha\varkappa_1 - \frac{3}{4}\beta\varkappa_1^3 - \frac{3}{2}\beta\varkappa_1(\varkappa^2 + \varkappa'^2) = -\gamma$$

en remarquant que $\varkappa'^2$ n'est pas autre chose que ce que Gyldén appelle (R^2). En première approximation, nous avons:

$$\alpha\varkappa_1 + \frac{3}{4}\beta\varkappa_1^3 = \gamma, \qquad \varkappa_1 = 2g_0.$$

Soit $\varkappa_1 = 2g_0 + 2\delta$, de sorte que δ devrait être égal à g_2. Cela fera en négligeant δ^2, $\delta\varkappa^2$, $\delta\varkappa'^2$

$$-(\alpha + 9\beta g_0^2)\delta = \frac{3}{2}\beta g_0(\varkappa^2 + \varkappa'^2)$$

on reconnaît déjà que la formule est erronée.

Discussion de la Méthode Précédente.

Jusqu'ici les conclusions du § 2, d'ailleurs contradictoires avec celles du § 1 sont correctes, mais Gyldén veut pousser plus loin l'approximation et tenir compte des termes négligés. Il écrit donc les équations (avec d'autres notations)

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} 2ig' - \alpha g - 6\beta g^2 h + \frac{\gamma}{2} &= M' \\ -2ih' - \alpha h - 6\beta h^2 g + \frac{\gamma}{2} &= N' \end{aligned}\right.$$

où M' et N' représentent l'ensemble des termes d'abord négligés et il les intègre par approximations successives.

J'aurais à faire au sujet de ses conclusions la remarque suivante. Ayant résolu correctement les équations (6), il constate qu'elles conduisent dans certains cas à des solutions asymptotiques.

»Mais, ajoute-t-il page 67, nous verrons dans ce qui suit que la solution asymptotique n'appartient pas à notre problème; elle est due uniquement à la manière d'aborder les approximations...».

Il est évident qu'ici Gyldén se trompe. Les équations approximatives (6) admettent un système de solutions asymptotiques et par conséquent une solution périodique pour laquelle les exposants caractéristiques sont réels et différents de zéro. Si les équations approximatives admettent une solution périodique, il en sera de même des équations exactes, qui en diffèrent fort peu; car si l'on fait varier un système d'équations différentielles d'une manière continue, une solution périodique ne peut disparaître que quand l'un des exposants caractéristiques est nul, ce qui n'est pas le cas; de plus cette solution périodique aura encore des exposants caractéristiques réels, puisqu'ils différeront très peu de ceux qui correspondent aux équations (6); et l'existence des exposants caractéristiques réels entraîne celle des solutions asymptotiques. Tous ces points sont hors de doute et je les ai établis d'une façon très simple et rigoureuse dans mes méthodes nouvelles.

Gyldén cherche à nous donner la démonstration promise d'abord page 71, puis page 75; il cherche d'abord à montrer qu'on peut diriger les approximations de façon à ne plus rencontrer de solution asymptotique. Pour cela il écrit les équations (11) sous la forme suivante:

$$\text{(11 bis)}\qquad \left|\begin{aligned} 2ig' - (\alpha+\varepsilon)g - 6\beta g^2 h + \frac{\gamma}{2} &= M' - \varepsilon g \\ -2ih' - (\alpha+\varepsilon)h - 6\beta g h^2 + \frac{\gamma}{2} &= N' - \varepsilon h \end{aligned}\right.$$

et il intègre par approximations successives en faisant d'abord les seconds membres égaux à zéro, remplaçant ensuite les inconnues dans les 2[ds] membres par les valeurs trouvées en 1[ère] approximation et ainsi de suite.

Il choisit ε de façon à éviter la solution asymptotique et il se flatte de pouvoir conduire les approximations suivantes en évitant l'introduction de cette solution et en aboutissant à une série convergente.

Pour juger cette prétention, il suffit de comparer à un exemple simple

Soit:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \beta\rho = \cos v.$$

Nous voyons que si $\beta = 1$, l'équation ne comporte plus de solution périodique et que v sort des signes trigonométriques. Croira-t-on que l'on peut échapper à cette conséquence par l'artifice suivant. Soit $\beta = 1$ et écrivons l'équation sous la forme:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 + \varepsilon)\rho = \cos v + \varepsilon\rho.$$

Nous trouvons en 1ère approximation $\rho = 0$, puis $\rho = \frac{\cos v}{\varepsilon}$, puis $\rho = \frac{2 \cos v}{\varepsilon}$, puis $\rho = \frac{3 \cos v}{\varepsilon}$, suite manifestement divergente.

Eh bien, GYLDÉN fait absolument la même chose. Il y a page 72 quelques lignes sur l'ordre de grandeur des quantités introduites. Ces lignes, trop concises pour être claires tendent évidemment à prouver que la série obtenue sera convergente, ou du moins que les termes iront en diminuant.

Or cela n'est pas exact; car si nous supposons $M' = N' = 0$, les équations (11 bis) se réduisent aux équations (6) et nous savons, GYLDÉN l'a démontré lui-même que ces équations admettent des solutions asymptotiques. La série en question est donc divergente, puisque si elle était convergente, ces solutions n'existeraient pas.

La série converge-t-elle dans d'autres cas? Les seconds membres de (11 bis) peuvent-ils être assez petits pour qu'il en soit ainsi? Cela n'a pas lieu, nous venons de le voir quand M' et N' sont nuls; cela ne pourrait donc être vrai que si M' et N' détruisaient les termes les plus importants de εg et de εh. Or il est évident qu'il ne peut pas en être ainsi *quels que soient* M' et N'. Eh bien, dans le raisonnement de GYLDÉN, il n'est fait aucune hypothèse sur M' et N' (ou ce qui revient au même sur ce qu'il appelle M *et* N). Son raisonnement est donc inexact.

GYLDÉN cherche ensuite à montrer que la solution asymptotique ne peut pas servir de point de départ à une véritable approximation (pages 75, 199) parce que le 2d terme du développement est susceptible de devenir infini.

C'est comme si l'on disait que quand α est petit $\sqrt{x}$ n'est pas une valeur approchée de $\sqrt{x+\alpha}$, sous prétexte que si l'on développe suivant les puissances de α, le 2[d] terme du développement est $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{x}}$ et devient infini pour $x = 0$.

Dans le § 3, GYLDÉN applique une nouvelle méthode qui ne diffère de la précédente que par quelques complications nouvelles. Il néglige les termes M' et N' de sorte que les équations (11) se réduisent aux équations (6); nous venons de voir que ces équations s'intègrent très aisément par les fonctions elliptiques. Je n'ai pu arriver à comprendre pourquoi il aborde ainsi par une méthode approximative et compliquée un problème qu'il a lui-même résolu par une méthode rigoureuse et simple.

Il n'y a qu'un passage où il ne dit pas explicitement qu'il néglige M' et N', c'est celui de la page 93; mais on doit remarquer qu'il y regarde W comme une fonction périodique de l'argument *unique* w, ce qui ne peut s'expliquer que de deux manières; ou bien s'il néglige M' et N' comme dans le reste du §, ou bien s'il réduit M' et N' aux termes $-g''$ et $-h''$ qui sont négligés dans les équations (6). Dans ce dernier cas, on retomberait sur les équations (12) du paragraphe suivant, sur lesquelles nous reviendrons.

Nouvelle Méthode de Gyldén.

Dans le § 4, GYLDÉN emploie encore une nouvelle méthode, fondée également sur l'emploi des fonctions elliptiques. Elle consiste à développer la solution de l'équation (1) suivant les puissances de γ.

Si l'on appliquait cette méthode dans toute sa rigueur, on trouverait en 1[ère] approximation, c'est à dire pour $\gamma = 0$, que ρ est une fonction doublement périodique de v, développable suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un argument unique $f = v + w$, fonction linéaire de v. Dans les approximations suivantes on trouverait des termes en

$$mv + nw$$

m et n étant des entiers quelconques.

Il s'introduirait aussi des termes séculaires où v sortirait des signes trigonométriques mais GYLDÉN évite l'introduction de ces termes séculaires par l'artifice suivant:

Il écrit l'équation (1) sous la forme:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \alpha')\rho - \beta\rho^3 = -\gamma \cos v + (\alpha - \alpha')\rho$$

α' étant une indéterminée. Dans le 2^d membre, il substitue à la place de ρ, d'abord zéro, puis à la 2^de approximation la valeur de ρ trouvée en 1^ère approximation et plus généralement à la n^e approximation, la valeur trouvée en $n - 1$^e approximation. Il dispose ensuite de l'indéterminée α' à chaque approximation, de façon à faire disparaître les termes en cos f qui lui donneraient après intégration des termes séculaires. *Cet artifice est légitime.*

De plus, il laisse de côté à chaque approximation les termes en $mv + nw$ où l'entier m n'a pas la valeur ± 1. Ce qui justifie dans une certaine mesure cette manière de faire, c'est que les termes de la forme $v + nw$ sont ceux où s'introduit le plus important de tous les petits diviseurs; mais on ne doit pas oublier que d'autres termes, (qu'on ne rencontre pas il est vrai dans les 1^ères approximations, mais seulement dans les suivantes) introduisent de nouveaux petits diviseurs encore plus petits, et que c'est précisément à ces petits diviseurs qu'est due la divergence des séries.

Opérer de la sorte, cela revient à déterminer g et h par les équations

$$(12) \quad \begin{cases} g'' + 2ig' - \alpha g - 6\beta g^2 h + \dfrac{\gamma}{2} = 0 \\ h'' - 2ih' - \alpha h - 6\beta h^2 g + \dfrac{\gamma}{2} = 0. \end{cases}$$

Cette méthode se rapproche de celle de Delaunay; elle n'est pas plus précise; car les termes par lesquels les équations (12) diffèrent des équations (6) ne sont pas plus grands et plus importants que les autres termes négligés.

Il ne faudrait pas croire non plus que l'on obtient par ce procédé tous les termes en $v + nw$ avec leurs coefficients exacts. En effet, il peut s'introduire à la k^e approximation des termes de la forme $mv + nw$ $(m > 1)$ dont la combinaison produira à la $k + p^e$ approximation un terme en $v + nw$; si l'on néglige ces termes à la k^e approximation, le coefficient du terme en $v + nw$ ne sera plus exact à la $k + p^e$.

Quoi qu'il en soit les équations (12) admettent l'intégrale:

$$g'h' - \alpha gh - \frac{3}{2}\beta g^2 h^2 + \frac{\gamma}{2}(h+g) = \text{const.}$$

On ne peut pas en trouver l'intégrale générale; mais pour l'objet poursuivi par Gyldén, il suffit d'en connaître une solution périodique. Cette solution périodique existe et le développement correspondant converge, comme il arrive toujours pour une solution périodique.

Les développements trouvés par Gyldén dans ce § 4 sont donc bien convergents, ainsi qu'il l'annonce. Ils pourraient être très facilement obtenus par la théorie des solutions périodiques. Mais dès qu'il voudrait tenir compte des termes en $mv + nw$, la convergence cesserait.

L'analyse de Gyldén ne nous apprend d'ailleurs rien de plus que la méthode de Delaunay. Elle n'est pas plus précise; elle n'est pas plus propre à nous renseigner sur la convergence des développements *complets.*

Analyse du Second Chapitre.

Passons au Chapitre II et au § 5; Gyldén y envisage des équations plus compliquées où figure dans le 1er membre outre la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dv^2}$, un polynôme entier en y et $\frac{dy}{dv}$ dont les coefficients sont des fonctions connues de v. Quant au 2d membre, c'est une fonction connue de v. Toutes ces fonctions connues de v sont supposées développables en séries trigonométriques.

Gyldén commence par étudier des transformations, permettant de simplifier cette équation. Je n'expliquerai pas ici le détail de ces transformations. Il arrive page 137 à l'équation suivante:

$$\frac{d^2y}{dv^2} + \Upsilon_1 y + \Upsilon_2 y^2 + \Upsilon_3 y^3 = \Omega$$

où $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3, \Omega$ sont des fonctions connues de v, *toutes très petites*; mais il n'énonce pas de résultats assez nets pour qu'on puisse les discuter.

A la page 142, il envisage une équation analogue, mais où Υ_1 est très voisin de 1. La discussion des transformations qu'il lui applique nous

entraînerait trop loin, j'ai hâte d'arriver à ce qu'il dit page 158 d'une équation plus simple qui est son équation (39)

$$\frac{d^2z}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3\eta^2)z + \beta_0\chi\eta^2 = \Omega$$

$$\eta^2 = (1 - \beta)z^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2$$

(Ω et χ donnés).

Il cherche à satisfaire à cette équation en posant:

$$z = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots$$

et en déterminant les V par une série d'équations qu'il appelle (47) page 170 et qui sont de la forme:

$$\frac{d^2V_n}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H)V_n = \Omega_n$$

Ω_n étant connu et H étant la partie constante de η^2.

Laissant de côté, pour simplifier, β et χ, ainsi que β_1 et faisant $\beta_3 = -1$ pour fixer les idées, nous voyons que l'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2z}{du^2} + z\left(1 + z^2 + \frac{dz^2}{du^2}\right) = \Omega. \tag{13}$$

Gyldén s'imagine qu'il obtiendra une 1ère approximation, en négligeant dans le coefficient de z les termes périodiques, de sorte que ce coefficient se réduise à une constante H et que l'équation (13) devienne:

$$\frac{d^2z}{du^2} + z(1 + H) = \Omega. \tag{13 bis}$$

Il est important d'examiner si cela est légitime, parce que c'est le principe même de la méthode horistique.

Soit:

$$\Omega = \gamma\cos u + \gamma'\cos(u + \omega)$$

où $\omega = \sigma v$, σ étant petit.

L'équation (13 bis) nous conduirait alors à une solution de la forme

$$z = x\cos u + x'\cos(u + \omega)$$

et alors on aurait sensiblement (à cause de la petitesse de σ)

$$\eta^2 = z^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = x^2 + x'^2 + 2xx' \cos\omega$$

$$H = x^2 + x'^2.$$

Substituons dans les équations (13) et (13 bis). L'équation (13 bis) donne:

$$(14) \quad \begin{cases} x(x^2 + x'^2) = \gamma \\ -x'(2\sigma + \sigma^2) + x'(x^2 + x'^2) = \gamma' \end{cases}$$

d'où Gyldén conclut que x et x' sont limités. Mais on néglige ainsi la différence entre les 1^ers^ membres de (13) et (13 bis), c'est à dire:

$$2zxx' \cos\omega = x^2x' \cos(u + \omega) + x^2x' \cos(u - \omega) + x'^2x \cos u + x'^2x \cos(u + 2\omega).$$

Si σ est très petit, si γ et γ' sont comparables entre eux, x et x' sont du même ordre de grandeur, x^2x', x^3, etc. sont comparables à γ et les termes négligés sont de l'ordre de Ω, c'est à dire des termes conservés.

Du reste on montre cela d'un façon plus frappante en raisonnant comme il suit:

Faisons $\sigma = 0, \gamma = \gamma'$; les deux équations (14) ajoutées donnent

$$2x^3 = \gamma = 2x'^3 = \gamma'; \qquad (x + x')^3 = 4\gamma.$$

Mais si $\sigma = 0$, les deux termes de Ω se confondent en un seul et on a $\Omega = 2\gamma \cos u$, d'où par la 1^ère^ équation (14) (qui est alors exacte):

$$(x + x')^3 = 2\gamma$$

résultat contradictoire avec le précédent.

L'analyse de Gyldén ne ressemble donc en rien à une approximation. Mais il faut se poser la question d'une façon plus large et se demander: Supposons que Gyldén n'ait pas commis cette erreur et qu'il ait calculé exactement ces coefficients x, ces coefficients auraient-ils été limités?

Soit plus généralement:

$$\Omega = \sum \gamma_n \cos f_n, \qquad f_n = u(1 + \sigma_n), \qquad \sigma_n = \varepsilon\lambda_n$$

$$z = \sum x_n \cos f_n, \qquad \mu_n = 2\lambda_n + \varepsilon\lambda_n^2.$$

Nous supposons les σ_n très petits, ε très petit, λ_n et μ_n finis.

Nous voyons d'abord que z est une fonction paire de u, de telle façon que pour $u = 0$ ses dérivées d'ordre impair s'annulent. Nous désignerons par y, y'', y^{IV}, etc. les valeurs de z et de ses dérivées successives d'ordre pair pour $u = 0$; et de même par Ω_0, Ω_0'' etc. les valeurs de Ω, et de ses dérivées pour $u = 0$. On trouve ainsi:

$$y'' + y + y^3 = \Omega_0$$

$$(y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y) + (y + y'')y(y + 2y'') = \Omega_0 + \Omega_0''.$$

Or:

$$y = \sum\varkappa_n, \qquad \Omega_0 = \sum\gamma_n, \qquad y = y'' = -\varepsilon\sum\varkappa_n\mu_n$$

$$\Omega_0 + \Omega_0'' = -\varepsilon\sum\gamma_n\mu_n, \qquad y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = \varepsilon^2\sum\varkappa_n\mu_n^2,$$

d'où:

$$-\varepsilon\sum\varkappa\mu + (\sum\varkappa)^3 = \sum\gamma$$

$$\varepsilon\sum\varkappa\mu^2 + \sum(\varkappa\mu)\sum\varkappa(\sum\varkappa + 2\varepsilon\sum\varkappa\mu) = -\sum\gamma\mu,$$

ou si ε est très petit:

$$(\sum\varkappa)^3 = \sum\gamma, \qquad \sum(\varkappa\mu)(\sum\varkappa)^2 = -\sum\gamma\mu,$$

ou enfin:

$$\sum\varkappa\mu = -\frac{\sum\gamma\mu}{(\sum\gamma)^{\frac{2}{3}}}.$$

Or si $\sum\gamma = 0$, cette expression devient infinie; il faut donc que l'un des $\varkappa$ *au moins* devienne infini, (ou plutôt deux au moins, puisque $\sum\varkappa = 0$). *Les coefficients $\varkappa$ ne sont donc pas limités.*

Ici encore la méthode horistique est en défaut.

Equations de la Longitude.

Jusqu'ici Gyldén a envisagé surtout les équations dont il se sert pour la détermination du rayon vecteur. Dans le § 6, il envisage plus particulièrement celles qui lui servent à déterminer la longitude. L'examen de la méthode horistique dans ce dernier cas est d'autant plus important qu'on a fait des tentatives pour l'appliquer, ce qu'on n'a jamais cherché à faire pour le rayon vecteur.

Un astronome tout à fait éminent, M. BACKLUND, trop confiant dans les résultats de GYLDÉN, s'est même un instant laissé entraîner à des conclusions inexactes qu'il a rectifiées depuis. M. STOCKWELL avait déterminé par les méthodes ordinaires certaines inégalités de la précession; M. HARZER avait calculé par les méthodes de GYLDÉN une inégalité de la longitude d'Hécube; j'intends par les premières méthodes de GYLDÉN et non par la méthode horistique. M. BACKLUND appliqua à ces deux cas les formules horistiques de GYLDÉN, et ces formules lui donnèrent des coefficients 3 ou 4 fois plus petits que ceux qu'avaient obtenus ses devanciers. (Bulletin de l'Académie de S:t Petersbourg, mai 1900).

Les équations de la longitude, de même que celles de la précession, peuvent être ramenées à la forme:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \Sigma a \sin(nt + v) + \Sigma b \sin pt$$

où $\sin(nt + v)$ est l'un des termes à courte période et où $\sin pt$ est l'un des termes à longue période. Pour plus de simplicité, je n'envisagerai qu'un terme de chaque sorte et j'écrirai.

$$\frac{d^2v}{dt^2} = a \sin(nt + v) + b \sin pt. \tag{15}$$

Je supposerai que a et n sont petits, mais b et p beaucoup plus petits de sorte que $\frac{b}{p^2}$ soit beaucoup plus grand que $\frac{a}{n^2}$, et que p^2 soit comparable à $\frac{a^2}{n^2}$.

Posons alors:

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} = a \sin(nt + v_0), \tag{16}$$

et

$$v = v_0 + \varepsilon.$$

En négligeant le carré de ε, on trouve:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon \cos(nt + v_0) + b \sin pt. \tag{17}$$

Dans les anciennes méthodes (Stockwell et Harzer) on néglige le 1[er] terme qui est à courte période et on écrit

$$\varepsilon = -\frac{b}{p^2}\sin pt.$$

Voici maintenant ce que donne la méthode horistique appliquée par M. Backlund. On trouve sensiblement:

$$v_0 = -\frac{a}{n^2}\sin nt$$

d'où:

$$\cos(nt + v_0) = \cos nt + \frac{a}{n^2}\sin^2 nt.$$

L'équation (17) devient ainsi

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \varepsilon\left(a\cos nt + \frac{a^2}{n^2}\sin^2 nt\right) + b\sin pt$$

ou, *si l'on conserve seulement la valeur moyenne du coefficient de* ε:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{a^2}{2n^2}\varepsilon + b\sin pt$$

d'où:

$$\varepsilon = -\frac{b\sin pt}{\dfrac{a^2}{2n^2} + p^2}.$$

Telles sont les deux analyses entre lesquelles il s'agit de décider; cela est facile, puisque les équations (16) et (17) peuvent s'intégrer exactement et que Gyldén lui-même a souvent intégré des équations de même forme dans le cours de ses recherches.

Cette intégration montre que le terme en $\sin pt$ qui est le seul sensible est réduit à

$$\varepsilon = -\frac{b\sin pt}{p^2}$$

ce qui est conforme aux résultats obtenus par les anciennes méthodes (Cf Comptes Rendus tome 132, page 50).

Backlund revenant sur la question (Comptes Rendus, tome 132, page 291) découvrit le point faible de l'analyse qu'il avait d'abord suivie;

mais il voulut généreusement prendre la faute tout entière sur lui et disculper GYLDÉN; sa conduite dans cette circonstance montre que son caractère est digne de son talent.

»GYLDÉN, dit-il, considère dès le début des approximations l'équation:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon\cos(nt + v_0) - \frac{1}{2}a\varepsilon^2\sin(nt + v_0) - \frac{1}{6}a\varepsilon^3\cos(nt + v_0) + b\sin pt \tag{18}$$

(c'est à dire qu'il néglige ε^4 et non ε^2) et il arrive pour le terme en $\sin pt$ à l'expression

$$-\frac{b\sin pt}{\nu^2 + p^2}$$

où ν^2 est sans doute beaucoup plus petit que $\frac{a^2}{2n^2}$, mais n'est cependant pas nul.»

BACKLUND reconnu ensuite (Bulletin Astronomique, tome 19, page 433) que la même objection s'applique non seulement au cas de la précession, mais aussi au cas d'Hécube, et il ajouta qu'il serait très désirable qu'une analyse plus approfondie conduisît à la détermination de ν^2.

Ce qui résulte de l'analyse précédente, c'est à dire de l'intégration exacte de l'équation (17), c'est que ν^2 s'annule avec b. Voyons comment GYLDÉN traite notre équation (18), qui joue un rôle analogue à celui de son équation (12) de la page 189 (voir pages 189 à 199).

Par une série de transformations assez compliquées, il la ramène à la forme:

$$\frac{d^2y}{du^2} - 1024q^4h_2y - 96q^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2 y = Y$$

Y représentant un ensemble de termes connus; c'est son équation (16) de la page 198. GYLDÉN réduit $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ à sa valeur moyenne, qui est une constante positive, quitte à faire passer les termes négligés dans le 2[d] membre et à les confondre avec Y. Son équation prend alors la forme:

$$\frac{d^2y}{du^2} - \beta y = -Q \quad \text{(équation 17 de la page 198)}$$

où β est une constante *positive* et où Q est connu. C'est ce terme en βy qui permet d'éviter les petits diviseurs et qui joue le rôle de »terme horistique».

C'est toujours le même procédé qui consiste à remplacer une des fonctions qui figure dans nos équations pas sa valeur moyenne, et dont nous avons à plusieurs reprises reconnu l'illégitimité. Mais ici le terme en $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ ne joue qu'un rôle secondaire, car $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ est beaucoup plus petit que h_2. C'est donc le terme en $h_2 y$ qui est le principal *terme horistique;* comment s'est-il introduit dans les équations de Gyldén? Nous le voyons apparaître à la page 189.

»D'abord, dit Gyldén, nous en retranchons le terme dépendant de la partie constante de V_1^2, terme qui se réunit immédiatement avec la fonction Z_0.»

Voici ce que cela veut dire; reprenons notre équation (15), en posant comme nous l'avons fait, $v = v_0 + \varepsilon$, et négligeant ε^4, elle peut s'écrire:

$$\frac{d^2v_0}{dt^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\sin(nt + v_0) + a\varepsilon\cos(nt + v_0) - \frac{1}{2}a\varepsilon^2\sin(nt + v_0)$$

$$- \frac{1}{6}a\varepsilon^3\cos(nt + v_0) + b\sin pt.$$

Nous avons vu comment cette équation peut se scinder en deux pour donner les équations (16) et (18); mais Gyldén ne fait pas tout à fait la même chose; il scinde l'équation de la façon suivante:

$$\text{(16 bis)} \qquad \frac{d^2v_0}{dt^2} = a\left(1 - \frac{h}{2}\right)\sin(nt + v_0),$$

$$\text{(18 bis)} \qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - a\varepsilon\cos(nt + v_0) = -\frac{1}{2}a(\varepsilon^2 - h)\sin(nt + v_0)$$

$$- \frac{a\varepsilon^3}{6}\cos(nt + v_0) + b\sin pt$$

la constante h qui joue le rôle de h_2 étant la valeur moyenne de la fonction périodique ε^2.

L'équation (18 bis) ne diffère que par les notations de l'équation (12) de la page 189 de Gyldén. Dans cette équation (12) nous voyons la

constante h_2 figurer deux fois; à savoir dans le 2^d^ et le 3^e^ termes. Cet h_2 qui figure dans le 3^e^ terme, finit dans la suite des transformations par aller se perdre dans les termes connus Y; le »terme horistique» de l'équation (16) de GYLDÉN provient donc uniquement du second terme de l'équation (12), c'est à dire du terme en V_1. Les termes en $\varepsilon^2 - h$ et en ε^3, dans la suite de l'analyse de GYLDÉN, finissent par se confondre dans les termes connus Y.

Voici donc, en dernière analyse, en quoi consiste la méthode de GYLDÉN. En première approximation, on remplacera $\varepsilon^2 - h$ et ε^3 par zéro dans le 2^d^ membre de (18 bis) et on intégrera (16 bis) et (18 bis). Dans (16 bis) on donnera à h une valeur positive quelconque de l'ordre de ε^2. En 2^de^ approximation, on remplacera dans le 2^d^ membre de (18 bis), $\varepsilon^2 - h$ et ε^3 par leur 1^ère^ valeur approchée; quand à h on le remplacera dans (16 bis) par la valeur moyenne de la fonction périodique ε^2 obtenue en 1^ère^ approximation et ainsi de suite.

Cette méthode serait légitime si le terme

$$-\frac{ah}{2}\sin(nt + v_0) \tag{19}$$

dont on tient compte était plus important que le terme

$$-\frac{a}{2}(\varepsilon^2 - h)\sin(nt + v_0) \tag{20}$$

que l'on néglige. Or le terme le plus important de ε est un terme en $\sin pt$, soit donc

$$\varepsilon = k \sin pt.$$

Le terme (19) dont on tient compte est

$$-\frac{ak^2}{4}\sin(nt + v_0).$$

Le terme (20) que l'on néglige est:

$$+\frac{ak^2}{8}\sin(nt + 2pt + v_0) + \frac{ak^2}{8}\sin(nt - 2pt + v_0).$$

Les coëfficients sont du même ordre, les arguments sont à peu près les mêmes puisque p est beaucoup plus petit que n; l'intégration ne peut in-

troduire de petit diviseur ni en ce qui concerne (19), ni en ce qui concerne (20). Il n'y a aucune raison pour tenir compte de l'un des termes plutôt que de l'autre.

L'analyse de GYLDÉN ne permet donc pas de trancher la question. Il s'agit de déterminer le coëfficient de $\sin pt$. D'après les anciennes théories il serait sensiblement

$$\frac{b}{p^2}.$$

D'après GYLDÉN il serait

$$\frac{b}{\nu^2 + p^2}$$

où ν serait lui-même de l'ordre de $\frac{b}{p^2}$. Il faut donc faire le calcul en considérant b et p comme très petits et de telle façon que $\frac{b}{p^2}$ soit fini; c'est à dire développer suivant les puissances de b et conserver seulement parmi les termes en b^n ceux qui contiennent p^{2n} au dénominateur, c'est précisément ce que l'on fait dans la méthode de DELAUNAY; si nous trouvons pour le coëfficient $\frac{b}{p^2}$, GYLDÉN aura tort, si nous trouvons une fonction de $\frac{b}{p^2}$ qui ne devient pas infinie avec $\frac{b}{p^2}$, GYLDÉN aura raison.

Appliquons donc la méthode de DELAUNAY; posons $\chi = nt + v$, de sorte que notre équation devient

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = a\sin\chi + b\sin pt.$$

Nous pouvons alors écrire, en introduisant une variable auxiliaire χ':

$$\frac{d\chi'}{dt} = a\sin\chi, \qquad \frac{d\chi}{dt} = \chi' - \frac{b}{p}\cos pt.$$

Posons (en introduisant deux nouvelles variables auxiliaires z et u)

$$F = \frac{1}{2}\chi'^2 - \frac{b}{p}\chi'\cos z + a\cos\chi + pu$$

nos équations prendront la forme canonique:

$$\frac{d\chi'}{dt} = -\frac{dF}{d\chi}; \qquad \frac{d\chi}{dt} = \frac{dF}{d\chi'}; \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{du} = p; \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{dF}{dz}.$$

Appliquons la méthode de JACOBI.

Soit une fonction S de la variable χ et du paramètre W définie par l'équation:

$$\left(\frac{dS}{d\chi}\right)^2 = 2[\varphi(W) - a\cos\chi].$$

Posons ensuite:

$$\chi' = \frac{dS}{d\chi}, \qquad \frac{dS}{dW} = w = \int \frac{\varphi'(W)d\chi}{\sqrt{2(\varphi - a\cos\chi)}}.$$

Nous voyons:

1° que

$$\frac{\chi'^2}{2} - a\cos\chi = \varphi(W)$$

2° que

$$\chi' d\chi - W dw$$

est une différentielle exacte.

3° que χ', $\cos\chi$ et $\sin\chi$ sont des fonctions doublement périodiques de w; nous pouvons choisir la fonction $\varphi(W)$ de façon que la période réelle soit 2π, et que χ', $\cos\chi$ et $\sin\chi$ soient développables suivant les sinus et les cosinus des multiples de w.

Il vient alors:

$$F = \varphi(W) + pu - \frac{b}{p}\chi'\cos z$$

et les équations conservant la forme canonique s'écrivent:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dF}{dw}, \qquad \frac{dw}{dt} = -\frac{dF}{dW}, \qquad \frac{dz}{dt} = p.$$

La fonction F est développable suivant les cosinus et les sinus des multiples de w et de z. Pour appliquer la méthode de DELAUNAY, il faut ne conserver dans F que les termes »à longue période» c'est à dire ici ceux qui ne dépendent pas de w, mais seulement de z. Pour cela nous n'avons qu'à réduire χ' à sa valeur moyenne qui est une fonction de W que j'appelle χ'_0, de sorte que

$$F = \varphi(W) + pu - \frac{b}{p}\chi'_0\cos z$$

d'où:

$$\frac{dW}{dt}=0,\qquad \frac{dw}{dt}=-\varphi'(W)+\frac{b}{p}\frac{d\chi_0'}{dW}\cos z,\qquad \frac{dz}{dt}=p$$

d'où:

$$W=\text{const.},\qquad z=pt,\qquad w=-t\varphi'(W)+\frac{b}{p^2}\frac{d\chi_0'}{dW}\sin pt.$$

On voit que w contient un terme en

$$\frac{b}{p^2}\sin pt$$

qui devient très grand si $\frac{b}{p^2}$ est très grand; or χ, d'après nos hypothèses est une fonction de w qui augmente de 2π quand w augmente de 2π. S'il y a dans w un terme périodique d'amplitude très grande, il y en aura également un dans χ.

Le phénomène »horistique» ne peut donc se produire comme l'avait cru Gyldén.

9. *Examen d'une équation particulière.*

Passons maintenant à la page 208; nous y trouverons l'équation

$$\frac{d^2y}{du^2}+\mu y\frac{dy}{du}=-a\sin\sigma u \tag{21}$$

Gyldén cherche une solution périodique de cette équation de la forme:

$$y=\sum x_n\sin n\sigma u$$

n étant entier positif; on prend plaisir à se trouver en présence d'une problème aussi simple et aussi nettement posé.

Gyldén cherche à déterminer les coëfficients x_n et il arrive à la fin de la page 209 à une équation qu'il cherche à discuter.

»Maintenant, dit-il, en supposant les coëfficients x_3, x_4, ..., ou connus, ou négligeables, il se comprend que la quantité x_1, qui s'obtient par la résolution de l'équation précédente du 3^e degré, ne surpasse jamais une certaine limite qui s'approche d'autant plus de zéro, que la valeur de $\frac{16a}{\mu^2}$ est plus petite.

On aura facilement des résultats semblables relativement aux coëfficients $x_2, x_3, \ldots$.

Pour juger ce résultat, développons les deux membres de (21) suivant les puissances de u, et égalons les coëfficients de u, il viendra:

$$\sigma^2[-\Sigma x n^2 + \mu(\Sigma x n)^2] = -a\sigma$$

d'où:

$$\Sigma|x|n^2 + \mu(\Sigma|x|n)^2 > \left|\frac{a}{\sigma}\right|. \tag{22}$$

Si σ est très petit, le second membre de cette inégalité est très grand, d'où il suit que les x ne peuvent pas être tous limités.

Dira-t-on que la série Σx est convergente, mais que la série $\Sigma x n^2$ diverge, de sorte que le 1^er^ membre de l'inégalité peut être très grand, bien que tous les x soient limités?

Non, car tant que la solution périodique existe, y est une fonction analytique de u, ses dérivées d'ordre quelconque sont des fonctions périodiques de u et sont comme elle développable en série de Fourier. La série

$$\Sigma|x|n^p$$

est donc convergente quelque grand que soit p. Soit γ la plus grande des valeurs de $n^4|x|$, l'inégalité (22) nous donnera:

$$\gamma\sum\frac{1}{n^2} + \mu\gamma^2\left(\sum\frac{1}{n^3}\right)^2 > \left|\frac{a}{\sigma}\right|$$

ce qui montre que γ croît indéfiniment avec $\left|\frac{a}{\sigma}\right|$.

D'ailleurs si comme le dit Gyldén, $x_3, x_4, \ldots$ étaient »négligeables», le 1^er^ membre de (22) ne dépendrait plus que de x_1 et x_2 et ne contiendrait plus qu'un nombre fini de termes. Il serait donc impossible que x_1 et x_2 soient tous deux limités.

Enfin montrons plus directement encore que y ne peut être limité. Soit M le maximum de $|y|$. Intégrons l'équation (21) sous la forme:

$$\frac{dy}{du} - \frac{\mu}{2}y^2 = \frac{a}{\sigma}\cos\sigma u + C.$$

Égalons dans les deux membres les coëfficients de $\cos \sigma u$; dans $\frac{dy}{du}$ il est plus petit que $\pi\sigma M$, dans y^2 plus petit que πM^2; nous aurons donc:

$$\pi\sigma M + \pi M^2 \frac{\mu}{2} > \left|\frac{a}{\sigma}\right|$$

ce qui montre que M croît indéfiniment avec $\frac{a}{\sigma}$.

10. *Équations du rayon vecteur.*

J'arrive au § 7 page 227. Nous y retrouvons l'équation (1), avec cette différence que le 2^d^ membre au lieu de se réduire à un seul terme en comprend plusieurs de même forme, dont je désignerai l'ensemble par X. Nous avons donc

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \alpha)\rho - \beta\rho^3 = X \tag{23}$$

Gyldén écrit ici z au lieu de ρ; β_2 au lieu de β, et Z au lieu de $1 - \alpha$; mais dans toute la 1^ière^ partie de son analyse, il suppose Z constant et voisin de 1.

Nous aurons d'ailleurs:

$$X = -\sum A_n \cos G_n, \qquad G_n = 2\lambda_n v.$$

Gyldén, page 229 introduit deux variables nouvelles y et ψ et pose:

$$\rho = \frac{y}{1 + \psi}.$$

Alors l'équation (23) est remplacée par les deux équations suivantes (équations (3) et (4) de Gyldén)

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} = (1 + \psi)\nu^2 - \beta\frac{y^2}{1 + \psi}, \tag{24}$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (1 - \alpha - \nu^2)y = (1 + \psi)X + 2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv} + Y \tag{25}$$

où Y désigne un ensemble de termes inutiles à écrire.

Quant à ν^2 c'est une constante choisie de telle façon que ψ soit une série trigonométrique dont la partie constante est nulle.

L'équation (24) peut être remplacée par la suivante: (équation (3') de Gyldén):

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} - 2\nu^2\psi = U \tag{24 bis}$$

U étant un ensemble de termes inutiles à écrire.

Voici alors comment Gyldén conduit les approximations. Il fait d'abord $\psi = 0$ dans les seconds membres de (25) et (24 bis) et il détermine à l'aide de ces deux équations y, ψ et ν^2; il substitue ensuite ces valeurs des inconnues dans les 2[ds] membres, ce qui lui fournit des valeurs plus approchées de ces mêmes inconnues et ainsi de suite.

En 1[ière] approximation, il trouve:

$$y = \Sigma x_n \cos G_n, \qquad \nu^2 = \frac{1}{2}\beta\Sigma x^2, \qquad x_n = \frac{A_n}{4\lambda_n^2 + \alpha - 1 + \nu^2}$$

et il a aussi page 230 une expression de ψ que je ne transcris pas.

Commençons par comparer avec les résultats du chapitre 1[er]. Dans ce chapitre, le 2[d] membre X se réduisait à un seul terme $-\gamma\cos v$; et Gyldén s'efforçait d'obtenir l'intégrale générale dépendant d'une constante arbitraire appelée x. Il obtenait ainsi l'équation (2) qui nous l'avons vu est fausse en général; mais quand il se bornait à chercher l'intégrale particulière qui correspond au cas de $x = 0$, son équation se réduisait à

$$\frac{3}{4}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0 \tag{3}$$

qui est exacte.

Dans le chapitre que nous citons maintenant, Gyldén ne cherche plus l'intégrale générale, mais seulement l'intégrale particulière dont il vient d'être question. Donc, quand X se réduit à un seul terme, il devrait retrouver l'équation (3) à la différence des notations près.

Soit donc

$$X = -A_1 \cos G_1 = -\gamma\cos v$$

c'est à dire:

$$A_1 = \gamma, \qquad 2\lambda_1 = 1.$$

Les formules de la page 230 donnent alors

$$y = x_1 \cos G_1, \qquad x_1 = \frac{A_1}{\alpha + \nu^2}, \qquad \nu^2 = \frac{1}{2}\beta x_1^2, \qquad \psi = \frac{\beta x_1^2}{8 + 4\nu^2}\cos 2G_1.$$

Observons que d'après l'équation (3) si α et γ sont très petits et β fini, x_1 est de l'ordre de $\sqrt[3]{\gamma}$ et par conséquent petit; donc x_1^2 et par conséquent ψ sont négligeables devant l'unité. On a donc:

$$\rho = y = x_1 \cos v$$

et

$$\nu^2 x_1 + \alpha x_1 - A_1 = 0$$

ou:

$$\frac{1}{2}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0.$$

C'est bien une équation de la forme (3); mais elle est incompatible avec l'équation (3) puisque les coëfficients sont différents.

La méthode de Gyldén est donc non-seulement illégitime, mais encore en contradiction avec l'un des rares résultats exacts qu'il avait obtenus antérieurement.

D'où provient cette divergence? Pour que la méthode d'approximation fussent légitimes, il faudrait que les termes négligés fussent plus petits que les termes conservés. Or il n'en est rien, il est aisé de constater que dans le 2^d membre de (25) le terme $2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv}$ que l'on néglige est du même ordre que le terme X que l'on conserve. Et cela est vrai, bien entendu, que X se réduise à un seul terme, ou en contienne plusieurs (cf. Comptes Rendus, tome 138, page 933).

11. *Analyse du troisième chapitre.*

Enfin dans le chapitre III, Gyldén cherche à appliquer aux problème des 3 corps les principes établis dans les deux premiers chapitres; comme nous avons vu que ces principes sont faux, il paraît superflu d'en discuter les applications. Un mot seulement sur la conclusion la plus importante. Les termes les moins élevés de la fonction perturbatrice peuvent donner

lieu au phénomène connu sous le nom de libration; mais il n'en est pas de même des termes d'ordre élevé; pour, ceux-ci en effet, les termes horistiques prennent une influence prépondérante et s'opposent à la libration.

La fausseté de cette conclusion est manifeste. J'ai établi en effet par des démonstrations rigoureuses dans les *Méthodes Nouvelles:*

1° Qu'à chaque terme de la fonction perturbatrice, quelque élevé qu'en soit l'ordre correspond un système de solutions périodiques de la 2e ou de la 3e sortes; ces solutions sont développables suivant les puissances des masses et les séries convergent pourvu que les masses soient assez petites. (Chapitre III.)

2° Que parmi ces solutions périodiques il y en a autant de stables que d'instables; que les solutions très voisines d'une solution périodique stable, oscillent autour de cette solution périodique, ce qui donne lieu à la libration; que par conséquent un terme quelconque de la fonction perturbatrice engendrera une libration, à moins que les exposants caractéristiques correspondants ne soient tous nuls. (Chapitre IV.)

3° Que d'autre part on ne saurait prétendre que pour les termes d'ordre suffisamment élevé, ces exposants sont nuls. Il suffit pour s'en convaincre de former les expressions approchées des termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice par la méthode de Darboux. (Chapitre VI, en particulier n° 102.)

La conclusion de Gyldén est donc fausse; où s'est-il trompé? Je ne puis le dire exactement; il s'appuie sur ce qu'un certain coëfficient a est négatif pour les termes élevés page 292; d'ou tire-t-il cette affirmation; il m'a été impossible de le découvrir; il la déduit sans doute de quelque proposition antérieure qu'il néglige de rappeler. Quelle est cette proposition, est-ce une de celles dont nous avons reconnu plus haut la fausseté; est-ce une autre qui m'a échappé et qui serait alors également fausse, puisqu'elle conduit à une conclusion inexacte? Je ne puis le savoir.

En résumé de tout ce grand effort, il ne reste rien.

Quelques-uns des résultats sont manifestement exacts, mais on aurait pu y arriver par une voie beaucoup plus rapide; un plus grand nombre sont manifestement faux; la plupart sont énoncés d'une façon trop obscure pour qu'on puisse décider s'ils sont vrais ou faux.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES RIEMANN'SCHEN PROBLEMS IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

T. BRODÉN

in LUND.

Bekanntlich rührt von RIEMANN eine Aufgabe her, welche in folgender Weise formulirt werden kann: Es seien in der Ebene einer Variabeln x σ von $x = \infty$ verschiedene Stellen

$$e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$$

gegeben, und andererseits σ lineare homogene Substitutionen in n Veränderlichen,

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_\sigma;$$

dann sollen n monogene Functionen von x

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

bestimmt werden, welche beim Überschreiten, in positiver Richtung, von σ die x-Ebene zerschneidenden Schnitten $(e_1\infty), (e_2\infty), \ldots, e_\sigma\infty)$ bez. die Substitutionen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ erleiden, sonst aber im endlichen durchgehends holomorph sind, während überdies die Stellen $e_1, \ldots, e_\sigma$, sowie auch $e_{\sigma+1} = \infty$ den »Charakter der Bestimmtheit» aufweisen.[1]

[1] RIEMANN, *Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten* (Nachlass), Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 357—69. Man sehe auch SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der lin. Differentialgl.* II, 1, p. 109; II, 2, p. 382 ff.; und *Zur Theorie der lin. Differentialgl. im Anschluss an das Riemann'sche Problem*, Journ. für Math., Bd. 123, p. 138 ff. — Vergl. auch KLEIN, Math. Ann. 46, p. 83.

Diese Aufgabe ist im wesentlichen mit der folgenden gleichbedeutend: es soll eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der FUCHS'schen Klasse bestimmt werden, für welche einerseits die im endlichen liegenden Verzweigungsstellen, andererseits die Monodromiegruppe vorgeschrieben sind.[1]

Hieran knüpft sich zunächst die Frage nach der *Existenz* von Functionen (bez. Differentialgleichungen) der verlangten Art. Diese Existenzfrage ist bisher nur unter einer sehr wesentlichen Specialisirung in strenger Weise entschieden worden, indem Herr L. SCHLESINGER zeigte, dass dieselbe zu bejahen ist, wenn die von ihm sogenannten »Convergenzbedingungen» erfüllt sind.[2]

Im folgenden wird nicht diese RIEMANN'sche Frage in unveränderten Form behandelt, sondern eine etwas allgemeinere, in welcher weniger verlangt wird: *der »Charakter der Bestimmtheit» an den Stellen e_i wird nicht länger gefordert.*

Die zugehörige zu bestimmende lineare Differentialgleichung hat dann *eindeutige,* im allgemeinen aber nicht rationale Coefficienten.

Die Frage nach der Lösbarkeit der hiermit angegebenen Aufgabe wird im folgenden *auf den Fall $n = 2$ zurückgeführt.* Oder eigentlich noch mehr: es wird gezeigt, dass die Existenzfrage in ihrer vollen Allgemeinheit zu bejahen ist, falls für $n = 2$ gewisse im wesentlichen nur durch Ungleichheiten charakterisirte Voraussetzungen überhaupt mit der Existenz von 2 Functionen der verlangten Art verträglich sind. Und der Beweis hierfür wird so geführt, dass für die n Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gewisse analytische Ausdrücke hervorgehen, welche die postulirten, auf den Fall $n = 2$ sich beziehenden Functionen enthalten. Diese Ausdrücke sind Quotienten, deren Zähler als Modificationen der POINCARÉ'schen ξ-Reihen bezeichnet werden können.[3]

Hierbei sei noch daran erinnert, dass wenn man in der genannten Weise — oder in irgend einer Weise — n Functionen $y_1 \ldots y_n$ bestimmt

[1] Vgl. HILBERT, *Mathematische Probleme* (Pariser Vortrag), Sep.-Abzug aus den Gött. Nachr., p. 37, Archiv d. Math. u. Phys. (3), I.

[2] S. die citirten Stellen.

[3] Eine vorläufige Mittheilung über diese Untersuchung erschien in Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandl., Stockholm 1902, p. 5—11. Das Problem wurde hier, der Einfachheit wegen, in unwesentlich verschiedener Form genommen.

hat, welche die geforderten Verzweigungsverhältnisse haben (die gegebenen Verzweigungsstellen $e_1 \ldots e_\sigma$ mit den zugehörigen gegebenen linearen Substitutionen), dadurch auch *alle* Systeme $z_1 \ldots z_n$ mit denselben Verzweigungsverhältnissen — alle »cogredienten» Systeme — bestimmt sind, indem alle solchen Systeme in der Form

$$z_i = r_{i0} y_i + r_{i1} y_i' + r_{i2} y_i'' + \ldots + r_{i,n-1} y_i^{(n-1)} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

enthalten sind, wo die r_{ik} eindeutige Functionen von x bedeuten.[1] Falls Systeme $z_1 \ldots z_n$ existiren, welche den Riemann'schen Forderungen genügen, sind sie also auch in dieser Form enthalten.

Wir müssen mit gewissen Hilfsbetrachtungen beginnen.[2]

Für σ *hyperbolische* lineare Substitutionen

$$\frac{z' - h_i}{z' - k_i} = p_i^2 \frac{z - h_i}{z - k_i}, \qquad (i=1,2,\ldots,\sigma)$$

kurz

$$B_1, B_2, \ldots, B_\sigma,$$

seien die 2σ Fixpunkte h_i, k_i vorgeschrieben und durchaus von einander getrennt; dagegen die Multiplicatoren p_i^2 vorläufig unbestimmt; nur setzen wir fest, dass sie alle > 1 angenommen werden sollen (so dass also die unendlich oft wiederholte Anwendung der Substitution B_i bez. der inversen B_i^{-1} auf die Stelle k_i bez. h_i als Grenzstelle führt). Die zu B_i gehörenden Niveaulinien sind (unabhängig von p_i) die Orthogonaltrajectorien (Kreise) des durch h_i und k_i bestimmten Kreisbüschels. Man denke sich für jede Substitution B_i einen zugehörigen Niveaukreis H_i gezeichnet, welcher die Stelle h_i einschliesst (und also k_i ausschliesst). Diese σ Kreise seien ferner so klein gewählt, dass sie einander vollständig ausschliessen (und auch nicht äusserlich berühren), was möglich ist, da die σ Punkte h_i nach unserer

[1] S. etwa Schlesinger, *Handbuch etc.* II, 1, p. 112—13.

[2] Ähnliche Betrachtungen habe ich bei Burnside gefunden, in einer Abhandlung wo er die Convergenz der Poincaré'schen Thetareihen zum Falle $m = 1$ [Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension] auszudehnen sucht, Proceedings of the London Math. Soc., Vol. 23, p. 55 ff. Mit Recht, scheint es, wird diese Stelle der (nicht überall ganz correcten) Burnside'schen Arbeit in der neulich erschienenen Lieferung (II, 1) des Fricke-Klein'schen Werkes über automorphe Functionen als interessant bezeichnet (p. 166); vgl. unten.

Annahme vollständig getrennt liegen. Bei Ausübung der Substitution B_i geht H_i in einen anderen Niveaukreis K_i über, welcher mit p_i veränderlich ist, aber für hinreichend grosse p_i-Werthe [wir denken uns $p_i > 0$] die Stelle k_i einschliesst und beliebig kleinen Radius erhält. Es ist daher möglich, eine positive Grösse P so zu bestimmen, dass sobald alle $p_i > P$ sind, die Kreise K_i einander ausschliessen, sowie auch die H_i ausschliessen. Man ertheile jetzt den p_i bestimmte Werthe, welche dieser Bedingung genügen. Dann liegen also 2σ einander ausschliessende Kreise vor, welche durch die Substitutionen B_i paarweise auf einander bezogen sind. Die *Substitutionsgruppe* Γ, welche durch $B_1 \dots B_\sigma$ als Fundamentalsubstitutionen bestimmt wird, ist mit Sicherheit in der z-Ebene *eigentlich discontinuirlich*, und es kann für dieselbe der von sämmtlichen Kreisen H_i und K_i ausgeschlossene Theil R_0 der Ebene als Discontinuitätsbereich (Fundamentalbereich) gelten.[1] Ein beliebiger Punkt von R_0 geht bei der Substitution B_i bez. B_i^{-1} in einen inneren Punkt von K_i bez. H_i über (aber natürlich nicht immer umgekehrt). Es können ferner unter den Substitutionen B_i keine Fundamentalrelationen bestehen.[2] Es lässt sich daher, von »identischen Umformungen»[3] abgesehen, jede Substitution V_ν der Gruppe nur in einer Weise in der Form

$$V_\nu \equiv B_{i_n}^{\lambda_n} B_{i_{n-1}}^{\lambda_{n-1}} \dots B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1} \tag{1}$$

darstellen, wo $i_1 \dots i_n$ ganze positive Zahlen $\leq \sigma$ sind, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ganze Zahlen $\gtrless 0$. Oder m. a. W.: jeder Gruppensubstitution (welche von der Identität verschieden ist) entspricht ein symbolisches Produkt (1) mit unzweideutig bestimmten Werthen von n, $i_1 \dots i_n$, $\lambda_1 \dots \lambda_n$, wenn man feststellt, dass niemals $i_{\rho+1} = i_\rho$ sein darf. Und umgekehrt stellt jedes Produkt der Form (1), welches dieser Bedingung genügt, eine von der Identität verschiedene Gruppensubstitution dar. Bekanntlich wird unter solchen Umständen die

[1] Man sehe etwa Fricke-Klein, *Autom. Funct.* I, p. 190—92; oder Schlesinger, *Handbuch etc.* II, 2, p. 240.

[2] S. z. B. Fricke-Klein, l. c. I, p. 174.

[3] Dieser Ausdruck wird in Klein-Fricke *Modulfunctionen* benutzt und erklärt, (I, p. 452).

unzweideutig bestimmte Summe $\sum_1^n |\lambda_k|$ als **Index** der fraglichen Substitution V_ν bezeichnet, $\sum |\lambda_k| = \text{Ind. } V_\nu$.[1]

Es gilt nun auch folgender Satz, den wir für unseren jetztigen Zweck als Hülfssatz benutzen werden:

Hülfssatz. *Über die 2σ gegebenen, von einander getrennten Fixpunkte h_i, k_i sei angenommen, dass keiner mit dem Nullpunkte ($z = 0$) zusammenfällt* [oder unendlich entfernt ist, was schon oben vorausgesetzt wurde]. *Wenn dann q eine beliebig grosse positive Zahl bedeutet, so lässt sich eine andere positive Grösse P so bestimmen, dass sobald jedes $p_i > P$ ist, die vier Coëfficienten einer jeden von der Identität verschiedenen Substitutionen*

$$V_\nu \equiv \left| z', \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu} \right|$$

der Gruppe Γ dem absoluten Betrage nach je grösser sind als

$$q^{\text{Ind } V_\nu},$$

wenn die Substitution in unimodularer Form geschrieben ist ($a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu = 1$).[2]

Der Beweis dieses Satzes lässt sich folgendermassen führen. Jede beliebige λ^{te} Potenz ($\lambda \gtrless 0$) einer Fundamentalsubstitution B_i lässt sich in unimodularer Form folgendermassen schreiben:

$$B_i^\lambda \equiv \left| z', \frac{\dfrac{k_i p_i^\lambda - h_i p_i^{-\lambda}}{h_i - k_i} z - \dfrac{h_i k_i (p_i^\lambda - p_i^{-\lambda})}{h_i - k_i}}{\dfrac{p_i^\lambda - p_i^{-\lambda}}{h_i - k_i} z - \dfrac{h_i p_i^\lambda - k_i p_i^{-\lambda}}{h_i - k_i}} \right|. \tag{2}$$

Dies gesetzt, betrachte man irgend eine bestimmte Substitution V_ν und bezeichne für den Augenblick mit f_1, g_1, l_1, m_1; f_2, g_2, l_2, m_2; f_3, g_3, l_3, m_3 etc. die Coefficienten der nach der Productdarstellung (1) in V_ν eingehenden Substitutionen

$$B_{i_1}^{\lambda_1}, \; B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1}, \; B_{i_3}^{\lambda_3} B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1} \text{ etc.},$$

[1] Vgl. SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 2, p. 270, 350.

[2] Der Satz kommt nicht in dieser Form bei BURNSIDE vor. Auch fehlt bei ihm die Bedingung, dass die h_i und k_i von Null verschieden sein sollen.

wobei für diese n Substitutionen (von denen die letzte mit V_ν zusammenfällt) unimodulare Form vorausgesetzt wird. Von einer erlaubten Zeichenänderung abgesehen, gelten dann, für $\rho = 1, 2, \ldots, n-1$, die Relationen

$$f_{\rho+1} = \alpha^{(\rho+1)} f_\rho + \beta^{(\rho+1)} l_\rho, \qquad g_{\rho+1} = \alpha^{(\rho+1)} g_\rho + \beta^{(\rho+1)} m_\rho,$$

$$l_{\rho+1} = \gamma^{(\rho+1)} f_\rho + \delta^{(\rho+1)} l_\rho, \qquad m_{\rho+1} = \gamma^{(\rho+1)} g_\rho + \delta^{(\rho+1)} m_\rho,$$

wo für den Augenblick $\alpha^{(\rho+1)}, \beta^{(\rho+1)}, \gamma^{(\rho+1)}, \delta^{(\rho+1)}$ die Coefficienten der in der Form (2) geschriebenen Substitution $B_{i_{\rho+1}}^{\lambda_{\rho+1}}$ bedeuten. Demgemäss wird

$$(3) \quad \begin{cases} l_{\rho+1} = l_\rho \cdot \dfrac{1}{h_{i_{\rho+1}} - k_{i_{\rho+1}}} \left\{ p_{i_{\rho+1}}^{\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{f_\rho}{l_\rho} - h_{i_{\rho+1}} \right) - p_{i_{\rho+1}}^{-\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{f_\rho}{l_\rho} - k_{i_{\rho+1}} \right) \right\}, \\ m_{\rho+1} = m_\rho \cdot \dfrac{1}{h_{i_{\rho+1}} - k_{i_{\rho+1}}} \left\{ p_{i_{\rho+1}}^{\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{g_\rho}{m_\rho} - h_{i_{\rho+1}} \right) - p_{i_{\rho+1}}^{-\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{g_\rho}{m_\rho} - k_{i_{\rho+1}} \right) \right\} \end{cases}$$

(und auf $f_{\rho+1} : f_\rho$, $g_{\rho+1} : g_\rho$ beziehen sich zwei ähnliche, aber nicht ganz so einfache Relationen, welche wir nicht benutzen werden).

Die Stellen $f_\rho : l_\rho$ liegen nothwendig innerhalb eines Kreises H_i oder K_i. Sie sind nämlich Bildpunkte der in R_0 liegende Stelle $z = \infty$ bei einer gewissen nicht identischen Substitution der Gruppe Γ. Zufolge der Annahme, dass kein Fixpunkt h_i oder k_i mit dem Nullpunkt zusammenfällt, lässt sich dasselbe hinsichtlich der Stellen $g_\rho : m_\rho$ erreichen. Dieselben sind nämlich Bildpunkte der Stelle $z = 0$. Da nun diese Stelle mit keinem Fixpunkt h_i zusammenfällt, so kann man die Kreise H_i so klein wählen, dass keiner derselben die Nullstelle einschliesst. Wenn nachher die p_i hinreichend gross gewählt werden, wird dasselbe auch für die Kreise K_i erreicht, da diese die Stellen k_i einschliessenden Kreise für hinreichend grosse p_i beliebig klein werden (s. oben), und andererseits auch keine Stelle k_i in $z = 0$ liegt. Dies vorausgesetzt, liegt also $z = 0$ innerhalb R_0, und folglich jeder Bildpunkt von $z = 0$ innerhalb irgend eines Kreises H_i oder K_i, und zwar innerhalb desselben Kreises, wie der entsprechende Bildpunkt von $z = \infty$, da bei jeder Substitution das ganze Gebiet R_0 in ein anderes übergeht, welches im Inneren eines Kreises H_i oder K_i liegt. Wenn man ferner beachtet, dass jede Substitution B_i^λ bez. $B_i^{-\lambda}$ ($\lambda > 0$) das ganze von den beiden Kreisen H_i und K_i ausgeschlossene Gebiet in ein gewisses Gebiet innerhalb K_i bez. H_i verwandelt, und andererseits dass im Producte

(1) $i_{\rho+1}$ und i_ρ immer verschieden sind, so sieht man ein, dass eine Substitution

$$B_{i_\rho}^{\lambda_\rho} B_{i_{\rho-1}}^{\lambda_{\rho-1}} \dots B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1}$$

den Bereich R_0 in einen Theil von K_{i_ρ} bez. H_{i_ρ} überführt, je nachdem $\lambda_\rho > 0$ oder < 0 ist (für $i_\rho = i_{\rho-1}$ und mit verschiedenen Vorzeichen von λ_ρ und $\lambda_{\rho-1}$ würde dies dagegen nicht nothwendig gelten). Da dies für das ganze Gebiet R_0 und seine Abbildungen gilt, so gilt es speciel für die R_0-Stellen $z = \infty$ und $z = 0$ und ihre Bildpunkte: die Stellen $f_\rho : l_\rho$ und $g_\rho : m_\rho$ liegen beide in K_{i_ρ} oder beide in H_{i_ρ}. Da nun diese Kreise von denjenigen $[K_{i_{\rho+1}}$ und $H_{i_{\rho+1}}]$ *verschieden* sind, deren Centra in $k_{i_{\rho+1}}$ und $h_{i_{\rho+1}}$ fallen, und da die 2σ Kreise sich vollständig ausschliessen, so lässt sich für die absoluten Beträge der in (3) vorkommenden 4 Differenzen $\frac{f_\rho}{l_\rho} - h_{i_{\rho+1}}$ etc. eine von Null verschiedene untere Grenze angeben, sowie offenbar auch eine endliche obere Grenze. Hieraus in Verbindung mit der ersten der Gleichungen (3) folgt ersichtlich, dass unabhängig vom Vorzeichen für $\lambda_{\rho+1}$ sowie überhaupt von der Wahl der Substitution V_ν und vom Werthe der Zahl ρ

$$(4) \qquad \left|\frac{l_{\rho+1}}{l_\rho}\right| > P^{|\lambda_{\rho+1}|} . C . \left[1 - P^{-2|\lambda_{\rho+1}|} . D\right]$$

ist, wo P eine (positive) untere Grenze für die p_i bedeutet, C und D positive Minimum- bez. Maximum-Grössen, welche sich bei unbegrenzter Vergrösserung von P gewissen festen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerthen nähern, welche nur von der Lage der Fixpunkte h_i, k_i abhängen. Für hinreichend grosses P kommt also der Klammerausdruck in (4) — welcher ja unter Umständen < 0 sein könnte — beliebig nahe dem Werthe 1. Es lässt sich somit jedenfalls eine Grösse $g < 1$ aber > 0 so bestimmen, dass sobald P hinreichend gross ist

$$\left|\frac{l_{\rho+1}}{l_\rho}\right| > g . P^{|\lambda_{\rho+1}|}$$

und folglich (da $g < 1$, $|\lambda_{\rho+1}| \geqq 1$ ist)

$$(5) \qquad \left|\frac{l_{\rho+1}}{l_\rho}\right| > (gP)^{|\lambda_{\rho+1}|}$$

wird. Hiermit verbinde man noch die aus (2) unmittelbar hervorgehende Ungleichheit

$$|l_1| > P^{|\lambda_1|} \cdot \frac{1 - P^{-2}}{\operatorname{Max}|h_i - k_i|},$$

welche wiederum auf

$$(6) \qquad |l_1| > (gP)^{|\lambda_1|}$$

führt — nachdem man, wenn nöthig, den vorher gewählten g-Werth hinreichend vermindert hat. Aus 5 und 6 folgt

$$(7) \qquad |l_n| > (gP)^{\sum\limits_1^n |\lambda_\rho|}.$$

Für $|m_n|$ erhält man in derselben Weise ganz dieselbe Ungleichheit; nur muss man möglicherweise für g einen kleineren Werth nehmen, da m_1 nach (2) nicht ganz dieselbe Form hat, wie l_1, und also die Ungleichheit (6) nicht nothwendig mit dem früheren g auch für $|m_1|$ gilt. Jedenfalls kann man aber g so klein (aber > 0) wählen, dass nicht nur $|l_n|$ sondern auch $|m_n|$ grösser als das rechte Glied in (7) wird. Wir denken uns ein solches g gewählt. Hinsichtlich f_n und g_n erinnern wir uns, dass die Quotienten $f_n : l_n$ und $g_n : m_n$ zwischen (endlichen und) von Null verschiedenen Grenzen bleiben. Hieraus folgt, dass wenigstens für einen hinreichend kleinen $g_1 < g$ aber > 0 weder $|f_n|$ noch $|g_n|$ kleiner als oder gleich

$$(g_1 P)^{\sum\limits_1^n |\lambda_\rho|}$$

sein kann. Und dies heisst mit anderen Worten: es lässt sich eine Grösse $g > 0$ so bestimmen, dass nicht nur $|l_n|$ und $|m_n|$, sondern auch $|f_n|$ und $|g_n|$ grösser als das zweite Glied in (7) werden — immer unter der Voraussetzung, dass P hinreichend gross ist (und somit die p_i hinreichend gross). Jetzt sei q eine beliebige, gegebene positive Grösse. Nach dem vorigen ist es möglich, einen P-Werth so zu bestimmen, dass die Ungleichheit (7) und die drei analogen für diesen P-Werth und alle grösseren gelten, wenn g einen gewissen *festen* Werth hat (und — wie immer vorausgesetzt wurde — in jedem Falle die p_i, welche die Coefficienten l_n etc. näher bestimmen, sämmtlich grösser als P sind). Wenn nöthig, vergrössern wir jetzt P so, dass $gP > q$ wird. Dann gelten die vier genannten Ungleich-

heiten *a fortiori*, wenn man q statt gP einführt. Da nun ferner, der obigen Herleitung gemäss, jene Ungleichheiten nicht an einer bestimmten Substitution geknüpft sind, sondern unter den angegebenen Voraussetzungen hinsichtlich g und P für *jede* Substitution der Gruppe Γ gelten, so folgt: bei gegebenem, beliebigem q lässt sich ein P so bestimmen, dass sobald alle $p_i > P$ sind, die absoluten Beträge der Coefficienten $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ einer beliebigen in unimodularer Form geschriebenen Substitution V_ν der Gruppe Γ je grösser als

$$q^{\operatorname{Ind} V_\nu}$$

sind, w. z. b. w.

Erweiterung des Satzes. Die Annahme, dass die σ Substitutionen *hyperbolisch* sein sollten (die p_i reell und positiv), haben wir bisher nur der Einfachheit wegen festgehalten. Der Satz gilt (mit $|p_i|$ statt p_i) eben so gut, wenn sie (alle oder theilweise) *loxodromisch* sind. Der Beweis ist grösstentheils wörtlich in derselben Weise zu führen, doch können natürlich die Kreise H_i und K_i jetzt nicht Niveaulinien sein.[1]

Die entsprechenden homogenen Gruppen.

Da der Fundamentalbereich R_0 keine elliptischen oder parabolischen Ecken aufweist, und da jedenfalls für hinreichend grosse p_i auch keine »secundäre Relationen»[2] zwischen den Erzeugenden der Gruppe Γ bestehen können [sobald, wie wir immer annehmen, die 2σ Kreise H_i, K_i einander vollständig ausschliessen, können ja, wie schon bemerkt, überhaupt keine Relationen zwischen den B_i vorhanden sein] so ist die Gruppe Γ in folgender Weise »isomorph spaltbar»:[3] wenn man von den Substitutionen B_i,

$$B_i \equiv \left| z', \frac{L_i z + M_i}{N_i z + P_i} \right|,$$

[1] Bei Voraussetzung von *parabolischen* Substitutionen (äusserlicher Berührung zweier Kreise H_i und K_i) behauptet — beiläufig gesagt — BURNSIDE (l. c. p. 57), dass der von ihm bewiesene Satz sich auch in diesem Falle durch eine sehr einfache Modification der Beweisführung darlegen lässt, ohne dass die Art dieser Modification näher angegeben wird. Auch bei FRICKE-KLEIN (*Autom. F.* II, 1, p. 166) wird diese Behauptung BURNSIDE's hervorgehoben. Ist aber dieselbe wirklich richtig?

[2] FRICKE-KLEIN, l. c. I, p. 175.

[3] Ibid. p. 200.

wo L_i, M_i, N_i, P_i die unimodulare Form

$$L_i = \frac{k_i p_i - h_i p_i^{-1}}{h_i - k_i}, \qquad M_i = -\frac{h_i k_i (p_i - p_i^{-1})}{h_i - k_i},$$

$$N_i = \frac{p_i - p_i^{-1}}{h_i - k_i}, \qquad P_i = -\frac{h_i p_i - k_i p_i^{-1}}{h_i - k_i}$$

haben [welche aus (2) für $\lambda = 1$ hervorgeht], zu den *homogenen* Substitutionen C_i,

$$C_i \equiv \begin{Bmatrix} t', & L_i t + M_i v \\ v', & N_i t + P_i v \end{Bmatrix} \tag{8}$$

übergeht, so bestimmen die σ *unimodularen* Substitutionen C_i als Fundamentalsubstitutionen eine homogene ternäre Gruppe Δ, welche mit Γ *holoedrisch isomorph* ist [und eine ähnliche Gruppe geht hervor, wenn man in (8) für gewisse bez. für alle i die vier Coefficienten mit -1 multiplicirt; wir bestimmen uns aber jetzt eben für die Form (8)].

Da die Fundamentalsubstitutionen der Gruppe Δ sämmtlich unimodular sind, so ist auch jede zu Δ gehörende Substitution unimodular. Die Relationen (2) und (3) gelten somit — mutatis mutandis — noch für die Gruppe Δ, da sie unimodulare Form der entsprechenden Γ-Substitutionen voraussetzen. In der That sind aber jene Gleichungen so gebildet, dass sie ganz unmittelbar (ohne Zeichenänderung) die Coefficienten bez. Coefficientenrelationen auch für die Δ-Substitutionen U_ν angeben (was doch jetzt unwesentlich ist).

Offenbar lässt sich der obige »Hülfssatz» auch auf die Gruppe Δ übertragen:

Abgeänderte Form des Hülfssatzes: Der Satz lässt sich so modificieren, dass man statt die nicht-homogene Gruppe Γ zu betrachten und dabei unimodulare Form vorauszusetzen, *die unimodulare homogene Gruppe Δ einführt; der Wortlaut des Satzes bleibt übrigens ganz derselbe.*

Modification der Poincaré'schen ξ-Reihen.

Die Poincaré'schen ξ-Reihen sind bekanntlich in folgender Weise gebildet.

Es liege eine lineare homogene Substitutionsgruppe Θ in n Veränderlichen vor, etwa mit σ Fundamentalsubstitutionen A_i (wie oben in der Einleitung). Dann ist es immer möglich, eine Fuchs'sche Gruppe ϑ mit dem Einheitskreise als Hauptkreis zu bestimmen, welche mit Θ in der Weise isomorph ist, dass jeder ϑ-Substitution eine bestimmte Θ-Substitution entspricht [Θ und ϑ (1, r)-deutig isomorph]. Man ordne die (immer abzählbare) Menge der ϑ-Substitutionen in irgend einer Weise in eine einfache Reihe

$$S_0(\eta), S_1(\eta), \ldots, S_\nu(\eta) \ldots \qquad (S_0 \equiv 1)$$

Jeder Substitution S_ν entspricht also eine bestimmte Θ-Substitution T_ν. Man bezeichne zur Abkürzung mit

$$T_\nu y_i$$

den Ausdruck, in den sich y_i verwandelt, wenn man T_ν auf ein System von n Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ anwendet; also

$$T_\nu y_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa}^{(\nu)} y_\varkappa, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

wenn

$$T_\nu \equiv (a_{i\varkappa}^{(\nu)}). \qquad (i,\varkappa=1,2,\ldots,n)$$

Die ξ-Reihen haben die Form

$$\xi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{T_\nu^{-1} H_i(S_\nu\eta)\} \left(\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right)^m \tag{9} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

wo $H_1(\eta), H_2(\eta), \ldots, H_n(\eta)$ rationale Functionen bedeuten, welche niemals für $|\eta| = 1$ unendlich gross werden, und m eine ganze positive Zahl $\geqq 2$. Eine leichte Überlegung zeigt, dass wenn die unbedingte Convergenz dieser Reihen vorausgesetzt wird, die einfache Relation

$$\xi_i(S_\mu\eta) = \left(\frac{d\eta}{dS_\mu\eta}\right)^m T_\mu \xi_i(\eta) = (\gamma_\mu\eta + \delta_\mu)^{2m} T_\mu \xi_i(\eta)$$

besteht, wobei die Bezeichnung

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu\eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu\eta + \delta_\nu}, \qquad \alpha_\nu\delta_\nu - \beta_\nu\gamma_\nu = 1,$$

vorausgesetzt wird.[1] In dem Falle, wo die Gruppe ϑ lauter elliptische Substitutionen enthält, lässt es sich zeigen, dass jene Convergenz für η-Werthe innerhalb des Einheitskreises wirklich stattfindet, nur mit Ausnahme für gewisse nirgends gehäufte Stellen.[2] Wenn dagegen parabolische Substitutionen vorhanden sind, so kann die Convergenz nur unter der Voraussetzung bestehen, dass diejenigen Fundamentalsubstitutionen von Θ, welche parabolischen Substitutionen in ϑ entsprechen, Fundamentalgleichungen besitzen, deren sämmtliche Wurzeln dem absoluten Betrage nach gleich 1 sind. Diese wesentliche Beschränkung hat zur Folge, dass die ξ-Reihen nur in sehr beschränkter Weise angewandt werden können, wenn es sich um die RIEMANN'sche Existenzfrage handelt: nur unter der schon oben angedeuteten, sehr wesentlichen Specialisirung lässt sich, wie Herr SCHLESINGER gezeigt hat, die Existenzfrage mittels der ξ-Reihen entscheiden. Anders scheint es sich aber zu verhalten, wenn man die Form der Reihen in geeigneter Weise modificiert.

Zunächst werden wir uns jetzt, ohne direkte Rücksicht auf die RIEMANN'sche Existenzfrage, mit einer möglichen Modification der ξ-Reihen beschäftigen.

Wir setzen vorläufig nur voraus, dass bei gegebenen, im endlichen liegenden Stellen $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ und gegebenen Fixpunkten h_i, k_i für die σ Fundamentalsubstitutionen B_i einer nicht-homogenen Gruppe Γ der oben beschriebenen Art, wenigstens für alle $|p_i|$, welche je $>$ ein gewisses P sind, Functionen $t(x)$ und $v(x)$ angebbar seien, welche, wenn x die Schnitte $(e_1\infty)\ldots(e_\sigma\infty)$ im positiven Sinne überschreitet bez. die homogenen Substitutionen $C_1 \ldots C_\sigma$, welche den B_i entsprechen (s. oben), erfahren, sonst aber in der ganzen x-Ebene holomorph sind.

Dies vorausgesetzt, betrachten wir jetzt eine »normale FUCHS-sche Differentialgleichung» zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q(x)y, \tag{10}$$

[1] POINCARÉ, Acta Math. 5, p. 232. SCHLESINGER, *Handbuch*, II, 2, p. 347.

[2] Eine Punktmenge, welche im *Inneren* des Kreises $|\eta| = 1$ keine Häufungsstellen hat, bezeichnen wir kurz als innerhalb des Kreises »nirgends gehäuft» — was natürlich etwas anderes als »nirgends dicht» ist, sowie auch etwas anderes als »isolirt».

für welche die endlichen wesentlichen singulären Stellen eben die gegebenen $e_1 \dots e_\sigma$ sind, und die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen

$$A_1\,,\ A_2\,,\ \dots,\ A_\sigma,$$

der projectiven Monodromiegruppe ϑ sämmtlich *parabolisch* sind, sowie auch die Umlaufssubstitution

$$A_{\sigma+1} \equiv A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_\sigma^{-1}.$$

Es ist somit x eine *eindeutige* Function eines Integralquotienten η innerhalb des Einheitskreises $|\eta| = 1$. Und zwischen den σ Substitutionen $A_1 \dots A$ bestehen (da keine elliptischen Substitutionen vorkommen) keine »Fundamentalrelationen». Dass eine solche Differentialgleichung wirklich existieren muss, lässt sich bekanntlich mittels der von POINCARÉ und KLEIN herrührenden »méthode de continuité» nachweisen.[1]

Da auch zwischen den B_i keine Relationen bestehen, so werden bekanntlich die beiden Gruppen Γ und ϑ holoedrisch isomorph, und zwar so, dass $B_1\,,\ B_2\,,\ \dots,\ B_\sigma$ bez. mit $A_1\,,\ A_2\,,\ \dots,\ A_\sigma$ correspondiren. Da nun, wie wir sahen, andererseits zwischen Γ und Δ holoedrische Isomorphie besteht, so sind also auch ϑ und Δ holoedrisch isomorph (so dass A_i mit C_i correspondirt). Als Folge hiervon im Verein mit der Eindeutigkeit von x als Function von η erkennt man sofort: wenn die postulirten Functionen $t(x)$ und $v(x)$, wie wir es jetzt thun wollen, als *mehrdeutige Functionen einer Stelle der unzerschnittenen x-Ebene* aufgefasst werden,[2] so sind sie *als Functionen von η eindeutig:*

$$t = \varphi(\eta), \qquad v = \psi(\eta),$$

mit der Eigenschaft

$$\varphi(S_\nu \eta) = a_\nu \varphi(\eta) + b_\nu \psi(\eta),$$

$$\psi(S_\nu \eta) = c_\nu \varphi(\eta) + d_\nu \psi(\eta),$$

wo S_ν eine beliebige Substitution der in einfacher Reihe geordneten Gruppe

[1] Es würde übrigens für unseren jetzigen Zweck hinreichen, dass es Differentialgleichungen zweiter Ordnung giebt, welche der genannten »subordinirt» sind. Vgl. SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 2, p. 383—84.

[2] Es handelt sich hier natürlich um die mehrdeutigen Functionen, welche durch irgend ein Element der ursprünglichen Function $t(x)$ bez. $v(x)$ bestimmt werden.

ϑ bedeutet, a_ν, b_ν, c_ν, d_ν die Coefficienten der entsprechenden Δ-Substitution U_ν (wie oben).

Die Abwesenheit von Relationen zwischen $A_1 \dots A_\sigma$ hat natürlich auch zur Folge, dass ϑ und Θ $(r, 1)$-deutig holomorph sind. Wir können also bei der Bildung der ξ-Reihen (9) *formal* gesehen eben die gegenwärtige Gruppe ϑ benutzen. Aber freilich ist hierbei im allgemeinen nicht an Convergenz zu denken, da sogar alle Fundamentalsubstitutionen von ϑ parabolisch sind. Wir werden es aber jetzt versuchen, die Reihen so zu modificieren, dass Convergenz erreicht wird, und zwar mit Hülfe der postulirten Functionen $t(x) = \varphi(\eta)$, $v(x) = \psi(\eta)$. Man setze in der That, ξ durch χ ersetzend,

$$\chi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ T_\nu^{-1} \frac{H_i(S_\nu \eta)}{\varphi(S_\nu \eta)} \right\} \left(\frac{d(S_\nu \eta)}{d\eta} \right)^m. \tag{11}$$

Wir werden zeigen, dass diese Reihen, von einer nirgends gehäuften Menge von η-Werthen abgesehen, überall innerhalb des Einheitskreises $|\eta| = 1$ unbedingt convergiren, sobald die oben mit p_i bezeichneten Grössen hinreichend gross sind (wogegen m nur $\geqq 2$ sein soll).

Man weiss, dass die POINCARÉ'schen *Thetareihen*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} H_i(S_\nu \eta) \left(\frac{d(S_\nu \eta)}{d\eta} \right)^m \tag{12}$$

diese Convergenz aufweisen, wenn $m \geqq 2$. Jedem Gliede von (12) entspricht aber ein Glied in (11) mit n Partialgliedern. Es hat nämlich (11), ausführlicher geschrieben, die Form

$$\chi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa}^{(\nu)} \frac{H_\varkappa S_\nu(\eta)}{\varphi(S_\nu \eta)} \right\} \left(\frac{d(S_\nu \eta)}{d\eta} \right)^m,$$

wo $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ Coefficienten der Substitution T_ν^{-1} bedeuten (und also zur Determinante der directen Substitution T_ν als Subdeterminanten gehören, falls die Gruppe Θ unimodular ist, was wir doch jetzt keineswegs voraussetzen). Hieraus folgt, dass mit Sicherheit unbedingte Convergenz der Reihen (11) stattfindet, falls die Quotienten

$$\frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{\varphi(S_\nu \eta)} \tag{13}$$

dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze bleiben. Dies können wir aber jetzt bewirken. Wenn die Coefficienten zweier linearer homogener Substitutionen in n Veränderlichen dem absoluten Betrage nach kleiner als A (>0) bez. B (>0) sind, so sind die Coefficienten der aus diesen beiden Substitutionen (in der einen oder anderen Ordnung) zusammengesetzten Substitution absolut genommen $< n \,.\, AB$. Hieraus folgt: wenn M eine solche positive Grösse bedeutet, dass die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen A_i ($i = 1, \ldots, \sigma$) der Gruppe θ und ebenso der inversen A_i^{-1} dem absoluten Betrage nach durchgehends $< M$ sind, so müssen die Coefficienten einer θ-Substitution, welche sich aus μ successiven A_i und A_i^{-1} zusammensetzen lässt, absolut genommen kleiner als

$$M \,.\, (nM)^{\mu-1} = n^{\mu-1} \,.\, M^{\mu}$$

sein, und folglich auch $< (nM)^{\mu}$. Dies gesetzt, betrachte man eine bestimmte ϑ-Substitution $S_\nu \eta$ und die entsprechende Δ-Subst. $U_\nu \eta$. Beide haben einen bestimmten »Index«, welcher auch für beide denselben Werth hat, $\beta = \sum |\lambda_i|$ (s. oben). Die entsprechende (eindeutig bestimmte) θ-Substitution T_ν, sowie auch die inverse T_ν^{-1} lässt sich natürlich immer aus β successiven A_i und A_i^{-1} zusammensetzen (obgleich möglicherweise auch aus einer geringeren Anzahl, da die Isomorphie zwischen θ und ϑ bez. Δ nicht holoedrisch vorausgesetzt wurde). Es ist somit $|A_{ix}^{(\nu)}| < |nM|^{\beta}$. Wir wählen jetzt eine positive Grösse $q > nM$ und nehmen die Grössen $|p_i|$ sämmtlich so gross, dass (nicht nur die für dieselben immer vorausgesetzten Bedingungen erfüllt sind, sondern auch) $|a_\nu|$ und $|b_\nu| > q^{\beta}$ werden, was nach dem Hülfssatze möglich ist. Andererseits: wenn η so gewählt wird, dass $\psi(\eta)$ nicht verschwindet, so kann man den Quotienten (13) in der Form

$$(14) \qquad \frac{A_{ix}^{(\nu)}}{a_\nu \psi(\eta) \left\{ \dfrac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} + \dfrac{b_\nu}{a_\nu} \right\}}$$

schreiben. Zufolge des soeben über die $A_{ix}^{(\nu)}$ und a_ν gesagten, liegt also der absolute Betrag des Quotienten (13) unabhängig von ν unterhalb einer endlichen Grenze, falls für die Grösse

$$(15) \qquad \left| \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} + \frac{b_\nu}{a_\nu} \right| = \left| z(\eta) + \frac{b_\nu}{a_\nu} \right|$$

eine von Null verschiedene untere Grenze angebbar ist (es wurde hier $\varphi : \psi = z$ gesetzt). Dies ist aber zufolge unserer Annahmen wirklich der Fall, nur mit Ausnahme für eine im Inneren des Kreises $|\eta| = 1$ nirgends gehäufte Menge von η-Werthen, wie man folgendermassen einsehen kann.

Als Quotient zweier eindeutiger Functionen ist z eine eindeutige Function von η (für $|\eta| < 1$). Bei Ausübung einer Substitution der Gruppe ϑ auf η ändert sich z nach der entsprechenden Substitution der mit ϑ holoedrisch isomorphen Gruppe Γ (durch deren Spaltung die homogene Gruppe Δ entstand). Der Functionszusammenhang zwischen η und z kann auch einfach so ausgedrückt werden, dass sie beide Functionen von x mit denselben Verzweigungsstellen, nämlich $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ und $e_{\sigma+1} = \infty$, sind.[1] Einer beliebigen Stelle η_0 im Inneren des Kreises $|\eta| = 1$ entspricht eine bestimmte x-Stelle x_0, welche von den Stellen $e_1, \ldots, e_\sigma, e_{\sigma+1} = \infty$ verschieden ist. Und in der Umgebung von η_0 ist x holomorphe Function von η. Andererseits wurde angenommen, dass t und v in der Nähe von $x = x_0$ holomorph sind; folglich werden t und v, d. h. $\varphi(\eta)$ und $\psi(\eta)$ in der Nähe von $\eta = \eta_0$ holomorphe Functionen von η. Der Quotient $z = \varphi : \psi$ ist also überall innerhalb des Kreises $|\eta| = 1$ meromorphe Function von η. Dem Werthe $z = 0$ entspricht, da derselbe (wie oben angenommen wurde) innerhalb R_0 liegt und also nicht zu den »Grenzpunkten» der Gruppe Γ gehört, eine gewisse Menge M von η-Werthen innerhalb des Kreises $|\eta| = 1$. Diese Menge kann, auch wenn sie unendlich ist, im Inneren des Kreises keine Häufungsstellen haben, weil eine solche die Meromorphie aufheben sollte. Die mit $z = 0$ im Sinne der Gruppe Γ congruenten z, d. h. die Stellen $-(b_\nu : a_\nu)$ correspondiren je mit einer Menge M_ν, welche im Sinne der Gruppe ϑ mit M congruent ist, und ganz wie M keine Häufungsstelle mit $|\eta| < 1$ haben kann. Es kann auch die Gesammtheit M aller dieser Mengen $M, M_1, M_2, \ldots$ nur auf der Kreisperipherie Häufungsstellen haben. Denn eine Häufungsstelle für M muss offenbar auch den Grenzstellen der Gruppe Γ angehören. Es ist, m. a. W., M eine im Inneren des Einheitskreises nirgends gehäufte η-Menge (für welche aber »die derivirte Menge» M' aus sämmtlichen Punkten der Kreisperipherie besteht). Ganz ähnliches gilt auch für die Gesammtheit N aller

[1] Hieraus folgt natürlich nicht, dass auch η eindeutige Function von z wird, da x nicht als eindeutige Function von z nachgewiesen ist.

η-Stellen, für welche $\psi : \varphi = 0$ [$z = \varphi : \psi$ unendlich gross] ist, oder welche mit solchen Stellen congruent sind. Dasselbe gilt [da φ und ψ, für sich betrachtet, holomorph sind, sobald $|\eta| < 1$] auch für die Menge M_1 bez. N_1 derjenigen η-Stellen, welche für φ bez. ψ Nullstellen oder mit Nullstellen congruente Stellen sind [da für $|\eta| < 1$ φ und ψ endlich sind, hat man $\mathsf{M}_1 \equiv \mathsf{M} +$ eine eventuelle nirgends gehäufte η-Menge mit $\varphi = \psi = a_\nu\varphi + b_\nu\varphi = 0$, aber z nicht $= 0$; und analog für N_1]. Und M_1, N_1 bilden dann natürlich auch zusammengenommen eine im Inneren des Einheitskreises nirgends gehäufte Menge.

Jetzt wählen wir im Kreisinneren eine Stelle η, welche nicht zur Menge M_1 gehört und andererseits für $\psi(\eta)$ nicht gerade eine Nullstelle ist. Dann ist der entsprechende z-Werth von jeder Stelle $-(b_\nu : a_\nu)$ [darunter $z = -(b_0 : a_0) = 0$ einbegriffen] verschieden, und gehört auch nicht zu den Grenzstellen der Gruppe Γ. Es lässt sich somit eine von Null verschiedene untere Grenze für (15) angeben. Folglich ist (s. oben) die Reihe (11) unbedingt convergent, falls η nicht mit einer ∞-Stelle der Function $H_i(\eta)$ congruent oder zusammenfallend ist. Nun sind innerhalb $|\eta| = 1$ nicht nur diese letztgenannten Stellen nirgends gehäuft, sondern auch die Menge $\mathsf{M}_1 +$ Nullstellen von $\psi(\eta)$ hat, dem gleich oben gesagten gemäss, diese Eigenschaft. Wir haben also wirklich bewiesen, dass unter den obengenannten Voraussetzungen die Reihe (11) für $|\eta| < 1$ unbedingt convergirt, nur mit Ausnahme für eine nirgends gehäufte η-Menge.

Hierbei kann nachher bemerkt werden, dass die Convergenz auch für gewisse unter den bei unserer Beweisführung ausgeschlossenen Stellen noch besteht (oder bestehen kann). Es sind dies die Nullstellen von ψ, welche nicht zugleich Nullstellen von φ sind; für solche Stellen (wenn sie existiren) ist $\varphi(S_\nu\eta) = a_\nu\varphi(\eta)$, was im Verein mit den Eigenschaften der Coefficienten a_ν zur Folge hat, dass der Quotient (13) dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Für $\varphi = \psi = 0$ wird dagegen im allgemeinen jedes Glied der Reihe unendlich gross.

Nachdem wir also die mit den erwähnten Ausnahmen bestehende *unbedingte* Convergenz unserer Reihen dargethan haben, sieht man leicht ein, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung einer beliebigen Convergenzstelle die Convergenz auch *gleichmässig* ist (so dass also die Reihen mit Sicherheit analytische Functionen darstellen). Es folgt dies daraus, dass einerseits jene gleichmässige Convergenz bei den Thetareihen stattfindet,

andererseits die unbedingte Convergenz der χ-Reihen in der oben angegebenen Weise aus derjenigen der Thetareihen folgt.

Wenn wir jetzt die n Reihen χ_i durch zugehörige Thetareihen dividiren, also n Functionen

$$y_i = \frac{\chi_i(\eta)}{\theta_i(\eta)}$$

bilden, so haben diese Quotienten, ganz wie die analogen, mit convergenten ξ-Reihen gebildeten, die Eigenschaft, die Substitutionen $\mathsf{A}_1 \ldots \mathsf{A}_\sigma$ zu erfahren, wenn man auf η bez. die Substututionen $A_1 \ldots A_\sigma$ ausübt, und folglich auch als x positive Umläufe um die Stellen $e_1 \ldots e_\sigma$ vollzieht.

Inwieweit diese y_i auch den übrigen Bedingungen der gestellten Aufgabe genügen, werden wir jetzt zusehen.

Reduction der aufgestellten Existenzfrage auf den Fall $n = 2$.

In der Umgebung einer von den $e_1 \ldots e_\sigma$, $e_{\sigma+1}$ verschiedenen x-Stelle sind die y_i [d. h. alle Zweige der y_i] meromorph (bez. holomorph). Wenn nämlich zunächst angenommen wird, dass die entsprechenden η mit keiner Nullstelle von $\varphi(\eta)$ und mit keiner ∞-Stelle einer Function $H_i(\eta)$ zusammenfällt oder congruent ist, so werden nicht nur die Reihen $\theta_i(\eta)$ sondern auch die $\chi_i(\eta)$ für den fraglichen x-Werth (absolut) convergent und in der Umgebung desselben holomorph (obgleich natürlich unendlich vieldeutig, den verschiedenen zur x-Stelle gehörenden η entsprechend). Bei einem x-Werth, für den die entsprechenden (unter einander congruenten) η eine ∞-Stelle von $H_i(\eta)$ enthalten, wird bekanntlich (und aus leicht ersichtlichen Gründen) ein Glied der Reihe θ_i wie eine rationale Function unendlich gross, während die übrigen für sich eine convergente Reihe bilden, weshalb die ganze Reihe sich meromorph verhält. Diese Meromorphie geht auch auf die χ-Reihen über, indem auch hier ein entsprechendes Glied wie eine rationale Function unendlich wird (doch kann hierbei sogar Holomorphie eintreten, wenn zwei verschiedene H_i gleichzeitig unendlich werden, wobei eine Compensation denkbar ist). Der Einfachheit wegen nehmen wir an (obgleich dies nicht nothwendig ist, vgl. unten), dass die ∞-Stellen der Functionen $H_i(S_\nu\eta)$ von den Nullstellen der Functionen $\varphi(S_\nu\eta)$ vollständig getrennt liegen. Was nun die Nullstellen

von $\varphi(S_\nu\eta)$ betrifft, so nehmen wir zunächst an, dass einem gewissen x-Werthe (unter anderem) ein η-Werth entspricht, für den $\varphi(\eta) = 0$ ist, ohne dass $\psi(\eta) = 0$. Für diesen η-Werth wird im allgemeinen das erste Glied einer χ-Reihe unendlich gross; für die congruenten η je ein anderes Glied; die restierenden Glieder bilden aber in jedem Falle eine convergente Reihe; dies ergiebt sich in ganz derselben Weise, wie oben die Convergenz der ganzen Reihe bei einem beliebigen η-Werthe (wie wir sahen, hängt dieselbe wesentlich davon ab, dass die Gruppe Γ eigentlich discontinuirlich ist). Etwas anders liegt die Sache, wenn in der fraglichen η-Menge ein η-Werth vorkommt, für den $\varphi(\eta) = \psi(\eta) = 0$ ist. Dann verschwinden in der That

$$\varphi(S_\nu\eta) = a_\nu\varphi(\eta) + b_\nu\psi(\eta), \qquad \psi(S_\nu\eta) = c_\nu\varphi(\eta) + d_\nu\psi(\eta)$$

unabhängig von ν [oder m. a. W.: für den fraglichen $x(=x_0)$ verschwinden *alle* Werthe der unendlich vieldeutigen Functionen $t(x)$ und $v(x)$] weshalb im allgemeinen alle Glieder einer χ-Reihe unendlich gross werden. In einer hinreichend kleinen Umgebung eines η-Werthes η_0 der fraglichen Werthgruppe bleibt, da $\psi(\eta)$ holomorphe Function von x ist, $|(x-x_0)^k : \psi(\eta)|$ unterhalb einer endlichen Grenze, falls k einen gewissen ganzen positiven Werth hat. Wenn andererseits $\lim\limits_{\eta=\eta_0} z(\eta)$ von Null und von jedem mit der Stelle Null congruenten z-Stelle $[-b_\nu : a_\nu]$ verschieden ist, so bleibt auch der inverse Werth des Ausdruckes (15), aus oben angegebenen Gründen, unterhalb einer endlichen Grenze. Da dasselbe auch für $|A_{ik}^{(\nu)} : a_\nu|$ gilt, so resultirt, dass der Quotient (14) nach Multiplication mit $(x-x_0)^k$ in der Umgebung von η_0 innerhalb endlichen, von ν unabhängigen Grenzen bleibt. Hieraus folgt Meromorphie der χ-Reihe an der betrachteten Stelle: es kann keine Verzweigung in Frage kommen, da der betrachtete x nicht für $t(x)$ oder $v(x)$ Verzweigungsstelle ist, und andererseits hat die mit $(x-x_0)^k$ multiplicirte Reihe, zufolge des soeben gesagten, für $x = x_0$ einen endlichen Grenzwerth. Es liegt aber auch die Möglichkeit vor, dass für irgend einen ν-Werth $z = -b_\nu : a_\nu$ ist. Dann wird der inverse Werth von (15) für diesen ν-Werth unendlich gross, aber — ganz wie oben — so, dass nach Multiplication mit einer gewissen Dignität $(x-x_0)^h$ einen endlichen Grenzwerth hervorgeht. Für die übrigen ν bleibt aber — auch ganz wie oben — jener inverse Werth unterhalb einer (von ν unabhängigen) endlichen Grenze. Hieraus im Verein mit dem gleich oben gesagten folgt

sofort, dass die Reihe nach Multiplication mit $(x - x_0)^{h+k}$ einen endlichen Grenzwerth erhält, indem der Grenzwerth eines gewissen einzelnen Gliedes einen gewissen endlichen Werth hat, während die Summe der übrigen Glieder gegen Null tendirt. Die Meromorphie bleibt also offenbar auch jetzt bestehen.

Da also in den Ausdrücken für die n Functionen y_i sowohl Zähler als auch Nenner, als Functionen von x betrachtet, wenigstens *von den Stellen* $e_1 \ldots e_\sigma$, $e_{\sigma+1}$ *abgesehen*, sich überall *wie rationale Functionen* verhalten, so gilt dasselbe auch für die Quotienten y_i selbst.

Was nun endlich die Stellen $e_1 \ldots e_\sigma$, $e_{\sigma+1}$ betrifft, so haben bekanntlich die Thetareihen der jetzt fraglichen Art, als Functionen von x betrachtet, auch an diesen Stellen den »Charakter der Bestimmtheit» (wenn auch nicht den Charakter rationaler Functionen). Für die χ-Reihen ist ein ähnliches Verhalten durchaus nicht zu erwarten, falls schon die Functionen $t(x)$ und $v(x)$ sich an den Stellen e_i nicht bestimmt verhalten. Aber auch die Annahme, dass alle e_i für $t(x)$ und $v(x)$ Bestimmtheitsstellen sind, ermöglicht (so viel wir haben finden können) nicht den Beweis, dass die χ-Reihen ein ähnliches Verhalten aufweisen. Bei speciellen Annahmen über die Gruppe Θ kann dies wahrscheinlich eintreffen, kaum aber in allgemeinen. Unter dieser Voraussetzung verlieren also auch die Functionen y_i an den Stellen e den Charakter der Bestimmtheit. Der Bestimmtheitscharakter dieser Stellen wurde auch bei der obigen Fragestellung nicht erfordert.

Die Forderungen unseres Problems sind somit jetzt sämmtlich erfüllt nur mit Ausnahme für diejenige, dass die y_i an allen von den e_i verschiedenen Stellen *holomorph* sein sollten. Da aber Meromorphie schon erreicht ist, so kann man durch eine einfache Modification Holomorphie erreichen: man hat nur sämmtliche y_i durch eine *eindeutige*, mit Ausnahme für den e_i holomorphe Function $F(x)$ von x zu multipliciren, deren Nullstellen die ∞-Stellen der y_i compensiren. Die n Functionen

$$F(x) \,.\, y_i$$

haben dann alle verlangten Eigenschaften.

Das Resultat der obigen Untersuchung lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

Es seien $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ *gegebene* im Endlichen liegende x-Stellen. Ferner betrachte man σ lineare Substitutionen in der Ebene einer anderen Veränderlichen z:

$$\frac{z' - h_i}{z' - k_i} = p_i^2 \cdot \frac{z - h_i}{z - k_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

wo h_i, k_i, p_i die Bedingungen erfüllen, dass die h_i und k_i (die Fixpunkte) 2σ von einander getrennte Stellen der z-Ebene sind, welche auch sämmtlich von der Stelle $z = 0$ getrennt liegen, und andererseits die absoluten Werthe der (reellen oder imaginären) Multiplicatoren p_i^2 grösser als Eins sind (also die Substitutionen hyperbolisch oder loxodromisch). Von diesen (z', z)-Substitutionen gehe man durch »Spaltung» zu *unimodularen* homogenen $(t', v'; t, v)$-Substitutionen

$$C_1, C_2, \ldots, C_\sigma$$

über. Es kann gefragt werden, ob bei gegebenen Werthen der h_i, k_i und p_i (welche die genannten Bedingungen erfüllen) Functionen $t(x)$ und $v(x)$ immer existiren, welche beim Überschreiten (in positiver Richtung) von Schnitten $(e_1\infty \ldots e_\sigma\infty)$ bez. die Substitutionen $C_1 \ldots C_\sigma$ erleiden, sich aber sonst im Endlichen überall wie ganze rationale Functionen verhalten. Wir ersetzen aber diese Frage durch die folgende, in welcher viel weniger verlangt wird: Ist es möglich, die 2σ Stellen h_i und k_i so zu bestimmen, dass, wenn nachher eine *beliebig* grosse positive Zahl P gewählt wird, immer ein Werthsystem $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ mit

$$|p_1| > P, |p_2| > P, \ldots, |p_\sigma| > P$$

überhaupt gefunden werden kann, welches im Verein mit den h_i, k_i Substitutionen C_i geben, für welche Functionen $t(x)$ und $v(x)$ mit den genannten Eigenschaften existiren? *Wenn* diese Verhältnissmässig sehr bescheidene Existenzfrage im bejahenden Sinne zu beantworten ist (was wir hier nicht bewiesen haben) *dann* gilt dasselbe — dies ist unser Resultat — auch für die in der Einleitung formulirte Existenzfrage in ihrer vollen Allgemeinheit.

Wir knüpfen hieran noch folgende Bemerkungen. Es ist wohl kaum zu bezweifeln, dass die soeben erwähnte, auf den Fall $n = 2$ sich beziehende Existenzfrage im bejahenden Sinne zu beantworten ist. Doch

habe ich bisher einen strengen Beweis hierfür nicht durchgeführt. Es sei mir indessen gestattet, über diese Frage folgendes zu bemerken.

Zunächst ist leicht ersichtlich, dass man im jetztigen Zusammenhange die genannte Existenzfrage ein wenig modificiren kann, so dass noch weniger verlangt wird. Dies beruth darauf, dass der oben benutzte Hilfssatz sich in der That auf folgende Weise modificieren lässt. Für die 2σ Grössen h_i, k_i braucht man nicht bestimmte Werthe vorauszusetzen, sondern kann dieselben als unbestimmte Grössen betrachten, welche nur folgenden Bedingungen unterworfen sind: für $|h_i|$, $|k_i|$, $|h_i - k_i|$, $|h_i - h_j|$, $|h_i - k_j|$, $|k_i - k_j|$, wo $j \gtrless i$, sollen von Null verschiedene untere Grenzen existiren, und andererseits für h_i und k_i endliche obere Grenzen. Man bestätigt sehr leicht, dass der oben gegebene Beweis des Satzes noch unter diesen Voraussetzungen gültig bleibt. Dementsprechend kann auch die auf den Fall $n = 2$ sich beziehende Frage, auf welche sich die Hauptfrage reducirte, so abgeändert werden, dass man für die h_i, k_i ganz dieselbe Art von Unbestimmtheit voraussetzt, was geeignet sein kann, die Behandlung der Frage zu vereinfachen. Bei dieser Behandlung scheint es andererseits vortheilhaft zu sein können, für die Functionen $t(x)$ und $v(x)$ auch den ausnahmlosen »Charakter der Bestimmtheit» vorauszusetzen, also zunächst Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) der FUCHS'schen Klasse im Auge zu haben. Dagegen dürfte es nicht viel daran zu denken sein, auch für $t(x)$ und $v(x)$ analytische Entwickelungen bilden zu können, welche die vorgeschriebenen functionalen Eigenschaften in Evidenz stellen.

Wenn es gelingt, für die soeben besprochene Existensfrage und damit auch für unsere jetztige Hauptfrage (als Existenzfrage betrachtet) eine bejahende Antwort definitiv festzustellen, so wird hiermit die ausnahmlose Lösbarkeit der ursprünglichen RIEMANN'schen Aufgabe nicht dargethan sein. Hierzu wäre noch der Nachweis erforderlich, dass in jedem Systeme von »cogredienten» linearen homogenen Differentialgleichungen auch Gleichungen der FUCHS'schen Klasse vorkommen. Da aber ein solcher Nachweis, obgleich noch nicht erbracht, jedenfalls als denkbar bezeichnet werden muss, so ist es auch nicht ausgeschlossen, dass die Entscheidung unserer jetztigen Frage auch für das unveränderte RIEMANN'sche Problem Bedeutung gewinnen kann.

Lund, Februar 1902.

SUR LES NOMBRES e ET π ET LES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES

PAR

EDMOND MAILLET
à PARIS.

On sait que le nombre e^{ϖ}, où ϖ est rationnel ou algébrique, ne peut être racine d'une équation algébrique à coëfficients rationnels, pas plus que les nombres qui présentent après chaque chiffre significatif un nombre de zéros croissants suffisamment vite avec le rang de ce chiffre et que nous appellerons des nombres X.[1]

Ces derniers nombres, comme leurs puissances rationnelles, n'étant pas racines des équations

$$\sum_{0}^{\prime} c_a x^{\varpi_a} = 0, \tag{1}$$

et d'autres analogues, où c_a est rationnel et ϖ_a entier positif, quand $\frac{1}{c_a}$ ou ϖ_a croît suffisamment vite avec a, on pouvait se demander s'il en était de même de e et ses puissances, de π, d'autres nombres encore. La réponse est affirmative: les méthodes de MM. Hilbert et Hurwitz pour établir la transcendance de e et de π permettent de déterminer une limite inférieure de ces modes de croissance: nous en donnons un exemple particulier.

On peut obtenir d'ailleurs des résultats de même nature pour tout nombre ζ algébrique ou non, ou pour les nombres de la forme

$$Y = Y_1 + \frac{a_1}{p_1^{\psi_1}} + \ldots + \frac{a_l}{p_l^{\psi_l}} + \ldots,$$

[1] Comptes rendus, 15 avril 1901 et Journ. de Math., 1901. Au sujet de ce mémoire on pourra consulter E. Strauss, Acta math., t. 11, p. 13.

Comp. Borel, Comptes rendus, 1899, 1er semestre, p. 490 et 597. Pour la lecture de notre Mémoire il suffit de connaître les passages d'ouvrages ou mémoires cités par nous ici. Un résumé de ce mémoire a été communiqué à l'Acad. des Sc. de Paris (C. R., 1901, 2ème sem., p. 989 et 1191).

On sait qu'Abel a établi l'impossibilité de la résolution par radicaux des équations algébriques de degré > 4. On peut se poser des problèmes analogues pour des équations transcendantes à coefficients rationnels: notre mémoire en traite quelques-uns.

(ζ_1 fonction algébrique d'un nombre quelconque ζ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \ldots$ entiers $\leq E(\zeta)$); quand ψ_l croît suffisamment vite avec l, Y ne peut être ni algébrique ni racine de (1).

Ces résultats s'étendent aux équations rationnelles de la forme

$$\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} + \sum_0^\infty \frac{c_a^0}{x^{\bar{\omega}_a^0}} + \ldots + \sum_0^\infty \frac{c_a^k}{(x-\beta_k)^{\bar{\omega}_a^k}} = 0,$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ sont distincts, rationnels et $\neq 0$. [1]

Au point de vue algébrique, si c_n décroît suffisamment vite, nous donnons un moyen de déterminer approximativement les racines de

$$\sum_0^\infty c_a x^{\omega_a} = 0$$

qui sont toutes distinctes, et un moyen simple de trouver le nombre des racines réelles ou imaginaires de module inférieur à une certaine limite quand c_n est réel.

Enfin nous concluons que $\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$ n'a aucune racine algébrique, et que l'ensemble des racines transcendantes de ces équations a la puissance de continu.

II.

Théorème. Le nombre e ne peut être racine d'aucune des équations

$$(1) \qquad \sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$$

quand $\frac{1}{c_n}$ croît suffisamment vite avec n (c_n rationnel, c_0 entier, $\bar{\omega}_n = \frac{\chi_n}{q}$, où χ_n est un entier donné fonction de n et croissant, et q entier).

En effet, il suffit de suivre la même marche que dans une des démonstrations relatives au cas des équations algébriques. [2] Si l'on pose

[1] Nous y reviendrons ultérieurement plus en détail. Voir Bull. Soc. Math., t. 33, 1902, p. 147.

[2] Voir p. ex. Jordan, Cours lithographié de l'École Polytechnique, 2ème division. Tous nos raisonnements restent vrais avec une très-légère modification pour le cas où certains des coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ seraient imaginaires.

$$(2)\qquad f(x)=\frac{x^{p-1}\left(x-\frac{\chi_1}{q}\right)^p\cdots\left(x-\frac{\chi_n}{q}\right)^p}{|(p-1)|},$$

(p très-grand, 1er à q),

$$F(x)=f(x)+f'(x)+\ldots,$$

on aura

$$(3)\qquad e^\alpha F(0)=F(\alpha)+e^\alpha\int_0^\alpha f(x)e^{-x}dx.$$

Donnant dans cette formule à α les valeurs $0=\varpi_0, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ et additionnant les égalités obtenues en les multipliant par $c_0, c_1, \ldots, c_n$, on a, e étant supposé racine de (1),

$$(4)\qquad \sum_0^n c_a e^{\varpi_a}F(0)=\sum_0^n c_a F(\varpi_a)+\sum_0^n c_a e^{\varpi_a}\int_0^{\varpi_a} f(x)e^{-x}dx=-\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\varpi_a}F(0).$$

Pour $x=0$, $f(x)$ et ses $p-2$ 1ères dérivées s'annulent; les autres, sauf la 1ère, qui est égale à $(-1)^{np}\frac{(\Pi\chi_n)^p}{q^{np}}$, où $\Pi\chi_n=\chi_1\chi_2\ldots\chi_n$, sont des multiples de p divisés par q^{np}, c. à d. de la forme $\frac{mp}{q^{np}}$.

Pour $x=\varpi_a\leqq\varpi_n$ $(a\neq 0)$, $f(x)$ est nul ainsi que ses $p-1$ 1ères dérivées; les autres sont des multiples de p divisés par une puissance de $q\leqq q^{np+p-1}$.

Ceci posé

$$(5)\qquad \sum_0^n c_a F(\varpi_a)=c_0\left(\frac{\lambda_0}{q^{np}}+\frac{m_0 p}{q^{np}}\right)+\sum_1^n\frac{s_n}{t_n}\frac{\text{mult. }p}{q^{np+p-1}},$$

si $\lambda_0=(-1)^{np}(\Pi\chi_a)^p$, $c_n=\frac{s_n}{t_n}$.

Désignant par T_n le p. p. c. m. de $t_0=1, t_1, \ldots, t_n$, on aura

$$(6)\qquad \sum_0^n c_a F(\varpi_a)=\frac{\varepsilon}{T_n q^{np+p-1}},$$

avec $\varepsilon=c_0\lambda_0T_nq^{p-1}+m'p$; n étant donné, si p est assez grand pour ne pas diviser $c_0\lambda_0T_nq^{p-1}$, ε sera $\neq 0$, et $|\varepsilon|\geqq 1$, d'où

$$(7)\qquad \sum_0^n c_a F(\varpi_a)\geqq\frac{1}{T_n q^{np+p-1}}.$$

D'autre part, on a encore

$$(8)\qquad \left|\sum_0^n c_a e^{\varpi_a}\int_0^{\varpi_a} f(x)e^{-x}dx\right| \leqq e^{\varpi_n}\left(\sum |c_a|\right)\frac{\varpi_n^{p(n+1)}}{|(p-1)}.$$

On pourra toujours prendre p assez grand pour que le second membre soit

$$(9)\qquad < \frac{1}{4T_n q^{np+p-1}}.$$

Soit $p' = \varphi_n$ la plus petite des valeurs de p satisfaisant à cette condition.

Supposons maintenant que, dans $F(0)$, on fasse $p = p'$; $F(0)$ est une fonction bien déterminée ψ_n de n. Si l'on suppose la série $\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\varpi_a}$ suffisamment convergente (ce qui est le cas quand c_a^{-1} croît suffisamment vite avec a), pour que

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\varpi_a}\right| \leqq |\theta c_{n+1} e^{\varpi_{n+1}}|, \qquad (\theta \text{ fini}),$$

on devra avoir, d'après (4), (7) et (9),

$$(10)\qquad \frac{1}{T_n q^{np'+p'-1}} \leqq \frac{|\varepsilon|}{T_n q^{np'+p'-1}} \leqq |\theta c_{n+1} e^{\varpi_{n+1}} F(0)| + ke^{\varpi_n}\frac{\varpi_n^{p'(n+1)}}{|(p'-1)}$$

$$\leqq |\theta c_{n+1} e^{\varpi_{n+1}} F(0)| + \frac{1}{4T_n q^{np'+p'-1}},$$

ce qui est impossible dès que

$$(11)\qquad |\theta c_{n+1} e^{\varpi_{n+1}} \psi_n| \leqq \frac{1}{2T_n q^{np'+p'-1}}.$$

On pourra toujours choisir c_{n+1} assez petit pour qu'il en soit ainsi, quel que soit q, à partir d'une certaine valeur de n, par exemple quand $\varpi_n = \frac{ln}{q}$.

Corollaire I. Les puissances fractionnaires positives de e ne peuvent être racines des équations (1).

En effet, e n'est pas racine des équations traitées plus haut; il n'est dès lors pas racine des équations obtenues en remplaçant x par $y^{\frac{q}{s}}$; $e^{\frac{q}{s}}$ n'est donc pas racine des premières équations.

Nous croyons utile de donner un exemple précis d'application de ce théorème.

Prenons $c_n = \frac{\alpha_n}{t_n}$, α_n étant un entier tel que $|\alpha_n| \leqq A$ (A fini) et t_n étant divisible par $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots, t_1, t_0 = 1$: on a $T_n = t_n$. Posons $\varpi_n = \frac{ln}{q}$ (l entier donné), $p = (n+1)^{\mu(n+1)}$ (μ entier > 2): pour une infinité de valeurs de n, p ne divise pas

$$|c_0 \lambda_0 t_n q^{p-1}| = |c_0 l^{np} (\underline{|n})^p t_n q^{p-1}|,$$

si

(12) $$t_n = (\underline{|n})^{\lambda_n}, \qquad (\lambda_n \text{ entier}).$$

D'après (8) et (9) on prendra

$$e^{\frac{ln}{q}} k \left(\frac{ln}{q}\right)^{p(n+1)} \frac{p}{\underline{|p}} < \frac{1}{4 t_n q^{np+p-1}}, \qquad (k = \sum |c_\alpha|),$$

ce qui a lieu, a fortiori, si

$$\frac{e^{\frac{ln}{q}} kp (ln)^{p(n+1)}}{\left(\frac{p}{e}\right)^{p+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi e}} < \frac{kp}{\left(\frac{p}{e} \frac{1}{(ln)^{n+1}}\right)^p \left(\frac{1}{e}\right)^{ln}} \leqq \frac{kp}{\left(\frac{p}{e^2 (ln)^{n+1}}\right)^p} < \frac{q}{4 t_n},$$

puisque $p \geqq ln$, quand n est assez grand.

Or

$$\frac{p}{e^2 (ln)^{n+1}} = \frac{(n+1)^{\mu(n+1)}}{e^2 (ln)^{n+1}} > \frac{1}{e^2} \left(\frac{n^{\mu-1}}{l}\right)^{n+1},$$

et

$$\frac{4kp}{\left(\frac{p}{e^2 (ln)^{n+1}}\right)^p} < \frac{4kpe^{2p}}{\left(\frac{n^{\mu-1}}{l}\right)^{(n+1)p}} < \frac{1}{\left(\frac{n^{\mu-1}}{2l}\right)^{p(n+1)}},$$

car $4kpe^{2p} < 2^{(n+1)p}$.

Pour que (9) ait lieu il suffit finalement

$$t_n < \left(\frac{n^{\mu-1}}{2l}\right)^{p(n+1)}$$

ou, a fortiori,

(12′) $$(\underline{|n})^{\lambda_n} = t_n < n^{(\mu-2)p(n+1)}$$

ou

$$n^{n\lambda_n} < n^{(\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)+1}}$$

ou

$$n\lambda_n < (\mu - 2)(n + 1)^{\mu(n+1)+1}.$$

Il suffira de prendre

$$\lambda_n = (\mu - 2)(n + 1)^{\mu(n+1)}, \qquad \mu > 2 \tag{13}$$

pour que (9) ait lieu.

Occupons-nous maintenant de la condition (11). On a d'abord

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\frac{la}{q}}\right| \leqq \left|c_{n+1} e^{\frac{l}{q}(n+1)}\right| (1 + k_1 + k_1^2 + \ldots) = \frac{|c_{n+1}| e^{\frac{l(n+1)}{q}}}{1 - k_1}$$

$$\leqq 2\,|c_{n+1}|\,e^{\frac{l(n+1)}{q}}, \qquad \left(0 \leqq k_1 \leqq \frac{1}{2}\right)$$

dès que

$$\left|\frac{c_{a+1}}{c_a}\right| e^{\frac{l}{q}} = \left|\frac{\alpha_{a+1} t_a}{\alpha_a t_{a+1}}\right| e^{\frac{l}{q}} \leqq D e^{\frac{l}{q}} \frac{t_a}{t_{a+1}} \leqq k_1 \leqq \frac{1}{2}, \text{ [1]}$$

D étant le maximum du rapport $\left|\frac{\alpha_{a+1}}{\alpha_a}\right|$. Cette condition est toujours remplie pour $a \geqq n + 1$, d'après (12) et (13). (11) devient

$$2\,|c_{n+1}|\,e^{\frac{l(n+1)}{q}} F(0) \leqq \frac{1}{2t_n q^{np+l+1}}; \tag{14}$$

cherchons une limite supérieure de $F(0)$.

On a

$$\left|\underline{p-1}\, f(x)\right| = \left|x^{p-1}(x - \varpi_1)^p \ldots (x - \varpi_n)^p\right|,$$

$$\left|\underline{(p-1)}\, f'(x)\right| \leqq p \sum |f_1(x)|,$$

$$\left|\underline{(p-1)}\, f''(x)\right| \leqq p^2 \sum |f_2(x)|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left|\underline{(p-1)}\, f^{(k_2)}(x)\right| \leqq p^{k_2} \sum |f_{k_2}(x)|,$$

[1] Dans le cas où quelques coëfficients c_a seraient nuls, une inégalité de même nature a lieu pour le rapport d'un terme au précédent. Notre raisonnement ne suppose donc pas $\alpha_a \neq 0$, sauf en général.

$f_1, f_2, \ldots, f_{k_2}$ étant des produits de la forme

$$x^{\beta_0}(x-\varpi_1)^{\beta_1}\ldots(x-\varpi_n)^{\beta_n},$$

avec

$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \leqq p,$$

en nombre au plus égal à $n+1, (n+1)^2, \ldots, (n+1)^{k_2}$ respectivement. Chacun de ces produits est d'ailleurs, pour $x=0$, $\leqq l^{np}(|\underline{n})^p$ en valeur absolue, et

$$|F(0)|\,|\underline{(p-1)} \leqq l^{np}(|\underline{n})^p[1+p(n+1)+p^2(n+1)^2+\ldots$$
$$+p^{k_2}(n+1)^{k_2}+\ldots]$$

jusqu'à $k_2 = np+p-1$, d'où

$$(15) \qquad |F(0)| \leqq \frac{(|\underline{n})^p}{|\underline{(p-1)}}\, l^{np}\, \frac{[(n+1)p]^{np+p}-1}{p(n+1)-1}.$$

Il suffira, d'après (14), que

$$(16) \qquad \frac{t_{n+1}}{t_n} \geqq \lambda e^{\frac{l(n+1)}{q}} q^{np+p-1}\, \frac{(|\underline{n})^p}{|\underline{(p-1)}}\, \frac{[(n+1)p]^{np+p}-1}{p(n+1)-1},$$

λ étant une constante.

D'abord

$$p^{-1}[p(n+1)-1] > p,$$

$$\frac{\lambda q^{np+p-1} e^{\frac{l(n+1)}{q}}}{|\underline{p}} < 1,$$

si

$$\lambda q < \left(\frac{p}{e}\right)^p \frac{1}{e^{\frac{l(n+1)}{q}} q^{np+p}},$$

ou, puisque $\dfrac{l(n+1)}{q} < p$, si

$$\lambda q < \left(\frac{p}{e^2 q^{n+1}}\right)^p,$$

ce qui a lieu, puisque $p = (n+1)^{n(n+1)}$.

Il suffira donc d'après (16),

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geqq (|\underline{n})^p[(n+1)p]^{p(n+1)},$$

ou, a fortiori,

$$t_{n+1} \geqq [(n+1)^2 p]^{p(n+1)} t_n,$$

ou, d'après $t_n = (\underline{|n})^{\lambda^n}$, (12') et $p = (n+1)^{\mu(n+1)}$,

$$t_{n+1} \geqq [(n+1)^2 p]^{p(n+1)} n^{(\mu-2)p(n+1)},$$

$$t_{n+1} \geqq ((n+1)^n p)^{p(n+1}\,,$$

$$\geqq (n+1)^{\mu(n+1)^{1+\mu(n+1)}} (n+1)^{\mu(n+1)^{2+\mu(n+1)}},$$

$$\geqq (n+1)^{\mu(n+1)^{\mu(n+1)+1}(n+2)}.$$

Il suffira alors

$$t_{n+1} = [\underline{|(n+1)}]^{\lambda_{n+1}} \geqq \left(\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi e}\right)^{\lambda_{n+1}} \geqq (n+1)^{\mu(n+2)(n+1)^{\mu(n+1)+1}},$$

ou, a fortiori,

$$(n+1)^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\lambda_{n+1}-(n+1)^{\mu(n+1)+1}\mu(n+2)} \geqq e^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\lambda_{n+1}}.$$

Ceci aura lieu pourvu que

$$\frac{1}{2}\left(n+\frac{3}{2}\right)(\mu-2)(n+2)^{\mu(n+2)} \geqq (n+1)^{\mu(n+1)+1}\mu(n+2),$$

ce qui a toujours lieu pour n assez grand quand $\mu \geqq 3$.

La condition (11) est donc alors remplie.

Nous en concluons le corollaire suivant:

Corollaire II. Les puissances entières ou fractionnaires de e ne sont pas racines des équations

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{a_n}{(\underline{|n})^{(\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)}}} x^{\frac{ln}{q}} = 0$$

(l, q, μ entiers), a_n étant un entier limité, nul ou non, dès que $\mu \geqq 3$.

III.

Les résultats précédents, comme ceux relatifs aux nombres X,[1] s'étendent d'abord au cas des puissances négatives de e pour les équations (1), ensuite au cas des puissances négatives pour les équations $\sum c_n x^{\bar{\omega}_n} = 0$, dont le 1^er^ membre converge pour $0 < x < k < 1$; enfin au cas des puissances positives ou négatives pour les équations

$$f_1 = \sum_{\infty}^{+\infty} c_a x^{\omega_a} = 0$$

convergentes dans un certain domaine, les c_a et les $\bar{\omega}_a$ satisfaisant à certaines conditions de croissance et étant rationnels. Nous nous dispenserons de donner des exemples, et nous contenterons d'établir sommairement les théorèmes généraux.

1°. Pour le cas des puissances négatives il suffit de remarquer que (3) reste vrai quand α ou $\bar{\omega}_a$ est négatif: la limite supérieure de $e^{\bar{\omega}_a}$ devient 1. Toutes les inégalités ou égalités précédentes restent vraies a fortiori sous cette réserve.

2°. Considérons les équations $f_1 = 0$, et soit $f_1 = \sum\limits_{\infty}^{+\infty} c_a e^{\bar{\omega}_a} = 0$, $\bar{\omega}_a$ étant de la forme $\frac{\chi_a}{q}$, q entier, χ_a entier positif ou négatif. On prend pour $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^{p-1}[(x-\bar{\omega}_1)\ldots(x-\bar{\omega}_n)(x-\bar{\omega}_{-1})\ldots(x-\bar{\omega}_{-n_1})]^p}{\underline{|(p-1)}}.$$

La formule (4) devient

$$F(0)\sum_{-n_1}^{n} c_a e^{\bar{\omega}_a} = \sum_{-n_1}^{n} c_a F(\bar{\omega}_a) + \sum_{-n_1}^{n} c_a e^{\bar{\omega}_a}\int_0^{\bar{\omega}_a} f(x)e^{-x}dx$$

$$= -\left[\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\bar{\omega}_a} + \sum_{-(n_1+1)}^{-\infty} c_b e^{\bar{\omega}_b}\right]F(0).$$

Si

$$\lambda_0 = (-1)^{p(n+n_1)}(\Pi\chi_a)^p, \quad \text{avec } \bar{\omega}_a = \frac{\chi_a}{q},$$

[1] Journ. de Math., 1901, loc. cit.

on aura

$$\sum_{-n_1}^{n} c_a F(\bar{\omega}_a) = c_0\left(\frac{\lambda_0}{q^{(n+n_1)p}} + \frac{m_0 p}{q^{(n+n_1)p+p-1}}\right) + \sum_{-n_1}^{n} \frac{s_a}{t_a} \frac{\text{mult. } p}{q^{(n+n_1)p+p-1}},$$

$$\left|\sum_{-n_1}^{n} c_a F(\bar{\omega}_a)\right| \geqq \frac{\varepsilon}{q^{(n+n_1)p+p-1}\, T_{nn_1}}, \qquad \varepsilon \geqq 1$$

si p est assez grand et convenablement choisi, T_{nn_1} étant le plus petit commun multiple de $t_{-n_1}, t_{-n_1+1}, \ldots, t_0, t_1, \ldots, t_n$. Le raisonnement se continue de la même manière pour les puissances positives ou négatives.

3°. Restent les équations

$$\sum_{0}^{\infty} c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$$

dont le 1^{er} membre converge pour $0 < x < k < 1$, et pour lesquelles nous ne pouvons évidemment traiter que le cas des puissances négatives. On raisonnera de la même manière; (4) devient

$$(16') \qquad \sum_{0}^{n} c_a e^{-\bar{\omega}_a} F(0) = \sum_{0}^{n} c_a F(-\bar{\omega}_a) + \sum_{0}^{n} c_a e^{-\bar{\omega}_a} \int_{0}^{-\omega_a} f(x) e^{-x} dx,$$

$$= -\left(\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{-\bar{\omega}_a}\right) F(0),$$

avec

$$\underline{(p-1)} f(x) = x^{p-1}(x+\bar{\omega}_1)^p \ldots (x+\bar{\omega}_n)^p.$$

On a, en faisant $x = 0$, puis

$$-x = \bar{\omega}_a < \bar{\omega}_n = \frac{\chi_n}{q}$$

($a > 0$, $\bar{\omega}_a = \frac{\chi_a}{q}$, χ_a entier positif),

$$\sum_{0}^{n} c_a F(-\bar{\omega}_a) = c_0\left(\frac{\pm \lambda_0}{q^{np}} + \frac{m_0 p}{q^{np}}\right) + \sum_{1}^{n} c_a \frac{\text{mult. } p}{q^{np+p-1}},$$

$$\left|\sum_{0}^{n} c_a F(-\bar{\omega}_a)\right| \geqq \frac{1}{T_n q^{np+p-1}},$$

si $c_0 \lambda_0 T_n q^{p-1}$ n'est pas divisible par p.

D'autre part

$$\left|\sum_0^n c_a e^{-\tilde{\omega}_a}\int_0^{-\tilde{\omega}_a} f(x)e^{-x}dx\right| \leq \left(\sum |c_a|\right)\frac{\varpi_n^{np+p}}{\lfloor p} p.$$

On pourra, quelle que soit la loi de croissance de ϖ_a, prendre p assez grand pour que cette expression soit plus petite que $\frac{1}{4T_n q^{np+p-1}}$. De même on pourra prendre ϖ_{n+1} assez grand pour que

$$(17) \qquad \left|\left(\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{-\tilde{\omega}_a}\right)F(0)\right| < \frac{1}{4T_n q^{np+p-1}},$$

en prenant pour p la plus petite valeur p' satisfaisant aux conditions précédentes.

Si la loi de croissance de ϖ_{n+1}, qui est absolument arbitraire, est alors choisie de façon que ces inégalités soient remplies quel que soit n, pour n suffisamment grand, l'égalité (16') sera impossible.

Nous résumerons les résultats précédents dans les énoncés suivants:

Théorème I. Les puissances entières ou fractionnaires de e ne peuvent être racines d'aucune équation

$$\sum_0^{\infty} c_a x^{\tilde{\omega}} = 0$$

quand $\frac{1}{c_n}$ croît suffisamment vite avec n, (c_a rationnel, $\varpi_n = \frac{\chi_n}{q}$, où χ_n est un entier donné fonction de n et croissant, et q entier) pour un mode de croissance donné de χ_n.

C'est le cas quand

$$\frac{1}{c_n} = \frac{(\lfloor n)^{(\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)}}}{a_n}$$

(a_n entier limité, nul ou non, $\mu \geq 3$), $\varpi_n = \frac{ln}{q}$ (l, q entiers).

Théorème II. Il en est de même pour les équations

$$(18) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} c_a e^{\tilde{\omega}_a} = 0$$

(ϖ_a étant positif ou négatif et de la forme $\frac{\chi_a}{q}$, χ_a et q entiers), pourvu que $\frac{1}{c_a}$ croisse suffisamment vite avec $|a|$, quand a est positif ou négatif, et que le mode de croissance de χ_a est donné.

Théorème III. Les puissances négatives rationnelles de e ne sont pas racines des équations

$$\sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = 0 \tag{19}$$

dont le 1^{er} membre converge pour $0 < x < k < 1$, quand ϖ_n croît suffisamment vite avec n, pour un mode de variation donné des c_n.

IV.

Lemme I. Soit

$$\sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = \Phi(x) = 0 \tag{1}$$

une équation transcendante dont le 1^{er} membre converge dans tout le plan ($\varpi_n = \frac{\chi_n}{q}$, χ_n entier). On pourra toujours, quel que soit n, supposer la loi de décroissance des c_n assez rapide pour que toute racine de

$$\sum_0^n c_a x^{\varpi_a} = \Phi_n(x) = 0 \tag{20}$$

diffère d'aussi peu qu'on veut d'une racine de (1), et pour que $\Phi_n(x) = 0$ n'ait que des racines distinctes.

En effet, soit x_1 une racine de $\Phi_n(x) = 0$. On a

$$\Phi(x) = \Phi_n(x) + \Psi(x).$$

$\Psi(x)$ est une série convergente, et, x_1 étant limité en fonction de n, on pourra toujours prendre c_{n+1} assez petit pour que $\Psi(x_1) < \varepsilon_{n+1}$.

Or

$$\Phi(x_1) = \Psi(x_1)$$

$\Phi(x)$ prend[1] dans le voisinage de $x = x_1$ toutes les valeurs voisines de $\Phi(x_1)$. On aura

$$\Phi(x) - \Phi(x_1) = (x - x_1)^k \frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}} + \ldots, \tag{21}$$

si $\Phi^{(k)}(x)$ est la 1ère des dérivées de $\Phi(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = x_1$. On peut toujours prendre ξ assez petit pour que, si $|x - x_1| < \xi$

$$|\Phi(x) - \Phi(x_1)| \geqq \left| \frac{(x - x_1)^k \Phi^{(k)}(x_1)}{2\underline{|k}} \right|. \tag{22}$$

En effet, si $f(z)$ est monodrome aux environs du point z_1 et $t = z - z_1$ on a[2]

$$f(z) = f(z_1) + \frac{t^k f^{(k)}(z_1)}{\underline{|k}} + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{t^{k+1}}{(z - z_1)^{k+1}(z - z_1 - t)} f(z) dz,$$

et le dernier terme a son module

$$\leqq \frac{M \operatorname{mod} t^{k+1}}{R^{k+1}(R - \operatorname{mod} t)}.$$

Nous supposons ici $f'(z_1) = \ldots = f^{(k-1)}(z_1) = 0$; $\int_c$ est prise le long d'un cercle de rayon R ayant z_1 pour centre, M est le maximum de $f(z)$ à l'intérieur de ce cercle (et sur ce cercle).

Appliquant ceci à (21), on a

$$\Phi(x) - \Phi(x_1) = (x - x_1)^k \frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}} + \theta_1 \frac{M(x - x_1)^{k+1}}{R^{k+1}[R - \operatorname{mod}(x - x_1)]},$$

R étant une quantité réelle que nous prendrons $\geqq 2|x - x_1|$. Il suffira dès lors, pour que (22) ait lieu

$$\left| (x - x_1)^k \frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}} \right| \geqq \frac{4M |x - x_1|^{k+1}}{R^{k+2}},$$

$$|x - x_1| \leqq \frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}} \frac{R^{k+2}}{4M}, \tag{23}$$

---

[1] D'après un théorème de WEIERSTRASS (PICARD, *Traité d'analyse*, t. II, p. 241).

[2] V. JORDAN, Cours lithographié de l'Ecole Polytechnique, 1ère division, par exemple.

M étant le maximum de $\Phi(x)$ à l'intérieur d'un cercle de rayon R ayant le point x_1 comme centre dans le plan des x.

Pour une valeur de R donnée, $\Phi_n(x)$ a une limite supérieure M' dans le cercle en question, et l'on peut toujours prendre c_{n+1} assez petit pour que $M' \geqq 2|\Psi(x)|$ dans ce cercle. M est $\leqq \frac{3}{2}M'$, et il suffit pour que (22) et (23) aient lieu:

$$\left|\frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}}\frac{R^{k+2}}{6M'}\right| \geqq |x - x_1|. \tag{23'}$$

Or

$$\Phi^{(k)}(x_1) = \Phi_n^{(k)}(x_1) + \Psi^{(k)}(x_1). \tag{24}$$

Soit $\Phi_n^{(k_1)}(x)$ la $1^{\text{ère}}$ des dérivées de $\Phi_n(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = x_1$: on peut supposer, si c_n est assez petit par rapport à c_{n-1}, $k_1 = 1$.

En effet, si non, $\Phi_n(x)$ aura une racine commune avec sa dérivée. Or

$$\Phi_n(x) = c_0 + c_1 x^{\frac{\chi_1}{q}} + \ldots + c_n x^{\frac{\chi_n}{q}}.$$

Posant $y = x^{\frac{1}{q}}$, on a

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(y) = c_0 + c_1 y^{\chi_1} + \ldots + c_n y^{\chi_n},$$

et $\varphi_n(y)$ a en commun avec sa dérivée $\varphi_n'(y)$ la racine $y_1 = x_1^{\frac{1}{q}}$, car $\Phi_n'(x) = \varphi_n'(y)y'$ (on suppose $x_1 \neq 0$).

On en conclut que le résultant des 2 équations

$$\varphi_n'(y) = \chi_1 c_1 y^{\chi_1 - 1} + \ldots + \chi_n c_n y^{\chi_n - 1}$$

$$\chi_n \varphi_n(y) - y\varphi_n'(y) = \chi_n c_0 + (\chi_n - \chi_1)c_1 y^{\chi_1} + \ldots + (\chi_n - \chi_{n-1})c_{n-1}y^{\chi_{n-1}},$$

doit être nul. Or ce résultant est, sous la forme de Sylvester, après suppression du facteur $y^{\chi_1 - 1}$ dans $\varphi_n'(y)$,

$$\begin{array}{c} \chi_{n-1} \\ \text{lignes} \\ \\ \chi_n - \chi_1 \\ \text{lignes} \end{array} \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array}\right. \end{array} \left\| \begin{array}{llllll} \chi_1 c_1 & \ldots\ldots & \chi_n c_n & & 0 & \ldots \\ 0 & \chi_1 c_1 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi_n c_0 & \ldots\ldots & (\chi_n - \chi_1)c_1 & \ldots\ldots & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\| = \Delta = 0.$$

c_n entre dans Δ à la puissance χ_{n-1} et son coefficient est

$$\chi_n^{\chi_{n-1}} \begin{vmatrix} \chi_n c_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \chi_n c_0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \chi_n c_0 \end{vmatrix} = \chi_n^{\chi_{n-1}} (\chi_n c_0)^{\chi_n - \chi_1}.$$

On en conclura

$$\Delta = (\chi_n c_0)^{\chi^n - \chi_1} (\chi_n c_n)^{\chi_{n-1}} + A_1 c_n^{\chi_{n-1}-1} + \ldots + A_{\chi_{n-1}} = 0.$$

Or, quand $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0$ et les χ_n sont donnés, cette équation en c_n a comme limite inférieure du module de ses racines une certaine fonction F_n de n; on peut toujours supposer $|c_n|$ plus petit que F_n. En d'autres termes on peut toujours supposer la loi de décroissance des cœfficients assez rapide pour que les équations $\Phi_n(x) = 0$ n'aient que des racines simples, c. à d. pour que $k_1 = 1$.

Ceci posé, on pourra supposer encore c_{n+1} assez petit pour que

$$|\Psi'(x_1)| < \theta |\Phi'_n(x_1)|,$$

θ étant une fraction $\leq \frac{1}{2}$. Alors $\Phi'(x_1) \neq 0$, d'après (24), et, puisque $\Phi_n(x_1) = 0$,

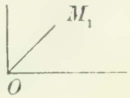
$$(25) \qquad |\Phi(x) - \Psi(x_1)| \geqq \frac{|x - x_1| |\Phi'_n(x_1)|}{2} (1 - \theta) \geqq \left| \frac{(x - x_1) \Phi'_n(x_1)}{4} \right| = \lambda,$$

d'après (22), car

$$\Phi'(x_1) \geqq |(1 - \theta) \Phi'_n(x_1)|.$$

L'inégalité (25) a lieu dès que c_{n+1} est assez petit et que (23') a lieu. Supposons x assez grand et c_{n+1} assez petit pour que

$$(26) \qquad |\Psi(x_1)| < \left| \frac{(x - x_1) \Phi'_n(x_1)}{8} \right| = \frac{\lambda}{2}.$$



D'après (25) et (26), soit M_1 le point représentatif de $u_1 = \Phi(x_1) = \Psi(x_1)$ dans le plan des u, si $\Phi(x) = u$. Le module de $\Phi(x) - \Phi(x_1)$ a une limite inférieure λ indé-

pendante de c_{n+1}; on pourra toujours prendre c_{n+1} assez petit pour que $\lambda \geqq 2OM_1$; il suffira de ne donner à x que des valeurs telles que

$$\left|\frac{(x-x_1)\Phi'_n(x_1)}{4}\right| \geqq 2\,|\Psi(x_1)|,$$

ou

$$(27) \qquad |x-x_1| \geqq \left|\frac{8\Psi(x_1)}{\Phi'_n(x_1)}\right|,$$

ce qui est possible, en prenant c_{n+1} assez petit pour que, d'après (23')

$$(28) \qquad \left|\Phi'_n(x_1)\frac{R^3}{6M'}\right| \geqq \left|\frac{16\Psi(x_1)}{\Phi'_n(x_1)}\right|.$$

Alors le module de $\Phi(x)$ est toujours $\geqq OM_1$.[1] D'après le théorème précité de Weierstrass complété par nous, les valeurs que prend $\Phi(x) - \Phi(x_1)$ quand x varie aux environs de x_1 comprennent toutes les valeurs représentées par les points situés à l'intérieur d'un cercle C_1 de rayon λ et de centre M_1 dans le plan des u, en particulier l'origine pour laquelle Φ a la valeur o, et les valeurs x correspondant à (27) et (23') donnent des points dont aucun n'est situé à l'intérieur de C_1.

D'après (27) la valeur x' correspondante pour laquelle $\Phi(x') = 0$ est telle que

$$|x'-x_1| \leqq \left|\frac{8\Psi(x_1)}{\Phi'_n(x_1)}\right|;$$

$|x'|$ diffère de $|x_1|$ d'une quantité qui tend vers o avec c_{n+1}.

c. q. f. d.

On peut établir un lemme réciproque:

Lemme II. Tout étant posé comme au lemme I, on pourra toujours, quel que soit n, supposer la loi de décroissance des c_n assez rapide pour

[1] On peut encore conclure élégamment comme il suit en employant la terminologie de notre communication (Acad. Sc. Paris) du 3 mars 1902: une ligne de modules minima décroissants issue de x_1 dans le plan des x ne peut sortir du cercle de centre x_1 et de rayon déterminé par (27), puisque sur ce cercle tous les modules de $\Phi(x)$ sont supérieurs à celui de $\Phi(x_1)$. Par conséquent il y a un zéro de $\Phi(x)$ à l'intérieur de ce cercle. Voir encore J. Ec. Polyt., 1903, p. 75—95.

Nous indiquons plus loin d'autres applications des lemmes I et II.

qu'à toute racine ξ de $\Phi = 0$ de module inférieur au double de la limite supérieure du module des racines de $\Phi_n = 0$ corresponde une racine x_1 de $\Phi_n = 0$, la différence $\xi - x_1$ ayant un module η_n petit arbitraire, et pour que $\Phi = 0$ n'ait que des racines distinctes: η_n pourra être pris d'autant plus petit que c_{n+1} sera plus petit par rapport à c_n.[1]

En effet, on a

$$\Phi(\xi) = \Phi_n(\xi) + \Psi_n(\xi) = 0.$$

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de $\Phi_n(x)$; n étant donné, ainsi que $c_0, c_1, \ldots, c_n$, elles sont parfaitement déterminées. Par conséquent si l'on considère toutes les valeurs de x autres que celles comprises à l'intérieur de cercles de rayon η_n ayant $x_1, x_2, \ldots$ comme centres, pour ces valeurs $\Phi_n(x)$ a une limite inférieure L_n parfaitement déterminée pour toute valeur de η_n.

Pour toute valeur ξ_1 de ξ non comprise à l'intérieur de ces cercles on ne peut avoir $\Phi(\xi_1) = 0$ que si $|\Psi_n(\xi_1)|$ est supérieur à la limite en question: ces racines ξ_1 se divisent alors en 2 catégories: celles où $|\xi_1|$ est inférieur au double de la limite supérieure du module des racines de $\Phi_n(x) = 0$, et les autres.

Pour les premières

$$\Psi_n|\xi_1| \leqq |c_{n+1}||\xi_1|^{\tilde\omega_{n+1}} + \ldots.$$

On peut assigner à $|\Psi_n(\xi_1)|$ une limite supérieure aussi petite A_n qu'on veut pourvu que $|c_{n+1}|$ soit assez petit, c. à. d. telle que $A_n < L_n$, ce qui est impossible.

On peut également supposer les racines de $\Phi(x) = 0$ distinctes, si le mode de décroissance des $|c_n|$ est suffisamment rapide. En effet, si non, soit $\Phi(\xi) = 0$, $\Phi'(\xi) = 0$: il y a une racine x_1 de $\Phi_n(x) = 0$ telle que $|x_1 - \xi| < \eta_n$ et une x_1' de $\Phi_n'(x)$ telle que $|x' - \xi| < \eta_n'$. Or $c_0, c_1, \ldots, c_n$ étant donnés, on peut prendre c_{n+1} assez petit pour que $\eta_n + \eta_n' < \eta_n''$, η_n'' étant aussi petit qu'on veut. Or $|x_1' - x_1| \leqq \eta_n + \eta_n'$ est limité inférieurement en fonction de $c_0, c_1, \ldots, c_n$, ce qui est contradictoire avec ce qui précède.

Par suite, si le mode de décroissance des $|c_n|$ est suffisamment rapide, $\Phi(x) = 0$ n'a que des racines distinctes. c. q. f. d.

[1] Quand η_n est assez petit, à chaque racine de $\Phi_n(x) = 0$ en correspond une, et une seule de $\Phi(x) = 0$.

Ceci posé, nous allons établir ce théorème:

Théorème. Soit

$$\sum_0^{\infty} c_a x^{\varpi_a} = 0$$

une équation transcendante dont le 1[er] membre est convergent ($\varpi_a = \frac{\chi_a}{q}$; $\chi_a =$ entier croissant, q et χ_a entiers positifs). On pourra toujours, les χ_a étant donnés ainsi que q, supposer la loi de décroissance des coëfficients c_a assez rapide pour que π ne puisse en être racine.

En effet, on sait que MM. LINDEMANN, et, après lui, MM. GORDAN, HILBERT, HURWITZ, ROUCHÉ [1] ont établi que e^{ζ} n'était pas racine d'une équation algébrique à coëfficients entiers quand ζ était algébrique, par suite que π n'était pas algébrique. On peut alors chercher à étendre les résultats des paragraphes précédents aux nombres e^{ζ}, où ζ est un nombre algébrique ou racine d'une des équations (1), (18) ou (19). Nous nous contenterons d'établir, à titre d'exemple, le théorème pour π ou $i\pi$; il nous suffira de modifier trèslégèrement la méthode de M. HILBERT.

Supposons que $i\pi$ soit racine d'une équation

$$\sum_0^{\infty} c_a x^{\varpi_a} = 0. \tag{1}$$

On pourra toujours prendre $|c_{n+1}|$ assez petit pour que les racines de

$$\sum_0^{n} c_a x^{\varpi_a} = 0 \tag{29}$$

diffèrent d'aussi peu qu'on veut d'autant de racines correspondantes de (1), dont $i\pi$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda_n}$ les λ_n racines de (29): nous formons [2]

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \ldots (1 + e^{\alpha_{\lambda_n}}) = 1 + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_N}$$

$$a + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_N} = \varepsilon_n;$$

quand c_{n+1} est assez petit sans que n varie, il y a une des racines α, α_1 par exemple, qui est très voisine de $i\pi$, d'après l'hypothèse et les 2 lemmes

[1] V. Math. Ann. t. 43, 1893, p. 216, 220, 222 et ROUCHÉ, *Traité de Géométrie.*

[2] Nous conservons autant que possible les notations et la démonstration de M. HILBERT, à laquelle il conviendra de se reporter.

précédents, et ε_n est aussi petit qu'on veut. $\beta_1, \ldots, \beta_M$ sont racines d'une équation algébrique de degré M à coefficients entiers

$$f(z) = bz^M + \ldots + b_M = 0,$$

$b, \ldots, b_M$ ne dépendant que de $c_0, \ldots, c_n$.

On formera alors

$$(30) \qquad \int_0^\infty z^\rho[g(z)]^{\rho+1}e^{-z}dz(a + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_M}) = \int_0^\infty \varepsilon_n z^\rho[g(z)]^{\rho+1}e^{-z}dz,$$

où ρ est un nombre entier positif, et $g(z) = b^M f(z)$, et l'on sera encore conduit, en posant

$$P_1 = a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + \ldots + e^{\beta_M}\int_{\beta_M}^\infty,$$

$$P_2 = e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_M}\int_0^{\beta_M},$$

aux relations

$$\frac{P_1}{\underline{|\rho}} \equiv ab^{\rho M + M}b_M^{\rho+1} \qquad (\mathrm{mod}\ \rho + 1),$$

$$\frac{|P_2|}{\underline{|\rho}} < \frac{\varkappa K^\rho}{\underline{|\rho}},$$

$$\varkappa = \{|\beta_1 e^{\beta_1}| + \ldots + |\beta_M e^{\beta_M}|\}k.$$

$\beta_1, \ldots, \beta_M$ diffèrent d'aussi peu qu'on veut de fonctions bien déterminées de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, et leur valeur est limitée en fonction de n, $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Il en est de même de $b_1, \ldots, b_M$, par suite de $\varkappa$, k et K.

D'autre part, le second membre de (30) est égal à

$$|\varepsilon_n|\int_0^\infty = |\varepsilon_n|\,\underline{|\rho}(b^{\rho M + M}b_M^{\rho+1} + \mathrm{mult.}\,(\rho + 1)),$$

et (30) devient

$$(31) \qquad |ab^{\rho M+M}b_M^{\rho+1} + \mathrm{mult.}\,(\rho + 1)|\,\underline{|\rho} + \varkappa K^\rho$$
$$= |\varepsilon_n|\,\underline{|\rho}\,(b^{\rho M+M}b_M^{\rho+1} + \mathrm{mult.}\,(\rho + 1)).$$

Ceci posé, n, c_0, c_1, ..., c_n étant donnés, choisissons ρ assez grand pour que abb_M soit 1[er] à $\rho + 1$, et ρ suffisamment grand pour que

$$\left|\frac{\varkappa K^\rho}{\underline{|\rho}}\right| < \frac{1}{4}$$

$|ab^{\rho M + M} b_M^{\rho+1} + \text{mult.}(\rho + 1)|$ est un entier $\neq 0$, et le 1[er] membre de (31) est $\geqq \frac{3}{4}(\underline{|\rho})$. Donnant alors à ρ une valeur limitée en fonction de n et satisfaisant aux conditions ci-dessus, on pourra toujours prendre c_{n+1}, par suite ε_n assez petit pour que le second membre de (31) soit $< \frac{3}{4}(\underline{|\rho})$. L'égalité (31) est alors impossible, et nous obtenons le théorème annoncé.

V.

Le véritable caractère des théorèmes qui précèdent est surtout qu'ils donnent un moyen de calculer une limite supérieure de c_{n+1} en fonction de c_0, c_1, ..., c_n, de façon que les théorèmes énoncés aient lieu. Ils peuvent être regardés comme des cas particuliers, ou, plus exactement, des corollaires de théorèmes beaucoup plus généraux, mais dont l'application conduit aux mêmes raisonnements lorsqu'on veut déterminer la limite en question.

On peut établir, à titre d'exemple, la propriété générale suivante:

Théorème I. Soient t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}, ... des entiers fonctions données de n telles que la série $\sum \frac{a_n}{t_n} x^n$ soit convergente quels que soient les entiers positifs ou négatifs $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, quand $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|, \ldots$ ont une limite supérieure finie A. Étant donné un nombre ζ quelconque non algébrique,[1] si t_1, t_2, ..., t_n, ... croissent suffisamment vite avec n, aucun nombre fonction algébrique à coëfficients entiers de ζ n'est racine d'une des équations $\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^n = 0$.[2]

[1] Nous verrons plus loin (p. 326) qu'une propriété analogue a lieu quand ζ est algébrique.

[2] Si l'on se place au point de vue de la théorie des ensembles de M. Cantor, on remarquera que ce théorème et tous les théorèmes précédents s'appliquent à un en-

En effet, considérons l'ensemble de celles de ces équations pour lesquelles $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n| \leqq A$, et les valeurs correspondantes de $\sum_0^n \frac{a_n}{t_n} x^n$ quand on donne à x toutes les valeurs possibles non algébriques racines des équations algébriques de degré $\leqq d$ dont les coefficients sont des polynomes en ζ à coëfficients entiers, de degré $\leqq \delta$, les coëfficients entiers dans chaque polynome ne dépassant pas δ_1. Ces valeurs sont en nombre limité; il en est par suite de même des valeurs correspondantes de mod. $\sum_0^n \frac{a_n}{t_n} x^n$, et celles-ci possèdent une limite inférieure fonction de n, A, d, δ et δ_1, $\varphi(n, A, d, \delta, \delta_1)$, $t_1, \ldots, t_n$ étant supposés donnés. On peut toujours supposer que l'on prenne pour φ une fonction non croissante de A, d, δ, δ_1, et l'on pourra écrire pour n assez grand, si l'on prend $A, d, \delta, \delta_1 \leqq n$,

$$\varphi(n, A, d, \delta, \delta_1) \geqq \varphi(n, n, n, n, n) \geqq \psi(n).$$

Si donc $\frac{a_{n+1}}{t_{n+1}}$ est suffisamment petit par rapport à $\psi(n)$, $\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x_n = 0$ est impossible pour toutes les valeurs en question.

Dès lors pour un mode de croissance suffisamment rapide de t_n, l'équation $\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^n = 0$ ne peut avoir pour racines les valeurs x satisfaisant aux conditions précitées, quels que soient A, d, δ, δ_1. On peut en effet trouver toujours une valeur de n suffisamment grande pour que le raisonnement précédent soit applicable. c. f. q. d.

Remarque I. Une propriété semblable a lieu, quand on considère non plus les fonctions algébriques (à coëfficients entiers) d'un seul nombre ζ, mais l'ensemble des fonctions algébriques (à coëfficients entiers) d'un nombre limité de nombres $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ non algébriques. Le raisonnement est le même.

semble dénombrable (que nous appellerons ensemble D) de nombres; au contraire, les théorèmes relatifs aux nombres X s'appliquent à un ensemble de nombres ayant la puissance du continu (que nous appellerons ensemble C). Nous verrons plus loin qu'on peut établir des propriétés de même nature pour une infinité d'ensembles C analogues à celui des nombres X.

Remarque II. Quand on précise la nature du nombre ζ, on peut appliquer pour la détermination de la limite supérieure de c_{n+1} des principes tout semblables à ceux qui nous ont servi dans les 4 premier paragraphes.

Nous citerons à titre d'exemple l'ensemble des nombres $m + pe^{\frac{r}{q}}$, $\frac{r}{q}$, $m = \frac{r_1}{q_1}$, $p = \frac{r_2}{q_2}$ prenant toutes les valeurs rationnelles possibles.

Considérons l'équation

$$\sum_0^\infty c_a x^{la} = 0. \tag{32}$$

Si $m + pe^{\frac{r}{q}}$ en est racine quand r, r_1, r_2, q, q_1, q_2 sont $\leqq A$ en valeur absolue, on aura

$$\sum_0^\infty c_a \left(m + pe^{\frac{r}{q}}\right)^{la} = 0.$$

Soit $e^{\frac{r}{q}} = \varepsilon$; considérons

$$\sum_0^n c_a (m + p\varepsilon)^{la} = d_0 + d_1 \varepsilon + \ldots + d_{ln} \varepsilon^{ln} = \sum_0^{ln} d_a e^{a\frac{r}{q}}.$$

On aura, d'après (3)

$$\sum_0^{ln} d_a e^{a\frac{r}{q}} F(0) = \sum_0^{ln} d_a F\left(a\frac{r}{q}\right) + \sum_0^{ln} d_a e^{a\frac{r}{q}} \int_0^{a\frac{r}{q}} f(x) e^{-x} dx$$

$$= -\sum_{n+1}^\infty c_a (m + p\varepsilon)^{la} F(0).$$

On prendra ici

$$f(x) = \frac{x^{p_1 - 1}\left[x - \frac{r}{q}\right]^{p_1} \ldots \left[x - \frac{rln}{q}\right]^{p_1}}{\underline{|(p_1 - 1)}},$$

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots.$$

La marche à suivre est dès lors la même que dans le cas où $m = 0$, $p = 1$. Il en résulte que pour

$$c_{n+1} < \varphi(A, c_0, c_1, \ldots, c_n)$$

l'équation (32) est impossible: elle le sera a fortiori si $c_{n+1} < \varphi(n, c_0, c_1, \ldots, c_n)$ pour n assez grand, ce qui est toujours possible; φ est une fonction que les formules précédentes permettent de déterminer. On en déduira que, pour un mode de décroissance suffisamment rapide de c_n, aucun des nombres $m + pe^{\frac{r}{q}}$ n'est racine de (32) quel que soit A.

Ce qui précède ne donne, pour chaque nombre ζ non algébrique, qu'un ensemble D de nombres qui ne sont pas racines d'équations de la forme $\sum_0^\infty c_n x^n = 0$. Mais on peut établir pour tout nombre ζ, algébrique ou non, l'existence d'une infinité d'ensembles C jouissant de propriétés analogues: nous avons déjà indiqué ce théorème dans le cas où ζ est un nombre entier ordinaire[1] (nombres X). Nous allons voir que la même propriété a lieu quand ζ est algébrique ou transcendant.

Soit Y un nombre quelconque, ζ un autre nombre > 1, X_1 la partie entière de Y; on pourra écrire

$$Y = X_1 + \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 < 1.$$

Posons

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1 + \varepsilon_2}{\zeta}, \quad \varepsilon_2 < 1, \ \alpha_1 \text{ entier } < \zeta;$$

on aura

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha_2 + \varepsilon_3}{\zeta}, \quad \varepsilon_3 < 1, \ \alpha_2 \text{ entier } < \zeta$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Finalement on mettra Y d'une seule manière sous la forme

$$Y = X_1 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \ldots;$$ [2]

---

[1] loc. citat.

[2] Il en résulte en particulier que tout nombre ζ non algébrique satisfait à une infinité d'équations transcendantes à coëfficients rationnels. Mais, pour $\zeta > 1$ ces équations présentent un point singulier essentiel à l'origine. Pour $\zeta < 1$, il faudrait poser $\zeta = \frac{1}{\zeta'}$ et on aurait un développement analogue: ζ est alors effectivement racine d'une infinité d'équations $A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots = 0$ à coëfficients rationnels ou entiers.

on aura

$$\varepsilon_1 \zeta = \alpha_1 + \varepsilon_2 < \zeta, \qquad \alpha_1 \leqq E(\zeta),$$

$$\varepsilon_2 \zeta = \alpha_2 + \varepsilon_3 < \zeta, \qquad \alpha_2 \leqq E(\zeta),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots$$

On arrive ainsi à représenter tout nombre dans un *système de numération de base quelconque non entière,* et l'on peut se proposer de voir si l'on ne peut obtenir pour ce système des théorèmes analogues à ceux que nous avons obtenus pour les nombres X.

Considérons l'ensemble des nombres

$$Y = X_1 + \frac{\alpha_1}{\zeta^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\alpha_l}{\zeta^{\psi_l}} + \ldots, \tag{33}$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \ldots$ pouvant avoir toutes les valeurs entières positives ou négatives $\leqq E(\zeta)$ en valeur absolue. Quels que soient $\psi_1, \ldots, \psi_l, \ldots$, cet ensemble a la puissance du continu:[1] c'est un ensemble C.

Prenons alors une équation

$$\sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0 \tag{34}$$

algébrique ou transcendante (ϖ_a entier). Peut-on avoir $\sum_0^\infty c_a Y^{\varpi_a} = 0$? Nous poserons

$$Y = X_1 + \sum_0^l {}_b \frac{\alpha_b}{\zeta^{\psi_b}} + \sum_{l+1}^\infty {}_b \frac{\alpha_b}{\zeta^{\psi_b}} = A_l + \sum_{l+1}^\infty \frac{\alpha_b}{\zeta^{\psi_b}},$$

et il faudra

$$0 = c_0 + c_1\Big(A_l + \sum_{l+1}^\infty\Big)^{\varpi_1} + \ldots + c_n\Big(A_l + \sum_{l+1}^\infty\Big)^{\varpi} + \sum_{n+1}^\infty c_a\Big(A_l + \sum_{l+1}^\infty\Big)^{\varpi_a},$$

ce qui peut s'écrire

$$0 = c_0 + c_1 A_l^{\varpi_1} + \ldots + c_n A_l^{\varpi} + B\sum_{l+1}^\infty + \sum_{n+1}^\infty c_a\Big(A_l + \sum_{l+1}^\infty\Big)^{\varpi_a}. \tag{35}$$

ζ étant donné, ainsi que $\psi_1, \ldots, \psi_l$, $c_0, c_1, \ldots, c_n$, $A_l^{\varpi_1}, \ldots, A_l^{\varpi_n}$, B sont limités en fonction de ψ_l et ϖ_n, quels que soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ et $X_1 \leqq A$. On pourra alors toujours prendre c_{n+1} assez petit t ψ_{l+1} assez grand pour

[1] Voir par ex. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 32.

que $\left| B \sum_{l+1}^{\infty} + \sum_{n+1}^{\infty} c_a \left(A_l + \sum_{l+1}^{\infty} \right)^{\tilde{\omega}_a} \right| < \varepsilon_{n,l}$, $\varepsilon_{n,l}$ étant aussi petit qu'on veut. On devra donc avoir

$$M_{n,l} = \left| c_0 + c_1 A_l^{\tilde{\omega}_1} + \ldots + c_n A_l^{\tilde{\omega}_n}) \right| < \varepsilon_{n,l}. \tag{36}$$

Ceci posé, si ζ est algébrique le 1er membre pourra parfaitement s'annuler. Mais s'il n'est pas algébrique, il en est différemment: soit donc ζ transcendant.

1°. Supposons que $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$, c. à. d. que (34) soit une équation algébrique: $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des entiers que l'on peut supposer $\leqq d$. Le 1er membre $M_{n,l}$ de (36), pour toute valeur donnée de ζ, est limité inférieurement en fonction de d, n, ψ_l. On aura

$$M_{n,l} \geqq \varphi_1(d, n, \psi_l, A),$$

φ_1 étant une fonction de A, d, n, ψ_l qu'on peut toujours supposer non croissante.

Si l'on prend $l \geqq A$, $l \geqq d$, $l \geqq n$, on aura a fortiori

$$M_{n,l} \geqq \varphi_1(l, l, \psi_l, l).$$

Prenant alors ψ_{l+1} assez grand pour que

$$\varepsilon_{n,l} < \varphi_1(l, l, \psi_l, l)$$

quand $n < l$, ce qui est toujours possible, on voit que (36) est impossible.

Par conséquent on peut toujours trouver un mode de croissance assez rapide des ψ_l pour que, à partir d'une certaine valeur de l, quelles que soient l'équation algébrique (34) et la valeur X_1, (36) soit impossible. Y ne peut alors être racine d'aucune équation algébrique.

2°. Supposons que (34) soit une équation transcendante, et prenons

$$c_0 = a_0, \qquad c_1 = \frac{a_1}{t_1}, \ \ldots, \ c_n = \frac{a_n}{t_n}, \ \ldots, \quad (a_i \text{ entier}).$$

Posons $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n| \leqq A$ (A entier donné). Pour toutes les valeurs de $a_0, \ldots, a_n$ satisfaisant à cette condition, quand $t_1, \ldots, t_n$ sont donnés, on peut encore assigner, quand ζ est donné et non algébrique, une limite inférieure de $M_{n,l}$ en fonction de A, l et n,

$$M_{n,l} \geqq \varphi_2(A, n, l),$$

φ_2 n'étant pas une fonction croissante de A, n, l. Si l'on prend par exemple $n = l \geq A$, on aura

$$M_{n,n} \geq \varphi_2(n, n, n).$$

On pourra toujours prendre ψ_{l+1} et $a_{n+1}^{-1} t_{n+1}$ assez grands pour que $\varepsilon_{n,n} < \varphi_2(n, n, n)$, et (36) sera alors impossible. Si le mode de croissance des t_n et ψ_n est suffisamment rapide, il y aura impossibilité quel que soit A.

3°. Supposons encore que (34) soit une équation transcendante: pour les valeurs particulières de ζ de la forme e, ou $e^{\frac{r}{q}}$ ($\frac{r}{q}$ rationnel) ou π, on pourra encore probablement trouver des limites inférieures précises de ψ_{l+1} et t_{n+1} par les mêmes procédés que ceux employés par nous dans l'extension des démonstrations de MM. Hurwitz et Hilbert. Nous n'insistons pas.

Il nous reste à considérer le cas où ζ est algébrique.

1°. Si (34) est une équation algébrique $f(x) = 0$, qu'on peut supposer irréductible, on a aux environs d'une racine $|f'(x)| < M$. Si $Y = A_l + \varepsilon_l$ est une racine, $f(A_l + \varepsilon_l) = 0 = f(A_l) + \varepsilon_l \mu$

$$|\varepsilon_l| = \left|\frac{f(A_l)}{\mu}\right| > \frac{|f(A_l)|}{kM},$$

M et k étant finis.

D'abord on peut supposer $f(A_l) \neq 0$: en effet le module de la différence entre 2 racines de $f(x) = 0$ est limité inférieurement en fonction du degré n de $f(x)$ et de d, si tous les coëfficients de $f(x)$ sont $\leq d$; il suffira de prendre

$$\psi_{l+1} > \chi(n, d),$$

pour que $f(A_l) \neq 0$. Alors $\frac{|f(A_l)|}{kM}$ est limité inférieurement en fonction de n, d, l, et $|\varepsilon_l|$ aussi: par suite on voit que, quelle que soit l'équation algébrique irréductible à coëfficients entiers considérée, si le mode de croissance de ψ_l est suffisamment rapide il y aura toujours une valeur de l pour laquelle notre raisonnement sera applicable, et Y ne sera pas algébrique.

2°. Si (34) est une équation transcendante, pour toute valeur de A_l, $M_{n,l}$ ou $M_{n+1,l}$ est $\neq 0$. Le raisonnement qui nous a servi pour le cas où ζ est transcendant est à peu près applicable. On aura

$$\text{soit}\quad |\varepsilon_{n,l}| > M_{n,l} \geqq \varphi_{n,l}\,, \qquad \text{si}\quad M_{n,l} \neq 0,$$

$$\text{soit}\quad |\varepsilon_{n+1,l}| > M_{n+1,l} \geqq \varphi_{n+1,l}, \qquad \text{si}\quad M_{n,l} = 0.$$

Si le mode de croissance des $\frac{1}{c_n}$ et des ψ_l est suffisamment rapide, on voit successivement que ces 2 inégalités sont impossibles.

Les résultats ci-dessus peuvent être résumés comme il suit:

Théorème. Soit

$$Y = X_1 + \frac{a_1}{\zeta^{\psi_1}} + \ldots + \frac{a_l}{\zeta^{\psi_l}} + \ldots,$$

($|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_l|, \ldots$ entiers $\leqq E(\zeta)$) un nombre exprimé dans le système de numération de base ζ ($|\zeta| > 1$), algébrique ou non, et

$$\sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0, \qquad (\varpi_a \text{ entier}), \tag{34}$$

une équation algébrique ou transcendante: ζ étant donné, pour un mode de croissance suffisamment rapide de ψ_l avec l: 1°, Y ne peut être algébrique; 2°, si $c_0 = a_0$, $c_1 = \frac{a_1}{t_1}, \ldots, c_n = \frac{a_n}{t_n}, \ldots$, ($|a_1|, \ldots, |a_n|, \ldots$ entiers limités quelconques), Y ne peut être racine de (34) quand t_n croît suffisamment vite avec n.

Remarque. Il est bien évident que si, au lieu d'un nombre transcendant ζ, on considère k nombres $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$, on pourra encore montrer par les mêmes procédés qu'aucun des nombres Y correspondant à $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ ne peut être solution d'une équation algébrique ou de $\sum\limits_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^{\varpi_n} = 0$, quand ψ_l et t_n croissent suffisamment vite avec l et n. Dans le cas particulier où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ seraient liés par certaines relations, par exemple si ce sont des puissances rationnelles de ζ_1, ou des fonctions algébriques à coëfficients entiers de ζ_1, on pourra aller un peu plus loin. Supposons par exemple que $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ soient l'ensemble des racines des équations algébriques de degré $\leqq d$ dont les coëfficients sont des polynomes à coëfficients entiers en ζ_1 de degré $\leqq \partial$, les coëfficients de chaque polynome ne dépassant pas ∂_1 en valeur absolue: k est limité en fonction de d, ∂, ∂_1. Les limites inférieures de ψ_{l+1} et t_{n+1} sont fonctions non décroissantes de

d, ∂ et ∂_1; pour l et n assez grands avec $n = l$, par exemple, on pourra prendre comme limite inférieure une fonction de n seul. On pourra donc encore trouver un mode de croissance suffisamment rapide de ψ_l et t_n pour que le théorème précédent reste vrai quand ζ est un quelconque des nombres fonctions algébriques de ζ_1. Donc

Corollaire. Le théorème précédent reste vrai pour l'ensemble des nombres Y obtenus en donnant à ζ toutes les valeurs des fonctions algébriques d'un même nombre ζ_1.

Il existe ainsi des nombres, les racines des équations algébriques ou des équations $\sum_0^\infty c_n x^{\tilde{\omega}_n} = 0$ (le mode de croissance des $\tilde{\omega}_n$ étant donné et c_n croissant assez vite avec n), qui, mis sous la forme

$$X = X_1 + \frac{\alpha_1}{\zeta^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\alpha_l}{\zeta^{\psi_l}} + \ldots$$

X_1 entier, $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_l|, \ldots \leq |\zeta|$ ne peuvent jamais présenter un mode de croissance des ψ_l qui soit trop rapide, quand on prend successivement pour ζ toutes les valeurs des fonctions algébriques d'un même nombre transcendant ζ_1 arbitraire, mais donné.

VI.

Nous avons rencontré au § IV une propriété algébrique des équations transcendantes $\sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0$. Nous ne croyons pas inutile [1] d'étudier à ce point de vue quelques propriétés algébriques de ces équations et de montrer qu'elles forment un cas limite très-voisin de celui des équations algé-

[1] Nous nous contentons d'établir les propriétés relatives à $\sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0$. On a pour les équations (18), (19) et plus généralement

$$\sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} + \sum_0^\infty \frac{\overset{0}{c}_a}{x^{\overset{0}{\tilde{\omega}}_a}} + \ldots + \sum_0^\infty \frac{\overset{k}{c}_a}{(x-\beta_k)^{\overset{k}{\tilde{\omega}}_a}} = 0$$

des résultats tout-à-fait analogues. Nous y reviendrons ultérieurement. (Voir Bull. Soc. Math, 1902, loc. cit.)

briques, en particulier des équations binômes. Les résultats précédents, joints à ceux de LIOUVILLE et à ceux que nous avons obtenus dans une note antérieure déjà citée, l'établissent amplement au point de vue arithmétique.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant:

Théorème I. Soit l'équation transcendante

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0 \quad \left(\varpi_a = \frac{\chi_a}{q},\ q\ ,\ \chi_a \text{ entiers}\right),$$

les c_a décroissant suffisamment vite quand les ϖ_a sont donnés. Si les c_n sont tous réels et si $\Phi_n(x) = 0$ a $2p$ racines imaginaires et $\varpi_n q - 2p$ racines réelles, $\Phi(x) = 0$ a $2p$ racines imaginaires et $\varpi_n q - 2p$ racines réelles correspondantes distinctes.

Nous savons déjà que les racines de $\Phi(x)$ dont le module ne dépasse pas le double de la limite supérieure du module des racines de $\Phi_n(x) = 0$ diffèrent de racines correspondantes de $\Phi_n(x) = 0$ d'aussi peu qu'on veut, et réciproquement pourvu que $|c_{n+1}|$ soit suffisamment petit par rapport à c_n.

Soit $\alpha + \beta i$ une racine imaginaire de $\Phi(x)$: quand $|c_{n+1}|$ tend vers 0, $\alpha + \beta i$ tend vers une racine $a + bi$ de $\Phi_n(x)$. Si $b \neq 0$, on a évidemment, quand $|c_{n+1}|$ suffisamment petit, $\beta \neq 0$. Si $b = 0$, il y aura 2 racines $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ tendant vers a: alors $\Phi(\alpha + \beta i) - \Phi(\alpha - \beta i)$ est nul, et, quand β tend vers 0 il en résulte $\Phi'(a) = \Phi_n'(a) = 0$ contrairement à ce qu'on a vu. Donc une racine imaginaire de $\Phi(x)$ ne peut correspondre qu'à une racine imaginaire de $\Phi_n(x)$. Il y a réciprocité, car soit α une racine réelle de $\Phi(x)$; quand c_{n+1} tend vers 0 elle a évidemment pour limite une racine réelle de $\Phi_n(x)$.

Le nombre des racines de $\Phi_n(x)$ étant évidemment $\varpi_n q$, le théorème en résulte immédiatement.

Les équations $\Phi(x) = 0$, que nous appellerons des *équations pseudo-* ou *quasialgébriques,* peuvent donc être étudiées au point de vue du nombre de leurs racines réelles comme les équations algébriques. Dans ce but nous considérerons seulement le cas où ϖ_n est entier, le cas où $\varpi_n = \frac{\chi_n}{q}$ s'en déduisant facilement, et nous établirons d'abord le lemme suivant:

Lemme. L'équation $\Phi_n(x) = 0$, où les c_n sont réels, a les $\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}$ racines $\xi_1(1 + \varepsilon_1)$, $\xi_2(1 + \varepsilon_2)$, ..., $\xi_{\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}}(1 + \varepsilon_{\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}})$, ξ_1, ξ_2, ..., $\xi_{\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}}$ étant les racines de $c_n x^{\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}} + c_{n-1} = 0$, ε_1, ε_2, ..., $\varepsilon_{\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}}$ tendant vers 0 quand c_n tend vers 0, c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1} étant donnés. Les racines correspondantes de $\Phi(x) = 0$ sont de la même forme.

En effet, soit

$$c_n \xi^{\omega_n - \omega_{n-1}} + c_{n-1} = 0,$$

$$\begin{aligned} O = \Phi_n[\xi(1+\varepsilon)] &= c_n \xi^{\bar{\omega}_n}(1+\varepsilon)^{\bar{\omega}_n} + c_{n-1}\xi^{\bar{\omega}_{n-1}}(1+\varepsilon)^{\omega_{n-1}} + \dots \\ &= c_n \xi^{\bar{\omega}_n}(\bar{\omega}_n \varepsilon + C^2_{\bar{\omega}_n}\varepsilon^2 + \dots) + c_{n-1}\xi^{\bar{\omega}_{n-1}}(\bar{\omega}_{n-1}\varepsilon + C^2_{\bar{\omega}_{n-1}}\varepsilon^2 + \dots) \\ &\quad + c_{n-2}\xi^{\bar{\omega}_{n-2}}(1+\varepsilon)^{\bar{\omega}_{n-2}} + \dots \\ &= \varepsilon(\bar{\omega}_{n-1} - \bar{\omega}_n)c_{n-1}\xi^{\bar{\omega}_{n-1}} + \varepsilon^2 c_{n-1}\xi^{\bar{\omega}_{n-1}} A + c_{n-2}\xi^{\bar{\omega}_{n-2}}(1+\varepsilon)^{\bar{\omega}_{n-2}} + \dots . \end{aligned}$$

A ne dépend que de $\bar{\omega}_n$, $\bar{\omega}_{n-1}$ et ε et reste fini quand ε tend vers zéro.

Cette équation donne alors

$$\varepsilon = \frac{c_{n-2}\xi^{\bar{\omega}_{n-2}}(1+\varepsilon)^{\bar{\omega}_{n-2}} + \dots}{(\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1})c_{n-1}\xi^{\bar{\omega}_{n-1}} - \varepsilon c_{n-1}\xi^{\bar{\omega}_{n-1}} A}$$

et est satisfaite par une valeur de ε qui tend vers 0 quand c_n tend vers 0, car ξ croît alors indéfiniment et $\bar{\omega}_{n-1} > \bar{\omega}_{n-2}$.

Il n'y a plus qu'à appliquer les lemmes du § IV.

c. q. f. d.

On en conclut de suite le théorème suivant:

Théorème II. Soit l'équation

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_n x^{\bar{\omega}_n} = 0$$

où $\bar{\omega}_n$ est entier: si le mode de décroissance des c_n est suffisamment rapide, on obtiendra le nombre des racines réelles ou imaginaires de $\Phi(x) = 0$ qui correspondent à celles de $\Phi_n(x) = 0$, et même une valeur approchée de ces racines en déterminant celui des équations binômes [1]

$$c_n \xi^{\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}} + c_{n-1} = 0, \qquad c_{n-1}\xi^{\bar{\omega}_{n-1} - \bar{\omega}_{n-2}} + c_{n-2} = 0, \quad \dots,$$

[1] On a ici un exemple net, *dans un cas limite*, de l'influence de la croissance des coëfficients d'une fonction entière sur la croissance des racines.

et les racines réelles ou imaginaires de ces équations: à chacune de ces dernières correspond une racine de $\Phi(x)$ qui est en même temps réelle ou imaginaire.

En effet, soit $\xi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ une racine imaginaire de

$$c_n x^{\varpi_n - \varpi_{n-1}} + c_{n-1} = 0.$$

On a

$$\cos\varphi = \cos\frac{k\pi}{\varpi_n - \varpi_{n-1}}, \qquad \sin\varphi = \sin\frac{k\pi}{\varpi_n - \varpi_{n-1}},$$

k étant un entier pair ou impair suivant le signe de $c_n c_{n-1}$. Pour une valeur donnée de n et de ϖ_n, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ sont finis et $\xi(1+\varepsilon)$ est imaginaire avec ξ quand c_n est suffisamment petit. Si ξ est réel, $\xi(1+\varepsilon)$ a son module compris entre $\frac{\xi}{k}$ et $k\xi$ (k fini > 1, et voisin de 1). D'autre part, si $c_n c_{n-1} < 0$, il y a une racine réelle quand $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est impair, $\sqrt[\varpi_n - \varpi_{n-1}]{\frac{-c_{n-1}}{c_n}}$; il y en a 2 quand $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est pair, $\pm\sqrt[\varpi_n - \varpi_{n-1}]{\frac{-c_{n-1}}{c_n}}$. Si $c_n c_{n-1} > 0$ il n'y en a qu'une, si $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est impair, $\sqrt[\varpi_n - \varpi_{n-1}]{\frac{-c_{n-1}}{c_n}}$.

Or, si $k > 1$,

$$\begin{aligned}\Phi_n\left(\frac{\xi}{k}\right) &= c_n\left(\frac{\xi}{k}\right)^{\varpi_n} + c_{n-1}\left(\frac{\xi}{k}\right)^{\varpi_{n-1}} + \ldots \\ &= c_{n-1}\,\xi^{\varpi_{n-1}}\left(\frac{1}{k^{\varpi_{n-1}}} - \frac{1}{k^{\varpi_n}}\right) + c_{n-2}\frac{\xi^{\varpi_{n-2}}}{k^{\varpi_{n-2}}} + \ldots,\end{aligned}$$

$$\Phi_n(k\xi) = c_{n-1}\,\xi^{\varpi_{n-1}}(k^{\varpi_{n-1}} - k^{\varpi_n}) + c_{n-2}(k\xi)^{\varpi_{n-2}} + \ldots;$$

$\Phi_n\left(\frac{\xi}{k}\right)$ et $\Phi_n(k\xi)$ sont de signes contraires, et $\Phi_n(x) = 0$ a une racine réelle au moins comprise entre $\frac{\xi}{k}$ et $k\xi$, quel que soit le signe de ξ.

Si l'on considère alors les racines réelles distinctes $\xi', \xi'', \ldots$ des équations binômes

$$c_n\,\xi^{\varpi_n - \varpi_{n-1}} + c_{n-1} = 0, \qquad c_{n-1}\,\xi^{\varpi_{n-1} - \varpi_{n-2}} + c_{n-2} = 0, \quad \ldots,$$

on peut toujours choisir un mode de décroissance assez rapide des coëfficients c_n pour que parmi les quantités $\xi', \xi'', \ldots$ il n'y en ait pas deux

comprises entre $k\xi'$ et $\frac{\xi'}{k}$, $k\xi''$ et $\frac{\xi''}{k}$, ..., ces intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres. Il en résulte qu'aux $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ racines de

$$c_n x^{\omega_n - \omega_{n-1}} + c_{n-1} = 0$$

correspondront $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ racines de Φ voisines et en même temps réelles ou imaginaires.

Le théorème est alors vrai pour $\Phi_1(x) = 0$; on sait que $\Phi_2(x)$ a ϖ_1 racines vosines de celles de Φ_1 et $\varpi_2 - \varpi_1$ voisines de celles de

$$c_2 \xi^{\varpi_2 - \varpi_1} + c_1 = 0.$$

Le théorème est vrai pour Φ_2; et ainsi de suite. c. q. f. d.

Remarque I. Il serait intéressant d'étendre ce qui précède aux séries de la forme $\sum_0^\infty c_n P_n$, où les P_n sont des polynomes de degrés ϖ_n croissants ou des fractions rationnelles.

Remarque II. On pourrait aussi considérer les équations $\sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = 0$, où les $k+1$ 1^ers^ coëfficients sont absolument arbitraires: les transcendantes correspondantes ont pour limite les racines des équations algébriques générales quand c_{k+1}, c_{k+2}, ..., tendent vers zéro.

Théorème III. Si le mode de décroissance des c_n à partir d'un quelconque d'entre eux est suffisamment rapide, l'équation $\Phi(x) = 0$ n'a aucune racine algébrique.

Supposons que $\Phi(x) = 0$ ait une racine commune ω avec une équation algébrique donnée irréductible

$$f(x) = A_0 x^p + \ldots + A_p.$$

Nous supposons ici que $|A_0|$, $|A_1|$, ..., $|A_p|$ et p sont des entiers $\leq A$, A étant donné.

$\Phi_n(\omega)$ diffère de 0 d'une quantité qui est d'autant plus petite que c_{n+1} est plus petit par rapport à c_0, c_1, ..., c_n, et tend vers 0 quand c_{n+1} tend vers 0. Cherchons le plus grand commun diviseur de $\Phi_{n-1}(x)$ et $f(x)$ d'une part, $\Phi_n(x)$ et $f(x)$ d'autre part, en supposant les ϖ_n entiers et $\varpi_{n-1} \geq p$. On a

$$\Phi_{n-1}(x) = Qf(x) + P_1, \qquad \Phi_n(x) = Q'f(x) + P'_1,$$
$$f(x) = Q_1 P_1 + P_2, \qquad f(x) = Q'_1 P'_1 + P'_2,$$
$$P_1 = Q_2 P_2 + P_3, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_{\lambda-1}(x) = Q_\lambda P_\lambda(x) + P_{\lambda+1}(x), \qquad P'_{\lambda'-1}(x) = Q'_{\lambda'}(x) P'_{\lambda'}(x) + P'_{\lambda'+1}(x),$$
$$P_\lambda(x) = Q_{\lambda+1}(x) P_{\lambda+1}(x), \qquad P'_{\lambda'}(x) = Q'_{\lambda'+1}(x) P'_{\lambda'+1}(x).$$

Donnant à x la valeur ω, on aura soit

$$\Phi_{n-1}(\omega) \neq 0, \quad \text{soit} \quad \Phi_n(\omega) \neq 0.$$

Si $\Phi_{n-1}(\omega) \neq 0$, le système précédent d'égalités donne $P_{\lambda+1}(\omega) \neq 0$ et

$$P_{\lambda+1}(\omega) = \psi(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, A_0, A_1, \ldots, A_p, p).$$

ψ ne dépend pas de ω et est une constante, car l'équation $f(x) = 0$ étant irréductible, on ne pourra avoir $P_{\lambda+1}(x) \neq Cf(x)$ (C const.) que si $P_{\lambda+1}(x) =$ const., c. à. d. que si $\Phi_{n-1}(\omega) \neq 0$, et réciproquement.

Si $\Phi_n(\omega) \neq 0$, ce sera $P'_{\lambda'+1}(\omega)$ qui ne dépendra pas de ω.

Finalement on aura

$$\text{soit} \quad P_{\lambda+1} = \psi(c_0, \ldots, c_{n-1}, \ldots, A_p, p),$$
$$\text{soit} \quad P'_{\lambda'+1} = \chi(c_0, \ldots, c_n, \ldots, A_p, p),$$

ψ et χ étant des fonctions parfaitement déterminées pour un mode de croissance donné des $\varpi_1, \ldots, \varpi_n, \ldots$.

On aura alors

$$(37) \qquad \begin{cases} \text{soit} \quad P_{\lambda+1} \geqq \psi_1(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, A), \\ \text{soit} \quad P'_{\lambda'+1} \geqq \chi_1(c_0, c_1, \ldots, c_n, A), \end{cases}$$

ψ_1 et χ_1 pouvant toujours être considérées comme des fonctions non croissantes de A.

Or si c_n est suffisamment petit par rapport à c_{n-1}, $\Phi_{n-1}(\omega)$, quand il n'est pas nul, est aussi petit qu'on veut, par suite aussi $P_1, P_2, \ldots, P_{\lambda+1}$. On est alors conduit pour les valeurs de c_n inférieures à une certaine limite à l'impossibilité de la première des conditions (37). Ne donnant à c_n que ces valeurs, on voit encore que, si c_{n+1} est suffisamment petit, la 2ème des

conditions (37) est également impossible. Prenons alors $A = n$, et déterminons la suite des c_n de façon que toutes les conditions analogues à (37) soient vérifiées, on obtient le théorème en question, car quel que soit l'équation irréductible $f(x) = 0$, il existe toujours une valeur de n à partir de laquelle on peut raisonner comme ci-dessus. . . . . c. q. f. d.

Il est à remarquer que ce raisonnement laisse entièrement arbitraires les 1ers coëfficients $c_0, c_1, \ldots, c_k$, k étant arbitraire, mais donné. Si alors $|c_{k+1}|$ est suffisamment petit, et si les $|c_n|$ décroissent suffisamment vite pour $n \geqq k$, il y a ϖ_k racines de $\Phi(x) = 0$ aussi voisines que l'on veut des ϖ_k racines d'une équation algébrique à coëfficients rationnels absolument quelconques. Les nombres transcendants dont nous établissons ici l'existence peuvent donc être considérés comme ayant pour limite les nombres algébriques.

Enfin nous établirons encore le théorème suivant:

Théorème IV. Si le mode de décroissance des c_n à partir d'un quelconque d'entre eux est suffisamment rapide, l'ensemble des racines des équations $\Phi(x) = 0$ correspondantes renferme un ensemble qui a la puissance du continu et qui ne contient que des nombres transcendants tous distincts des nombres X.

Supposons que $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ aient une racine commune ω, et

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = 0, \qquad \Psi(x) = \sum_0^\infty c'_n x^{\varpi_n} = 0.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur de $\Phi_n(x)$ et $\Psi_n(x)$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi_n(x) &= P\Psi_n(x) + P_1, \\
\Psi_n(x) &= Q_1 P_1 + P_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_{\lambda-1} &= Q_\lambda P_\lambda + P_{\lambda+1}, \\
P_\lambda &= Q_{\lambda+1} P_{\lambda+1}(x).
\end{aligned}$$

Supposons ω de module $< A$. On a

$$\Phi(\omega) = \Phi_n(\omega) + \varphi_n(\omega), \qquad \Psi(\omega) = \Psi_n(\omega) + \psi_n(\omega).$$

On peut toujours prendre c_{n+1} et c'_{n+1} assez petits pour que $|\varphi_n(\omega)|$ et $|\psi_n(\omega)|$ soient aussi petits que l'on veut, plus exactement soient inférieures à ε donné a priori: $|P_{\lambda+1}(\omega)|$ doit alors être $< \varepsilon_1$, ε_1 étant aussi petit qu'on veut.

Deux cas sont à distinguer: Φ_n et Ψ_n ont un diviseur commun ou n'en ont pas. S'ils n'en ont pas, le module de leur résultant $P_{\lambda+1}$ a une limite inférieure L: en prenant $L > \varepsilon_1$ on a une impossibilité. Donc ils en ont un et leur résultant est constamment nul quel que soit n. Par suite:

Si le mode de décroissance des $|c_n|$, dès que $n > k$, est suffisamment rapide, deux des équations $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ ne peuvent avoir une racine commune de module $< A$ (A fini) que s'il en est de même de $\Phi_n = 0$ et $\Psi_n = 0$, dès que $n > k$.

Considérons d'abord les équations

$$(38) \qquad \Phi(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = 0.$$

Prenons

$$c_1 = \frac{a_1}{t_1}, \qquad c_2 = \frac{a_2}{t_2}, \quad \ldots,$$

$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ nombres réels croissants déterminés, avec

$$t_1 = \frac{1}{10}, \qquad t_n \geqq 10^n, \qquad (n > 1), \qquad a_1, a_2, \ldots = \pm 1.$$

Ces équations auront toutes une racine réelle de module compris entre 0 et 1, car $\Phi(0) = 1$, tandis que

$$\Phi(x) - 1 = \pm x(10 + c_2 x + \ldots),$$

et

$$|10 + c_2 x + \ldots| > 10 - \frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^3} - \ldots > 9,$$

en sorte que soit $\Phi(+1)$, soit $\Phi(-1)$ est négatif.

Prenons alors $A = 1$, et considérons 2 équations $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ de la forme (38).

Les équations $1 - 10x = 0$ et $1 + 10x = 0$ n'ont pas de racine commune, contrairement à ce qui doit être, si t_2 est suffisamment grand. Si donc Φ et Ψ ont une racine commune de mod < 1, les 2 valeurs de c_1 sont les mêmes.

Les équations $1 + c_1 x + c_2 x^2 = 0$, où les c_1 ont une même valeur, n'ont pas de racine commune contrairement à ce qui doit être, si t_3 est suffisamment grand, à moins qu'elles ne coïncident. Donc pour Φ et Ψ les valeurs de c_2 sont les mêmes.

Et ainsi de suite.

Nous vérifions finalement que l'ensemble d'équations (38) est un ensemble d'équations telles qu'à chaque équation correspond au moins une racine réelle de mod < 1, ces équations n'ayant 2 à 2 aucune racine réelle de mod < 1 commune.

L'ensemble de ces équations a d'ailleurs la même puissance que l'ensemble des nombres

$$\frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \frac{\alpha_3}{3^3} + \ldots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ peuvent prendre les valeurs 1 et 2 de toutes les manières possibles, c. à. d. a la puissance du continu.[1] Il en est de même alors des racines réelles de mod < 1 de ces équations.

On est, de plus, sûr que cet ensemble est formé exclusivement de nombres transcendants,[2] d'après le théorème III.

La même méthode peut servir pour obtenir un ensemble C formé exclusivement de racines transcendantes voisines des racines d'une équation algébrique donnée quelconque (à coëfficients rationnels)

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k = 0.$$

On considèrera

$$P(x) + c_{k+1} x^{k+1} + c_{k+2} x^{k+2} + \ldots = 0,$$

où

$$c_{k+1} = \pm \frac{1}{t_{k+1}}, \qquad c_{k+2} = \frac{\pm 1}{t_{k+2}}, \quad \ldots,$$

t_{k+1} suffisamment grand, $t_{k+2} \leqq \frac{t_{k+1}}{10}, \ldots$

[1] Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 33.

[2] L'ensemble des nombres $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$ où $a_1, a_2, \ldots$ prennent toutes les valeurs entières $1, 2, \ldots, 9$ contient bien un ensemble de nombres transcendants ayant la puissance du continu, comme l'a montré M. Borel, mais il contient aussi des nombres algébriques.

Si ξ est une racine de $P(x) = 0$, ces équations ont toutes une racine au moins voisine de ξ dès que t_{k+1} est assez grand.[1] Prenons A supérieur au double du module des racines de $P(x)$.

Φ et Ψ n'ont de racine commune de module $< A$ que si Φ_{k+1} et Ψ_{k+1} en ont une; de même si Φ_{k+2} et Ψ_{k+2} en ont une, etc. Si le mode de croissance des t_i est suffisamment rapide, on aura encore une impossibilité.

Le théorème annoncé en résulte a fortiori.

L'ensemble C des nombres X est aussi formé exclusivement de nombres transcendants, comme l'a montré LIOUVILLE.[2] Mais ces nombres sont tous distincts de ceux que nous obtenons ici, comme nous l'avons montré antérieurement.[3]

Bourg-la-Reine, mars 1902.

---

[1] d'après les 2 lemmes du § IV.

[2] Journ. de Math., 1851.

[3] Journ. de Math., 1901, p. 419. En réalité nous obtenons ici aux environs de toute racine ξ d'une équation algébrique à coëfficients rationnels un ensemble de racines transcendantes ayant la puissance du continu.

ESSAIS SUR LE CALCUL DU NOMBRE DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES AUX COEFFICIENTS ENTIERS

PAR

M. LERCH

à FRIBOURG.

Introduction.

1. Le présent mémoire a été composé d'après les notes manuscrites qui m'ont resté en rédigeant mon mémoire du même titre auquel l'Académie des Sciences de Paris avait accordé le grand prix pour 1900;[1] à défaut d'une copie exacte, il en diffère par le style et peut être même en matière tans qu'il s'agit des détails secondaires. Son objet est d'exposer certaines formules qui se rattachent à la théorie des formes quadratiques aux coefficients entiers telles que

$$ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{ou bien} \quad (a\,,\, b\,,\, c).$$

J'appellerai équivalentes deux formes (a, b, c) et (a', b', c') lorsqu'elles sont proprement équivalentes dans le sens de Gauss, c'est à dire, si l'on peut passer de l'une à l'autre en effectuant une substitution linéaire aux coefficients entiers et au déterminant égal à plus un ($x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$; $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$).

Pour des formes équivalentes l'expression $D = b^2 - 4ac$ a la même valeur; on l'appelle le *discriminant.*

[1] Le problème mis en concours a été posé comme suit: *Perfectionner en quelque point important la recherche du nombre des classes de formes quadratiques à coefficients entiers et de deux indéterminées.*

Les discriminants sont alors des nombres entiers, positifs ou négatifs, qui satisfont à l'une ou l'autre de deux congruences

$$D \equiv 1, \qquad D \equiv 0 \pmod 4.$$

Reciproquement, tout entier qui satisfait à une de ces congruences est le discriminant d'une infinité de formes. Nous exclurons cependant le cas où D serait un carré parfait, car dans ce cas la forme quadratique se décompose en produit de deux formes linéaires.

L'ensemble de forme, en nombre infini, équivalentes entre elles, s'appelle une *classe* de formes. Pour un discriminant donné les formes se distribuent en un nombre fini de classes. Ce nombre des classes est une fonction arithmétique du discriminant; son calcul effectif présente des difficultés matérielles qui augmentent avec la grandeur du discriminant; l'objet de nos recherches sera de diminuer ces difficultés pour rendre le calcul réalisable.

Dans la solution de ce problème on peut se borner à certaines restrictions qui n'altèrent pas la généralité du problème.

Le plus grand commun diviseur δ des trois coefficients a, b, c est le même pour toutes les formes d'une classe; les quotients

$$a' = \frac{a}{\delta}, \qquad b' = \frac{b}{\delta}, \qquad c' = \frac{c}{\delta},$$

seront alors les coefficients d'une forme (a', b', c') du discriminant

$$D' = \frac{D}{\delta^2}.$$

Les classes de formes admettant le diviseur δ sont donc ramenées aux classes de formes primitives d'un discriminant moindre $\frac{D}{\delta^2}$.

On appelle *primitives* les formes et les classes correspondantes qui n'ont aucun diviseur plus grand que un.

On peut se borner à la détermination du nombre des classes *primitives* correspondant à un discriminant donné. C'est ce nombre-là que je désignerai désormais par $Cl(D)$, si le discriminant D est positif.

Pour les discriminants négatifs on peut aller plus loin; dans ce cas le signe des coefficients extrêmes a et c reste le même pour toutes les formes

d'une classe. On peut se borner à la détermination du nombre des classes primitives et positives (pour lesquelles les dits coefficients sont positifs), car les classes négatives qui restent sont au nombre égal.

Je désignerai alors par $Cl(-\Delta)$ le nombre des classes primitives et positives du discriminant négatif $-\Delta$.

2. Dans les oeuvres de GAUSS et de DIRICHLET ont été considérées les formes telles que

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

de sorte que le coefficient moyen $2b$ est pair; le nombre $n = b^2 - ac$ s'appelait le *déterminant* de la forme; on était obligé de distinguer entre les formes proprement primitives et les formes improprement primitives; ces dernières ont 2 pour leur plus grand diviseur.

Dans la théorie que nous acceptons qui est plus ancienne et qui a été reprise par KRONECKER les formes proprement primitives du déterminant n ne sont autre chose que les formes primitives du discriminant pair $D = 4n$.

Les formes improprement primitives du déterminant n s'obtiennent en multipliant par deux les formes primitives du discriminant n.

Par ces remarques-là la correspondance des deux théories, classique et moderne, est complètement caractérisée; la différence n'est pas grande, cependant la simplification qui règne dans la théorie moderne et qu'on doit à KRONECKER, mérite l'attention. Il n'y s'agit pas, en réalité, des fait nouveaux, la modification n'a qu'une portée méthodique mais considérable.[1]

Pour la détermination du nombre des classes on a le procédé de réduction dû à LAGRANGE et à GAUSS, puis les formules directes que la science doit à LEJEUNE-DIRICHLET; c'est en nous appuyant sur les découvertes de ce grand géomètre que nous sommes parvenu à des méthodes moins simples en théorie mais plus expéditives dans la pratique.

[1] La théorie de KRONECKER se trouve exposée dans l'excellente oeuvre du savant Père J. de Séguier, S. J.:

Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker. Berlin, Felix L. Dames, 1894.

La connaissance d'une partie de ce livre est indispensable pour le lecteur de ce mémoire.

Sauf ces méthodes on possède des théorèmes d'une rare beauté qui résultent directement des recherches de LEGENDRE et de GAUSS sur la représentation des nombres par la somme de trois carrés et qui ont été mis sous la forme analytique par KRONECKER.[1] Cet illustre savant les a obtenus comme conséquences des équations de la théorie de la multiplication complexe des fonctions elliptiques, tandis qu'une déduction directe et relativement élémentaire des résultats en question est due à HERMITE.[2] Il me semble que cette dernière voie, intimement liée avec une autre création féconde de ce grand géomètre, celle de l'élément simple des fonctions elliptiques de troisième espèce, puisse mener à des connaissances nouvelles, vu la circonstance que la dite transcendante fournit l'évaluation des sommes de GAUSS.

Les théorèmes de KRONECKER ont donné naissance aux nombreuses et importantes recherches de plusieurs géomètres, et toutes ces découvertes rendraient d'excellents services s'il s'agissait de dresser une table de la fonction $Cl(-\Delta)$, mais elles abrègent peu les calculs lorsqu'ils s'agit d'obtenir le nombre des classes pour un déterminant isolé, la réduction allant par grands nombres voisins au déterminant donné de sorte qu'il faudrait reprendre un grand nombre de fois la réduction pour descendre aux petits arguments pour lesquels la fonction est connue. La recherche directe des formes réduites serait en tout cas plus expéditive, et c'est donc, sauf dans leur fécondité, dans le rôle qu'ils vont jouer dans l'arithmétique de l'avenir que repose l'importance des découvertes de KRONECKER et de ses successeurs.

3. Pour faire ressortir clairement la signification des différents symboles dont nous aurons besoins, je vais rappeler succinctement quelques notions et théorèmes connus, en renvoyant pour leur démonstration au livre de M. DE SÉGUIER.

---

[1] *Über quadratische Formen von negativer Determinante.* Monatsberichte der kön. preuss. Akad. der Wissenschaften, 1875.

[2] *Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique* (Journal de Liouville, 1862), puis: *Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques* (Mélanges math. et astron. tirés du Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg; réimpr. Acta, 5).

La signification du symbole de la théorie des résidus quadratiques appelé le signe de LEGENDRE

$$\left(\frac{p}{q}\right)$$

a subit sous les mains de JACOBI et de KRONECKER des modifications dont voici la forme définitive.

m, n étant deux entiers on pose

1°. $\left(\frac{m}{n}\right) = 0$ s'ils ont un diviseurs commun plus grand que l'unité;

2°. Si n est impair et

$$n = p\,p'p'' \ldots$$

sa décomposition en facteurs premiers, on prend

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\left(\frac{m}{p''}\right)\ldots;$$

3°. Si n est pair et alors $n = 2^a n'$, n' étant impair, on prend

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{2^a n'}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)^a \left(\frac{m}{n'}\right);$$

4°. On convient de prendre

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{-n}\right).$$

Dans cette généralité le symbole perd certaines propriétés dont il a joué dans le sens primitif de LEGENDRE et de JACOBI; mais il les retient, si le »numérateur» m est un discriminant.

Je rappelle en particulier que l'on a

1°. Pour un discriminant positif D

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{D}{m'}\right), \quad \text{si} \quad m \equiv \pm m' \pmod{D};$$

par exemple

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{D}{D-m}\right);$$

2° Pour un discriminant négatif $D = -\Delta$

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = \left(\frac{-\Delta}{m'}\right) \operatorname{sgn.}(mm'), \quad \text{si} \quad m \equiv m' \pmod{\Delta};$$

si, par exemple, $0 < m < \Delta$, on aura

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{m-\Delta}\right)$$

ou bien

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\Delta - m}\right).$$

L'équation

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{m}{D}\right), \qquad D \gtrless 0, \qquad m > 0,$$

n'a lieu que pour des discriminants impairs D, m étant quelconque.

Si ensuite D_1 et D_2 sont deux discriminants de signes quelconques mais premiers entre eux, on a

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)\left(\frac{D_2}{D_1}\right) = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn.} D_1}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn.} D_2}{2}},$$

de sorte que ce produit est égal à $+1$, si un au moins des deux discriminants est positif.

Pour tous les discriminants on a la relation

$$\sum_{n=1}^{|D|-1} \left(\frac{D}{n}\right) = 0, \qquad (D \gtrless 0).$$

Cela est évident, si D est négatif; si D est positif, cette relation revient à la suivante

$$\sum_{n=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{n}\right) = 0, \qquad (D > 0).$$

Ensuite, pour D positif,

$$\sum_{n=1}^{D-1} \left(\frac{D}{n}\right) n = 0, \qquad (D > 0);$$

cela résulte de ce qui précède en substituant $n = D - m$; la somme deviendra alors

$$D\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{m}\right) - \sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{m}\right)m;$$

la première partie étant nulle, on aura

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{n}\right)n = -\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{m}\right)m,$$

d'où le résultat annoncé.

D'autres propriétés ont lieu pour les discriminants de nature particulière mais assez généraux pour que le problème concernant le nombre des classes puisse s'y borner. Ce sont les discriminant que KRONECKER appelait *fondamentaux* et dont voici la définition.

Un discriminant est dit fondamental, s'il ne contient aucun carré impair et qu'il contient le facteur carré 4 seulement si cela est indispensable pour conserver sa forme de discriminant. Il n'est donc jamais un multiple de 16.

En représentant par P un nombre positif ou négatif, produit d'un certain nombre de facteurs premiers différents et qui satisfait à la congruence

$$P \equiv 1 \pmod 4,$$

les discriminants fondamentaux D_0 auront l'une des quatre formes suivantes:

$$D_0 = P, \qquad D_0 = -4P, \qquad D_0 = \pm 8P.$$

En convenant de représenter par $\sqrt{D}$ la racine arithmétique (positive) de D, si D est positif, et la quantité $i\sqrt{-D}$, si D est négatif, on a l'équation très importante dont on trouvera la démonstration dans l'ouvrage cité de M. DE SÉGUIER et dans les mémoires de LEBESGUE parus dans le Journal de Liouville (T. 15, 1850):

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{D_0}{h}\right)e^{\frac{2hm\pi i}{\Delta_0}} = \left(\frac{D_0}{m}\right)\sqrt{D_0},$$

(D_0 un discriminant fondamental, $\Delta_0 = |D_0|$, m un entier positif).

En séparant les deux cas $D_0 > 0$ et $D_0 = -\Delta_0 < 0$, on a en particulier

$$\sum_{h=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \cos\frac{2hm\pi}{D_0} = \left(\frac{D_0}{m}\right)\sqrt{D_0},$$

$$\sum_{h=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \sin\frac{2hm\pi}{D_0} = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) \cos\frac{2hm\pi}{\Delta_0} = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) \sin\frac{2hm\pi}{\Delta_0} = \left(\frac{-\Delta_0}{m}\right)\sqrt{\Delta_0}.$$

4. Ces préliminaires rappelés, nous passons à énoncer les résultats classique trouvés par Lejeune-Dirichlet pour évaluer le nombre des classes. En reprenant l'écriture de Kronecker, nous ferons correspondre à chaque discriminant négatif D le nombre τ qui est égal à 6 pour $D = -3$, puis $\tau = 4$ pour $D = -4$ et $\tau = 2$ pour $D < -4$.

Dans le cas de discriminant positif on est obligé d'introduire la *solution fondamentale* de l'équation de Fermat

$$T^2 - DU^2 = 4;$$

c'est le couple des plus petits nombres positifs T, U qui satisfont à cette équation. On pose, pour abréger,[1]

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = E(D),$$

et les résultats de Dirichlet s'écriront comme il suit

$$(1) \qquad Cl(-\Delta) = \tau \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{2n\pi},$$

$$(2) \qquad Cl(D)\log E(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right)\frac{\sqrt{D}}{n}.$$

[1] Cette écriture n'est pas d'ailleurs très bien choisie, le symbole, $E(x)$ ayant déjà une signification généralement acceptée.

Dirichlet lui-même effectua la sommation de ces séries dans le cas des discriminants fondamentaux sous forme finie et, après les modifications nécessaires, ses résultats se résument par les deux équations

$$Cl(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h, \tag{3}$$

$$Cl(D)\log E(D) = -\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\sin\frac{h\pi}{D} \tag{4}$$

(D et $-\Delta$ étant des discriminants fondamentaux).

Théoriquement ces résultats élégants ne laissent rien à désirer, mais il en sera autrement si l'on veut s'en servir dans la pratique où leur emploi devient extrêmement laborieux.

Dirichlet a trouvé lui-même, pour des discriminants négatifs, des formules plus simples, dont la recherche lui a été indispensable puisque il a voulu mettre, dans les signes de Legendre, le discriminant au dénominateur.

Ses résultats, présentés sous la façon de la théorie de Kronecker, s'expriment par les formules suivantes:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = 2\,\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,Cl(-\Delta),\\
&\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) = \frac{1}{2}\,Cl(-4D),\\
&\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) = \frac{1}{2}\,Cl(-8D),\\
&\sum_{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \frac{1}{2}\,Cl(-8\Delta).
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Nous retrouverons ces formules du grand géomètre comme conséquences immédiates de deux relations (équivalentes d'ailleurs) plus générales que voici:

$$
(6)\qquad
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{aD}{\Delta}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-\Delta D), \\[2ex]
\displaystyle\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{a}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{a\Delta}{D}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{2} Cl(-\Delta D),
\end{cases}
$$

où l'on suppose que D et $-\Delta$ soient deux discriminants fondamentaux, le premier positif, le second négatif.

Les exemples des discriminants $-559 = -43.13$ et $1159 = -59.21$ que j'ai traités dans le texte, font voir que l'emploi des formules (6) présente l'avantage sur la recherche directe des formes réduites, tandis que l'emploi de la première des formules (5) devient matériellement impossible.

Mais ce procédé ne fournit une méthode applicable que pour des discriminants composés, contenus, bien entendu, dans certaines limites.

Si Δ est premier, la difficulté subsiste, et il faudra chercher une autre voie. Dans certaines limites la formule suivante qui est également exacte pour tous les discriminants fondamentaux pourra être utile:

$$
(7)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{1 + \left(\frac{-3}{\Delta}\right) - \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\, Cl(-\Delta).
$$

Dans d'autres cas on pourrait recommander l'emploi des approximations analytiques qui se présentent véritablement en foule et dont voici les exemples les plus simples:

$$
(8)\qquad \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 u\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta u}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,
$$

où u signifie une quantité positive arbitraire pour laquelle on prend le mieux l'unité:

$$
(9)\qquad \frac{1}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + 1} + \frac{\sqrt{\Delta}}{u} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{\sin\text{hyp}\, \frac{2m\pi}{u}}
$$

où on prend le mieux $u = \sqrt{2\Delta}$,

$$(10)\quad \frac{\pi}{2\tau} Cl(-\Delta) = \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{mu\pi}{\Delta}} + \frac{1}{4}\sqrt{\Delta} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{1}{\cos\operatorname{hyp} \frac{m\pi}{u}},$$

$$(11)\quad \left(\frac{1}{u} - 1\right) Cl(-\Delta) = \tau \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{2mu\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} - \frac{\tau}{u} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u\sqrt{\Delta}}} - 1};$$

en différentiant et prenant $u = 1$, on en déduit

$$(12)\quad Cl(-\Delta) = -\tau \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} + \frac{4\tau\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{m}{\left(e^{\frac{m\pi}{\sqrt{\Delta}}} - e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{\Delta}}}\right)^2}.$$

L'emploi de ces développements devient autant plus commode, si l'on connait un facteur du nombre cherché $Cl(-\Delta)$. La distribution des classes en genres fait voir que (pour des discriminants fondamentaux) ce nombre sera divisible par $2^{\varpi-1}$, si Δ contient ϖ facteurs premiers différents. Au même but peuvent servir les congruences suivantes qui correspondent aux discriminants formés de deux ou trois facteurs premiers et dont la première est due à M. Hurwitz:

$$(13)\qquad Cl(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{p}{q}\right) \pmod 4,$$

(p et q étant des nombres premiers).

(14) »Si les trois nombres premiers p, q, r sont congrus à moins un pour le module quatre, on aura

$$Cl(-pqr) \equiv 4 \pmod 8,$$

si

$$\left(\frac{pq}{r}\right) = \left(\frac{pr}{q}\right) = \left(\frac{qr}{p}\right),$$

mais

$$Cl(-pqr) \equiv 0 \pmod 8,$$

si cette dernière condition n'est pas remplie.»

(15) »Supposons $p \equiv q \equiv -r \equiv 1 \pmod 4$, alors on a ou

$$\left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) \quad \text{et} \quad Cl(-pqr) \equiv \left(1 - \left(\frac{p}{r}\right)\right)^2 \pmod 8$$

ou bien

$$\left(\frac{p}{r}\right) = -\left(\frac{q}{r}\right) \quad \text{et} \quad Cl(-pqr) \equiv 2\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right) \pmod 8.$$

Pour les discriminants positifs l'emploi de la formule de DIRICHLET est encore plus pénible; KRONECKER a réussi de combler cette difficulté en la ramenant à la recherche des formes réduites d'un discriminant négatif. Pour rappeler le célèbre résultat de l'illustre géomètre je pose[1]

$$H(\omega) = e^{\frac{\omega\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\omega\pi i}),$$

ω étant un quantité à partie imaginaire positive.

Etant donné un discriminant fondamental et positif D, choisissons un discriminant fondamental négatif $-\Delta_1$, premier avec le précédent, de sorte que le produit $-\Delta = -\Delta_1 D$ sera aussi un discriminant fondamental.

Cela étant, déterminons un système complet de représentants[2] des différentes classes positives du discriminant $-\Delta$ que je désignerai par (a, b, c) de sorte que $4ac - b^2 = \Delta$. Pour une forme (a, b, c) les signes de LEGENDRE

$$\left(\frac{-\Delta}{ax^2 + bxy + cy^2}\right)$$

ont une valeur indépendante de x et y pourvu que l'entier $ax^2 + bxy + cy^2$ soit premier avec Δ. En convenant de désigner ce signe invariant par

$$\left(\frac{-\Delta}{a, b, c}\right),$$

[1] D'après M. DEDEKIND on se sert du symbole $\eta(\omega)$; mais la lettre η ayant été employée par WEIERSTRASS dans une signification toute différente, je préfère une écriture nouvelle.

[2] Représentant d'une classe s'appelle une forme quelconque y appartenant.

la formule de KRONECKER s'écrira comme il suit:

$$(16)\qquad \frac{2}{\tau_1} Cl(-\Delta_1)\, Cl(D) \log E(D)$$

$$= \sum_{(a,b,c)} \left(\frac{-\Delta}{a\,,\,b\,,\,c}\right) \log \frac{a}{H^2\left(\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2a}\right) H^2\left(\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}\right)},$$

la lettre τ_1 ayant pour le discriminant négative $-\Delta_1$ la signification habituelle de τ.

Le calcul de la valeur du second membre devient le plus commode, si l'on choisit pour les (a, b, c) les formes réduites. La seule difficulté sérieuse qui pourrait se présenter dans les applications consiste dans la recherche des formes réduites d'un discriminant multiple de D.

Nous avons essayé cependant de tirer de la théorie de DIRICHLET des moyens qui conduisent au même but dans certains cas et que je veux résumer en quelques phrases:

Un résultat anoncé par CAUCHY et qui généralise les recherches antérieures de GAUSS, JACOBI et DIRICHLET, consiste en ce que pour un discriminant fondamental quelconque le polynôme irréductible $F(x)$ du degré $\varphi(|D|)$ qui s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{D}}$, admet la décomposition suivante

$$4F(x) = Y(x)^2 - DZ(x)^2,$$

$Y(x)$ et $Z(x)$ étant deux polynômes aux coefficients entiers des degrés respectifs $\frac{1}{2}\varphi(|D|)$ et $\frac{1}{2}\varphi(|D|) - 1$. En ajoutant la condition que les coefficients des termes les plus élevés soit positifs, les dits polynômes seront complètement définis.

Cela étant, soient D_1 et D_2 deux discriminants fondamentaux du même signe et premiers autre eux, et représentons par $Y_1(x)$ et $Z_1(x)$ les polynômes Y et Z formés pour le discriminant D_1. Posant enfin pour abréger $|D_1| = \Delta_1$, $|D_2| = \Delta_2$, nous avons la relation

$$(17)\qquad Cl(D_1 D_2) \log E(D_1 D_2) = \sum_{h=1}^{\Delta_2-1} \left(\frac{D_2}{h}\right) \log \frac{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}$$

qui, pour des discriminants composés, pourrait simplifier le calcul dans des cas nombreux, si l'on disposait d'une table soigneusement construite des polynômes Y et Z.

En passant sous silence certains détails que nous avons trouvés ou retrouvés sur les fonctions $Y(x)$ et $Z(x)$ et qui se trouvent exposés au chapitre III, le lecteur trouvera dans ce qui suit les formules directes pour le calcul du nombre des classes d'un discriminant positif formamental, à savoir

$$(18) \qquad Cl(D)\log E(D) = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}} \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\int_{n\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^\infty e^{-x^2}dx + \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{n^2\pi}{Du}}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

u signifiant une quantité positive arbitraire, pour laquelle on prend le mieux l'unité; puis

$$(19) \qquad \frac{1}{2}Cl(D)\log E(D) = \sqrt{D}\sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\,\frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{u}}+1} + \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{nu\pi}{D}}}{1-e^{-\frac{nu\pi}{D}}},$$

où on peut prendre $u=\sqrt{2D}$; et enfin

$$(20) \qquad \frac{1}{2}Cl(D)\log E(D) = \frac{\pi}{2}u\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2} - \sum_1^\infty\left(\frac{D}{m}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2mu\pi}{D}}\right)$$

$$-\sqrt{D}\sum_1^\infty\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u}}-1},$$

où il se recommande de prendre $u=\sqrt{D}$. A cause de présence de la somme

$$\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2},$$

laquelle est d'ailleurs égale à l'expression plus simple

$$-\frac{4}{4-\left(\frac{2}{D}\right)}\sum_1^{\left[\frac{D}{2}\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D},$$

cette dernière formule ne peut être employée que pour les valeurs de D assez modérées. Mais les deux autres formules sont assez commodes, puisque le facteur $\log E(D)$ est souvent de même grandeur que $\sqrt{D}$.

Plusieurs de nos résultats ne présentent qu'un intérêt théorique. Telles sont par exemples les équations obtenues au I^r chapitre dont je veux rappeler un

$$Cl(D_1 D_2 \dots D_r)$$

$$= (-1)^\nu \sum_{h_1=1}^{\Delta_1 - 1} \left(\frac{D_1}{h_1}\right) \sum_{h_2=1}^{\Delta_2 - 1} \left(\frac{D_2}{h_2}\right) \dots \sum_{h_r=1}^{\Delta_r - 1} \left(\frac{D_r}{h_r}\right) E\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \dots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$

où $D_1, D_2, \dots, D_r$ sont des discriminants fondamentaux dont $2\nu + 1$ négatifs, puis généralement $\Delta_\alpha = |D_\alpha|$.

Notre mémoire se termine par certains développements semiconvergents. Nous n'y avons pas développé nos recherches analytiques qui intéressent la théorie des modules singuliers et ne s'appliquent pas au problème particulier qui nous occupe. Je me réserve d'y revenir dans une autre occasion et me contente de signaler les résultats suivants, d'un genre différent:

Représentons par $\Re(x)$ le plus petit reste positif de la quantité réelle x et posons pour abréger

$$\sum_{\rho=1}^{m-1} \rho \Re\left(\frac{n\rho}{m}\right) = \Re(m, n).$$

Cela étant, prenons un entier positif arbitraire τ et posons

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^\tau = \frac{t + u\sqrt{D}}{2},$$

en supposant que D soit un discriminant fondamental positif, et T, U la solution fondamentale de l'équation de Fermat.

Concevons maintenant un système complet de représentants (a, b, c) des différentes classes du discriminant D, choisis de la sorte que a soit positif; alors on aura

$$\sum_{(a,b,c)} \left[\frac{1}{a} \Re\left(au, \frac{bu - t}{2}\right) + \frac{t}{12a} - \frac{au^2}{4}\right] = 0.$$

Si en second lieu D est le produit de deux discriminants négatifs fondamentaux $-\Delta_1$ et $-\Delta_2$, auxquels correspondent les nombres τ_1 et τ_2 autrefois représentés par τ, on a

$$\sum_{(a,b,c)} \left(\frac{-\Delta_1}{a\,,\,b\,,\,c}\right)\left[\frac{1}{a}\Re\left(au\,,\,\frac{bu-t}{2}\right)+\frac{t}{12a}-\frac{au^2}{4}\right]=\frac{2\tau u}{\tau_1\tau_2}Cl(-\Delta_1)Cl(-\Delta_2).$$

CHAPITRE I.

1. Le point de départ de notre exposition est l'équation fondamentale de Dirichlet. Soit D un discriminant quelconque, D_0 le discriminant fondamental qui lui corresponde de la sorte que $D = D_0 Q^2$, l'entier Q devant se réduire à l'unité, si le discriminant donné est fondamental.

Notons par $(a\,,\,b\,,\,c)$ les représentants des différentes classes de formes primitives du discriminant D, en convenant de ne considérer que des classes positives dans le cas de discriminant négatif, et supposons que l'on a choisi les formes où $a > 0$.

Posons ensuite $\tau = 1$ pour $D > 0$, $\tau = 6$ pour $D = -3$, $\tau = 4$ pour $D = -4$ et $\tau = 2$ pour $D < -4$.

Cela étant, l'équation de Dirichlet s'écrira comme il suit

$$(1)\qquad \sum_{(a,b,c)}\sum_{m,n}{}^{*}\left(\frac{Q^2}{am^2+bmn+cn^2}\right)F(am^2+bmn+cn^2)$$

$$= \tau\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right)F(hk).$$

Pour $F(z)$ on peut prendre une fonction quelconque qui assure la convergence absolue des deux séries à double entrée; quant au second membre, les conditions sommatoires sont évidentes, et au premier, il faut

mettre pour (a, b, c) successivement tous les représentants rappelés plus haut, et pour une forme (a, b, c) fixée, la sommation relative à m, n varie avec le discriminant.

Si D est négatif, on devra prendre pour m et n tous les entiers positifs, nuls et négatifs à l'exception de la seule combinaison $m = n = 0$, tandis que dans le cas de discriminant positif les conditions sommatoires s'écriront

$$m > gn, \qquad n \geqq 0,$$

en posant pour abréger

$$g = \frac{T - bU}{2aU},$$

où les lettres T et U représentent les plus petits nombres positifs qui satisfont à l'équation de FERMAT

$$T^2 - DU^2 = 4.$$

La fonction $F(z)$ étant entièrement arbitraire, notre équation n'est qu'une pure identité et elle revient à affirmer que, pour un nombre positif l, premier avec le nombre Q, la totalité de solutions des différentes équations indéterminées aux inconnues m et n

$$am^2 + bmn + cn^2 = l, \qquad \begin{pmatrix} m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ m > gn, n \geqq 0 \text{ pour } D > 0 \end{pmatrix}$$

sera donnée par la somme

$$\sum \left(\frac{Q^2}{k}\right)\left(\frac{D}{h}\right)$$

étendue à tous les entiers positifs h, k ayant le produit égal à l.

Ce théorème très intéressant sur le nombre de représentations d'un nombre fixe par les différentes classes du discriminant D a été établi à l'aide des moyens purement arithmétiques par DIRICHLET et par M. H. WEBER (Göttinger Nachrichten, 1893). Si l'on était en connaissance d'une fonction $F(z)$ qui serait nulle pour z suffisamment grand et telle que les sommes

$$\sum_{m,n}{}^{*} \left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right) F(am^2 + bmn + cn^2)$$

aient une valeur commune S, différente de zéro, on aurait dans la formule

$$\frac{\tau}{S} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right)\left(\frac{D}{h}\right) F(hk)$$

une expression sous forme finie et purement arithmétique du nombre des classes du discriminant D.

Or on ne connait aucune fonction de l'espèce anoncée et pour parvenir à la détermination du nombre des classes on est obligé de faire usage des raisonnements analytiques, étrangers à la théorie élémentaire des nombres.

Nous choisirons une quantité positive X et prendrons

$$F(z) = 1 \quad \text{pour} \quad z \leqq X,$$

$$F(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z > X;$$

nous diviserons alors par X les deux membres de la formule (1) et passerons à la limite pour X infini.

Pour une forme (a, b, c) fixe, la somme

$$N(X) = \sum{}^{*} \left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right) F(am^2 + bmn + cn^2)$$

revient à un entier, nombre des combinaisons m, n qui remplissent certaines conditions. La recherche étant plus facile lorsque $Q = 1$, je commence par traiter le cas d'un discriminant fondamental. Dans ce cas la quantité $N(X)$ n'est autre chose que le nombre des points aux coordonnées entières et différents de l'origine qui satisfont à la condition

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leqq X,$$

à laquelle, dans le cas de discriminant positif, s'ajoutent encore les deux suivantes

$$x > gy, \qquad y \geqq 0.$$

Cette représentation géométrique de la question nous permettra d'obtenir facilement la limite du quotien $N(X) : X$ pour X infini.

Pour y parvenir la distinction des deux cas est nécessaire et je commence par l'hypothèse

1° $\qquad D = -\Delta < 0.$

La quantité $N(X)$ sera alors le nombre des points aux coordonnées entières placés dans l'aire de l'ellipse

$$ax^2 + bxy + cy^2 = X.$$

Le quotient $N(X):X$ sera égal à la surface somme de $N(X)$ carrés ayant pour côtés la longueur commune $\frac{1}{\sqrt{X}}$. Construisons les points aux coordonnées

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{X}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{X}},$$

ils se trouvent évidemment dans l'aire de l'ellipse

$$(\alpha) \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = 1$$

et les $N(X)$ carrés en question peuvent être disposés de la sorte que les points (ξ, η) deviennent leur centres. Ils rempliront simplement toute l'aire de l'ellipse dont l'équation est (α), si l'on ne compte pas une région, très mince pour grandes valeurs de X, qui entoure le contour (α), et si l'on néglige le carré ayant pour centre l'origine.

La limite pour X infini du rapport $N(X):X$ sera donc exactement l'aire de l'ellipse donnée par l'équation (α) et sera exprimée par l'intégrale double

$$\iint d\xi d\eta, \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1,$$

que je représente par J.

La condition de limites pouvant s'écrire

$$(2a\xi + b\eta)^2 + \Delta\eta^2 \leqq 4a$$

je pose dans l'intégrale

$$2a\xi + b\eta = \zeta\sqrt{\Delta}, \quad \text{d'où} \quad d\xi = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} d\zeta,$$

ce qui donne

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \iint d\eta d\zeta, \qquad \zeta^2 + \eta^2 \leqq \frac{4a}{\Delta}.$$

L'intégrale étant ainsi ramenée à celle qui exprime l'aire du cercle ayant la quantité $\sqrt{\frac{4a}{\Delta}}$ pour rayon, on conclut

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{4a\pi}{\Delta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$$

ou bien

$$\lim \frac{N(X)}{X} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

en supposant $D = -\Delta$, $Q = 1$.

Soit en second lieu

$$2^\circ \qquad D > 0, \qquad Q = 1.$$

Les coordonnées entières x et y des points que nous devons considérer satisferont alors aux conditions

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leqq X, \qquad x > gy, \qquad y \geqq 0,$$

et si nous posons

$$\frac{x}{\sqrt{X}} = \xi, \qquad \frac{y}{\sqrt{X}} = \eta,$$

les points (ξ, η) se trouveront dans l'aire limitée par l'hyperbole

$$a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = 1$$

et par les deux droites $\eta = 0$, $\xi = g\eta$.

En construisants les carrés du côté égal à $\frac{1}{\sqrt{X}}$ ayant leurs centres aux différents points ξ, η dont nous venons de parler, leur surface totale sera précisément égale à la quantité $N(X):X$. Or les dits carrés remplissent simplement l'aire de la figure dont nous venons de parler, si l'on ne compte pas une bande très mince pour X très grand. Il s'ensuit que la limite pour X infini du quotient $N(X):X$ sera donnée par l'intégrale double

$$J' = \iint d\xi d\eta, \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1, \qquad \xi > g\eta, \qquad \eta > 0.$$

La première des conditions de limites s'écrivant

$$(2a\xi + b\eta)^2 - D\eta^2 \leqq 4a,$$

je pose

$$2a\xi + b\eta = \zeta,$$

ce qui donne, en observant que

$$2ag + b = \frac{T}{U},$$

la formule

$$J' = \frac{1}{2a}\iint d\eta d\xi; \qquad \zeta^2 - D\eta^2 \leqq 4a, \qquad \eta \geqq 0, \qquad \zeta > \frac{T}{U}\eta.$$

Pour un η donné ζ variera de $\frac{T}{U}\eta$ à $\sqrt{4a + D\eta^2}$, et la condition

$$\frac{T}{U}\eta \leqq \sqrt{4a + D\eta^2}$$

donne, si l'on fait usage de l'équation

$$T^2 - DU^2 = 4,$$

la limitation suivante

$$\eta \leqq U\sqrt{a}.$$

Il vient donc

$$J' = \frac{1}{2a}\int_0^{U\sqrt{a}} d\eta\left(\sqrt{4a + D\eta^2} - \frac{T}{U}\eta\right).$$

Faisant

$$\eta = \frac{2x\sqrt{a}}{\sqrt{D}}$$

il vient

$$J' = \frac{2}{\sqrt{D}}\int_0^{\frac{1}{2}U\sqrt{D}} \left(\sqrt{1 + x^2} - \frac{Tx}{U\sqrt{D}}\right)dx$$

et la formule élémentaire

$$\int\sqrt{1 + x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

donne le résultat

$$J' = \frac{1}{\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

d'où la formule cherchée

$$\lim_{X=\infty} \frac{N(X)}{X} = \frac{1}{\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

lorsque $D > 0$, $Q = 1$.

Pour traiter le cas général où D n'est plus fondamental nous aurons besoins de la fonction numérique $\mu(n)$ introduite par MOEBIUS;[1] elle est égale à zéro, si n admet un diviseur carré plus grand que un, mais $\mu(n) = (-1)^{\varpi}$, si n se compose de ϖ facteurs premiers différents; enfin $\mu(1) = 1$. Cette fonction jouit de la propriété qui s'exprime par l'équation

$$\sum_{n:d} \mu(d) = 0,$$

où d parcourt tous les diviseurs du nombre $n > 1$.

Si $n = 1$, la somme se réduit au terme unique dont la valeur est $\mu(1) = 1$.

C'est au moyen de cette propriété qu'on vérifie l'identité suivante qui est très importante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) f(k) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{h=0}^{\infty} f(hd), \tag{2}$$

et dans laquelle d parcourt tous les diviseurs de Q et $f(z)$ signifie une fonction quelconque qui assure la convergence des séries que la formule contient.

Enfin, pour obtenir l'expression de LEGENDRE

$$\left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right)$$

sous une forme plus simple, je suppose les représentants (a, b, c) choisis

[1] Cette notation est maintenant presque généralement adoptée; KRONECKER s'est servi du symbole ε_n au lieu de $\mu(n)$.

de la sorte que les nombres b et c soient divisibles par tous les facteurs premiers du nombre Q et que a soit premier avec Q. Alors on aura

$$\left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right) = \left(\frac{Q^2}{am^2}\right) = \left(\frac{Q^2}{m}\right),$$

et la formule fondamentale de DIRICHLET s'écrira d'une manière plus simple

$$(3) \qquad \sum_{(a,b,c)} \sum_{m,n}{}^{*} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk).$$

La fonction $F(z)$ étant toujours la même, je vais d'abord traiter le cas du discriminant négatif $D = -\Delta$; la somme partielle correspondant à un représentant fixe (a, b, c) sera comme plus haut

$$N(X) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2);$$

en la transformant au moyen de la formule (2) elle devient

$$N(X) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{m,n}{}' F(am^2d^2 + bmdn + cn^2),$$

la somme à double entrée $\sum'$ se rapportant à tous les entiers positifs, nuls et négatifs m, n, à l'exception de la seule combinaison $m = n = 0$, et d parcourant tous les diviseurs du nombre Q.

En posant maintenant pour abréger

$$\sum_{m,n}{}' F(ad^2m^2 + bdmn + cn^2) = N(X;\, ad^2,\, bd,\, c),$$

on a évidemment d'après les résultats obtenus plus haut, la formule

$$\lim_{X=\infty} \frac{N(X;\, ad^2,\, bd,\, c)}{X} = \frac{2\pi}{\sqrt{4acd^2 - b^2d^2}} = \frac{2\pi}{d\sqrt{\Delta}},$$

et par conséquent

$$\lim_{X=\infty} \frac{N(X)}{X} = \sum_{Q:d} \frac{\mu(d)}{d} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

Or, $\varphi(Q)$ désignant la fonction numérique d'EULER et de GAUSS exprimant la totalité des nombres premiers avec Q qui ne surpassent pas Q, on a

$$\sum_{Q:d} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(Q)}{Q}$$

de sorte que

$$\lim_{X=\infty} \frac{N(X)}{X} = \frac{\varphi(Q)}{Q} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

— Δ étant un discriminant négatif général ($\Delta = \Delta_0 Q^2$).

Lorsque le discriminant D est positif, notre quantité $N(X)$ est égale à la série à double entrée

$$N(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m > gn} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2);$$

en lui appliquant la méthode de transformation tirée de la relation (2), nous aurons d'abord

$$N(X) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{n=0}^{r} \sum_{dm > gn} F(ad^2m^2 + bdmn + cn^2).$$

La condition sommatoire $dm > gn$ peut être écrite comme il suit

$$m > \frac{dT - bdU}{2ad^2U} n,$$

et prendra une forme plus simple, si l'on introduit les notations

$$dT = T_1, \qquad U = U_1, \qquad ad^2 = a_1, \qquad bd = b_1, \qquad c = c_1,$$

et enfin

$$D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 = Dd^2.$$

On aura

$$T_1^2 - D_1 U_1^2 = 4d^2,$$

et la condition sommatoire s'écrira

$$m > g_1 n, \quad \text{où} \quad g_1 = \frac{T_1 - b_1 U_1}{2a_1 U_1}.$$

En cherchant la limite pour X infini de la quantité

$$\frac{1}{X} \sum_{n=0}^{r} \sum_{m > g_1 n} F(a_1 m^2 + b_1 mn + c_1 n^2)$$

le raisonnement sera tout semblable à celui que nous avons exposé plus haut et on parvient à obtenir la valeur de la limite en question sous la forme de l'intégrale double

$$J'' = \frac{1}{2a_1}\iint \partial\eta\,\partial\zeta, \qquad \zeta^2 - D_1\eta^2 \leqq 4a_1, \qquad \eta > 0, \qquad \zeta > \frac{T_1}{U_1}\eta.$$ [1]

Elle est évidemment égale à la quantité

$$\frac{1}{2a_1}\int_0^{U\sqrt{a}} \partial\eta \left(\sqrt{4a_1 + D_1\eta^2} - \frac{T_1}{U_1}\eta\right)$$

qui coïncide avec l'expression

$$\frac{1}{d}J' = \frac{1}{d\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{2}.$$

On aura donc la valeur cherchée

$$\lim_{X=\infty}\frac{N(X)}{X} = \sum\frac{\mu(d)}{d}\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{2}$$

ou bien

$$\lim\frac{N(X)}{X} = \frac{\varphi(Q)}{Q}\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

ce qui résout le problème dans le cas de discriminant positif général.

Les formules obtenues plus haut pour les discriminants fondamentaux résultent des formules générales en y prenant $Q = 1$.

Pour résumer, j'emploie pour un moment l'écriture

$$M = \frac{\varphi(Q)}{Q}\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}, \quad \text{lorsque} \quad D = -\Delta = -\Delta_0 Q^2,$$

et

$$M = \frac{\varphi(Q)}{Q}\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{2}, \quad \text{lorsque} \quad D = D_0 Q^2 > 0.$$

Nos résultats obtenus jusqu'ici se résument par la formule

$$\lim_{X=\infty}\left\{\frac{1}{X}\sum_{m,n}{}^{*}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2 + bmn + cn^2)\right\} = M.$$

[1] Pour éviter tout malentendu j'emploie le caractère ∂ au lieu du symbole habituel, pour désigner la différentielle.

En faisant usage de ce resultat dans l'équation qui résulte de la formule de Dirichlet (1ª)

$$\sum_{(a,b,c)} \lim_{X=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \sum_{m,n}{}^{*} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) \right\}$$
$$= \tau \lim_{X=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) \right\},$$

on observe que le premier membre se compose d'autant de fois la quantité M qu'il y a des formes (a, b, c), c'est à dire qu'il y a de classes différentes. On a donc

$$MCl(D) = \tau \lim_{X=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) \right\}.$$

L'évaluation de la limite qui constitue le second membre donnera évidemment une expression du nombre des classes $Cl(D)$ du discriminant D. La limite en question se simplifie d'abord en lui appliquant la formule (2) qui donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{k=1}^{\infty} F(dhk),$$

et puisque pour notre fonction $F(z)$ spéciale

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(dkh) = E\left(\frac{X}{dh}\right),$$

en faisant usage de l'écriture habituelle $E(z)$ pour désigner le plus grand entier contenu dans z, nous aurons

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) E\left(\frac{X}{dh}\right)$$

et notre résultat prend la forme

$$MCl(D) = \tau \lim_{X=\infty} \left\{ \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{X}{dh}\right)}{X} \right\}.$$

Nous verrons bientôt que les limites

$$\lim_{w=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{w}{h}\right)}{w}$$

existent et ont pour valeur la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h};$$

il s'ensuit que l'on a

$$\lim_{X=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{X}{dh}\right)}{X} = \frac{1}{d} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h},$$

et notre résultat devient

$$MCl(D) = \tau \sum_{Q:d} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}.$$

En faisant usage de la formule

$$\sum \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(Q)}{Q}$$

une réduction se présente tout de suite, et on aura la formule

$$M_0 Cl(D) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h},$$

où

$$M_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}, \quad \text{si} \quad D = -\Delta < 0,$$

et

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2}. \quad \text{si} \quad D > 0.$$

En d'autres termes on aura les relations classiques de LEJEUNE-DIRICHLET

$$(3)\qquad Cl(-\Delta) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2h\pi},$$

$$(4)\qquad Cl(D) \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{\sqrt{D}}{h}.$$

2. Cette démonstration des résultats classiques de DIRICHLET qui vient d'être exposée est en principe due à HERMITE [1] qui l'a succinctement publiée dans les Comptes Rendus, t. 55 (1862).

Je vais la compléter en établissant le lemme sur lequel elle s'appuie et sur lequel le grand géomètre n'à pas insisté; il s'agit de la formule

$$\lim_{m=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}.$$

Je l'envisage comme un cas particulier de la limite plus générale, celle de la somme

$$(a)\qquad \sum_{h=1}^{\infty} w_h \frac{E(mv_h)}{m}.$$

On est amené à cette expression par un autre problème tout étranger à l'Arithmétique, en se demandant si l'on parvient à une valeur approchée de la série infinie convergente

$$\sum_{h=1}^{\infty} w_h v_h, \qquad \left(\lim_{h=\infty} v_h = 0\right),$$

en remplaçant les quantités positives v_h par leurs valeurs approchées prises avec un nombre fini k des décimales. En désignant 10^k par m, la valeur approchée de v_h est en effet la fraction

$$\frac{E(mv_h)}{m},$$

et on est amené à l'expression (a).

[1] *Sur la théorie des formes quadratiques.*

La formule qu'on supçonne ainsi

$$\text{(b)} \qquad \lim_{m=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} w_h \frac{E(mv_h)}{m} = \sum_{h=1}^{\infty} w_h v_h$$

peut cependant ne pas être exacte en général, si la convergence de la série infinie n'est pas absolue. En effet, si l'on change l'ordre de termes de la série pour lui attribuer une somme différente, on a tout de suite un exemple voulu, car la limite qui constitue le premier membre est indépendante de l'ordre des termes.

La formule (b) reste cependant exacte pour les séries absolument convergentes comme cela est facile à voir, puis pour certaines classes particulières de séries. Parmi ces dernières je me borne à considérer celle qui s'applique à la question particulière qui nous occupe. Je vais supposer alors que les quantités positives

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_\nu, v_{\nu+1}, \ldots$$

ne vont jamais en croissant et qu'elles tendent verz zéro; enfin que les quantités

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_\nu, w_{\nu+1}, \ldots$$

sont telles que les sommes

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu = s_\nu$$

sont en valeur absolue plus petites qu'une certaine constante g.

Cela étant, l'identité bien connue d'Abel

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 + \ldots + w_n v_n = s_1(v_1 - v_2) + s_2(v_2 - v_3) + \ldots$$
$$+ s_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + s_n v_n$$

fait voir que la série

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu v_\nu$$

est convergente. Je pose ensuite l'expression dont il s'agit d'étudier la limite pour m infini

$$S_m = \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu \frac{E(mv_\nu)}{m},$$

et j'emploie les décompositions suivantes des sommes S et S_m:

$$S = S' + S'', \qquad S_m = S'_m + S''_m,$$

où

$$S' = \sum_{\nu=1}^{n-1} w_\nu v_\nu, \qquad S'' = \sum_{\nu=n}^{\infty} w_\nu v_\nu,$$

$$S'_m = \sum_{\nu=1}^{n-1} w_\nu \frac{E(mv_\nu)}{m}, \qquad S''_m = \sum_{\nu=n}^{\infty} w_\nu \frac{E(mv_\nu)}{m}.$$

L'emploi de l'identité d'Abel permet de mettre les restes S'' et S''_m sous la forme suivante

$$S'' = w_n(v_n - v_{n+1}) + (w_n + w_{n+1})(v_{n+1} - v_{n+2}) \\ + (w_n + w_{n+1} + w_{n+2})(v_{n+2} - v_{n+3}) + \dots,$$

$$S''_m = w_n(v'_n - v'_{n+1}) + (w_n + w_{n+1})(v'_{n+1} - v'_{n+2}) \\ + (w_n + w_{n+1} + w_{n+2})(v'_{n+2} + v'_{n+3}) + \dots,$$

où j'ai posé pour abréger

$$v'_\nu = \frac{E(mv_\nu)}{m}.$$

Les quantités v'_ν également comme les quantités v_ν ne vont jamais en croissant, de sorte que les différences

$$v_{n+\nu} - v_{n+\nu+1} \quad \text{et} \quad v'_{n+\nu} - v_{n+\nu+1}$$

ne sont jamais négatives. Ensuite, les sommes

$$w_n + w_{n+1} + \dots + w_{n+\nu} = s_{n+\nu} - s_{n-1}$$

restant, grâce à l'hypothèse, plus petites en valeur absolue que la quantité constante $2g$, on aura évidemment les inégalités

$$|S''| < 2g\left[(v_n - v_{n+1}) + (v_{n+1} - v_{n+2}) + \dots\right],$$

$$|S''_m| < 2g\left[(v'_n - v'_{n+1}) + (v'_{n+1} - v'_{n+2}) + \dots\right]$$

ou bien

$$|S''| < 2g v_n, \qquad |S''_m| < 2g\frac{E(mv_n)}{m} < 2g v_n.$$

En choisissant n suffisamment grand, les sommes complémentaires S'' et S''_m seront alors aussi petites qu'on le voudra, et d'autre part les sommes S' et S'_m différent autant peu qu'on le veut, si l'on prend pour m une quantité suffisamment grande. Il s'ensuit que l'on a sous les hypothèses anoncées

$$\lim_{m=\infty} S_m = S.$$

Dans les séries de DIRICHLET on a spécialement

$$v_\nu = \frac{1}{\nu}, \qquad w_\nu = \left(\frac{D}{\nu}\right);$$

les conditions du théorème seront vérifiées, si l'on observe que grâce aux relations

$$\sum_{\nu=1}^{|D|} \left(\frac{D}{\nu}\right) = 0, \qquad \left(\frac{D}{\nu + k|D|}\right) = \left(\frac{D}{\nu}\right)$$

les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{D}{\nu}\right) = s_n$$

n'ont que $|D| - 1$ valeurs différentes. L'équation dont il s'agit

$$\lim_{m=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}$$

se trouve alors démontrée.

3. Les formules (3) et (4) qui viennent d'être démontrées ramènent la détermination du nombre des classes à la sommation de la série infinie

$$P(D) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}; \tag{5}$$

pour désigner cette série KRONECKER s'est servi de la lettre $H(D)$, mais puisque nous conservons la lettre H pour désigner la fonction

$$H(\omega) = e^{\frac{\omega\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\omega\pi i})$$

ce qui évite toute confusion entre les formules de WEIERSTRASS et DEDEKIND, il a fallu de changer la notation du grand géomètre. De l'autre côté je crois pouvoir conserver la notation rélative au cas de $D > 0$,

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = E(D) \tag{6}$$

puisque une confusion avec la fonction $E(z)$ de LEGENDRE ne parait pas probable.

KRONECKER est allé un peu plus loin, en acceptant une signification du symbole $E(D)$ aussi dans le cas $D < 0$, ce qui lui a permit de condenser les deux résultats (3) et (4) en une seule équation.

Mais cette simplification est seulement apparente, les deux cas $D > 0$ et $D < 0$ sont de nature tellement différente que toute fusion ne puisse être qu'artificielle et ne pourra se tenir qu'en peu de formules.

Nous devons maintenant nous occuper de la série $P(D)$ et des deux formules de DIRICHLET que je prends sous la forme

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} Cl(-\Delta) = \tau P(-\Delta), \tag{3*}$$

$$\frac{1}{\sqrt{D}} Cl(D) \log E(D) = P(D). \tag{4*}$$

Une première remarque consiste en ce que la série $P(D)$ (en considérant ensemble les deux cas $D > 0$ et $D < 0$) peut se sommer au moyen de la dérivée logarithmique de la fonction gamma.

Posons, pour abréger, $|D| = \Delta$ et considérons la somme finie

$$P_m = \sum_{h=1}^{m\Delta} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h};$$

on aura évidemment $\lim P_m = P(D)$ (pour m infini). En posant $h = \alpha + \Delta\nu$, cette somme devient

$$P_m = \sum_{a=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{a}\right) \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{a + \Delta\nu};$$

cela étant, les identités

$$\sum_{1}^{\Delta} \left(\frac{D}{a}\right) = 0, \qquad \left(\frac{D}{\Delta}\right) = 0$$

permettent d'écrire

$$P_m = \frac{1}{\Delta}\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{a}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{\frac{a}{\Delta}+\nu} - \log m\right),$$

et en faisant usage de la formule élémentaire

$$\lim_{m=\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{x+\nu} - \log m\right) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

le passage à la limite pour m infini nous donne le résultat voulu

$$P(D) = -\frac{1}{\Delta}\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{a}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\Delta}\right)}; \qquad (\Delta = |D|). \tag{7}$$

On en tire, en séparant les deux cas, les équations

$$\frac{2\pi}{\tau}\sqrt{\Delta}\,Cl(-\Delta) = -\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\Delta}\right)}. \tag{7^a}$$

$$\sqrt{D}\,Cl(D)\log E(D) = -\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{a}{D}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{D}\right)}. \tag{7^b}$$

La relation

$$\left(\frac{-\Delta}{\Delta-a}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{a}\right)$$

permet de suite de simplifier (7^a); mettons-y en effet $\Delta - \alpha$ au lieu de α et ajoutons membre à membre avec (7^a); on aura

$$\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{\tau}\,Cl(-\Delta) = \sum_{a=1}^{\Delta-1}\left[\frac{\Gamma'\left(1-\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{a}{\Delta}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\Delta}\right)}\right],$$

et la relation bien connue

$$\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \pi \cot x\pi$$

donne immédiatement

$$(8) \qquad \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \cot \frac{h\pi}{\Delta}$$

ou en réunissant les termes égaux

$$(8^{\circ}) \qquad \frac{2\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \cot \frac{h\pi}{\Delta}.$$

On parvient au même résultat en se servant, pour obtenir la somme (7^{a}), de la formule connue de Gauss

$$(\alpha) \qquad \frac{\Gamma'\left(\frac{h}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right)} = \Gamma'(1) - \log 2\Delta - \frac{\pi}{2} \cot \frac{h\pi}{\Delta} + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \cos \frac{2ah\pi}{\Delta} \log \sin \frac{a\pi}{\Delta};$$

mais cette dernière permet aussi de traiter le cas de discriminant positif; la formule (7^{b}) donnera alors

$$(9) \qquad \sqrt{D}\, Cl(D) \log E(D) = -\sum_{a=1}^{D-1} \log \sin \frac{a\pi}{D} \sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \cos \frac{2ah\pi}{D}.$$

Cette équation beaucoup plus compliquée que la formule (8) se simplifiera, si l'on se borne aux *discriminants fondamentaux*. Pour un tel discriminant a lieu l'équation

$$\sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \cos \frac{2ah\pi}{D} = \left(\frac{D}{a}\right)\sqrt{D}, \qquad (\sqrt{D} > 0),$$

et la formule (9) deviendra

$$(9^{*}) \qquad Cl(D) \log E(D) = -\sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) \log \sin \frac{a\pi}{D},$$

D étant un discriminant positif fondamental.

En réunissant des termes égaux, on peut écrire le second membre comme il suit

$$-2\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{a}\right)\log\sin\frac{a\pi}{D}\,.$$

4. Nous parviendrons à la somme de la série $P(D)$ d'une manière plus élémentaire, de la sorte que la formule (α) de Gauss n'est plus indispensable. Mais nous voulons d'abord ramener la détermination du nombre des classes d'un discriminant général à celle dans le cas d'un discriminant fondamental. On peut ramener d'une manière plus générale la quantité $P(DS^2)$ à la quantité $P(D)$.

Je reprends pour ce but la formule établie plus haut

$$P(DS^2)=\lim_{m=\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{DS^2}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m}\,,$$

et j'emploie l'équation (2), à savoir

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{S^2}{h}\right)f(h)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}f(hd),$$

(d parcourant tous les diviseurs de S).

J'y fais

$$f(h)=\left(\frac{D}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m}\,,$$

et j'aurai d'abord

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{DS^2}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{h}=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{hd}\right)\frac{E\left(\frac{m}{hd}\right)}{m}$$

$$=\sum_{d}\mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\frac{1}{d}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m'}{h}\right)}{m'}\,,\qquad\left(m'=\frac{m}{d}\right),$$

puis en passant à la limite pour m infini,

$$P(DS^2) = \sum_d \mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\frac{1}{d}P(D),$$

d parcourant tous les diviseurs du nombre S.

Cela étant, représentons par s tous les facteurs premiers différents de S, on aura évidemment

$$(10)\qquad \sum_d \mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\frac{1}{d} = \prod_s \left(1 - \left(\frac{D}{s}\right)\frac{1}{s}\right)$$

et puis la formule cherchée

$$(11)\qquad P(DS^2) = P(D)\prod_s \left(1 - \left(\frac{D}{s}\right)\frac{1}{s}\right),$$

où s parcourt les facteurs premiers différents du nombre S. Les formules (3^*) et (4^*) permettent alors de conclure

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta S^2}}Cl(-\Delta S^2) = 2P(-\Delta S^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{DS^2}}Cl(DS^2)\log E(DS^2) = P(DS^2)$$

et par conséquent

$$(12)\qquad \frac{Cl(-\Delta S^2)}{Cl(-\Delta)} = \frac{2}{\tau}S\prod_s \left(1 - \left(\frac{-\Delta}{s}\right)\frac{1}{s}\right),$$

$$(13)\qquad \frac{Cl(DS^2)\log E(DS^2)}{Cl(D)\log E(D)} = S\prod_s \left(1 - \left(\frac{D}{s}\right)\frac{1}{s}\right).$$

Il s'ensuit que la détermination des nombres $Cl(D_0Q^2)$ et $Cl(-\Delta_0Q^2)$ revient à celle des nombres $Cl(D_0)$ et $Cl(-\Delta_0)$ qui correspondent aux discriminants fondamentaux.

Nous allons maintenant considérer la série $P(D)$ correspondante à un discriminant fondamental. Son évaluation s'obtient au moyen des développements suivants

$$(\beta) \qquad \frac{1}{2} - x = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2hx\pi}{h\pi},$$

$$(\gamma) \qquad -\log\sin x\pi = \log 2 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\cos 2hx\pi}{h}$$

qui ont lieu sous la condition $0 < x < 1$ et qui ne sont que des conséquences de la série logarithmique.

Soit $-\Delta$ un discriminant négatif fondamental et posons, dans l'équation (β), $x = \frac{\nu}{\Delta}$, multiplions de part et d'autre par le signe de LEGENDRE $\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$ et ajoutons les résultats pour $\nu = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$. Il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\Delta}\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h\pi} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \sin\frac{2h\nu\pi}{\Delta},$$

ou, si l'on fait usage des relations

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \sin\frac{2h\nu\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sqrt{\Delta}:$$

$$-\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{h\pi} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} P(-\Delta).$$

La dernière quantité étant, suivant (3^*), égale à

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta),$$

on a l'équation connue

$$(14) \qquad Cl(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu.$$

En opérant d'une manière analogue sur l'équation (γ) on trouve l'équation

$$(9^*) \qquad Cl(D)\log E(D) = -\sum_{\nu=1}^{D-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \log\sin\frac{\nu\pi}{D}$$

qui a été obtenue plus haut.

5. De ces résultats de Dirichlet nous allons exposer une généralisation laquelle nous paraît de présenter un certain intérêt théorique.

Dans l'identité analytique

$$-\log(1-z)=\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{n}, \qquad |z|<1,$$

remplaçons z par la quantité

$$ze^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\dots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)},$$

en représentant par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ les valeurs absolues des discriminants fondamentaux de signes quelconques $D_1, D_2, \ldots, D_r$, puis après avoir multiplié les deux membres par le signe

$$\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)$$

ajoutons les résultats qu'on obtient en faisant varier l'indice h_1 de 1 à Δ_1-1, h_2 de 1 à Δ_2-1, et ainsi de suite.

La somme suivante qui est le coefficient de $\frac{z^n}{n}$ au second membre

$$\sum_{h_1}\sum_{h_2}\cdots\sum_{h_r}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)e^{2n\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\dots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)}$$

est évidemment égale au produit des sommes simples

$$\sum_{h_1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)e^{\frac{2nh_1\pi i}{\Delta_1}}\sum_{h_2}\left(\frac{D_2}{h_2}\right)e^{\frac{2nh_2\pi i}{\Delta_2}}\cdots\sum_{h_r}\left(\frac{D_r}{h_r}\right)e^{\frac{2nh_r\pi i}{\Delta_r}},$$

ou bien en faisant usage de la formule connue, au produit des quantités

$$\left(\frac{D_1}{n}\right)\sqrt{D_1}\left(\frac{D_2}{n}\right)\sqrt{D_2}\cdots\left(\frac{D_r}{n}\right)\sqrt{D_r}=\left(\frac{D_1D_2\ldots D_r}{n}\right)\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\cdots\sqrt{D_r};$$

les racines carrées $\sqrt{D_a}$ sont ou bien positives (si $D_a>0$) ou bien imaginaires positives (si $D_a<0$).

On aura donc l'équation suivante qui a lieu sous la condition $|z| < 1$,

$$(15) \qquad \sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_1 D_2 \ldots D_r}{n}\right)\frac{z^n}{n}$$

$$= -\sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1}\sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1}\ldots\sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\log\left(1 - ze^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)}\right).$$

En supposant que le nombre $D = D_1 D_2 \ldots D_r$ n'est pas un carré, il sera alors un discriminant et dans la série qui figure au premier membre

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{z^n}{n}$$

on pourra faire tendre z vers l'unité. Si pour certaines combinaisons de valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_r$ la somme

$$\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}$$

se réduit à un entier, le terme logarithmique correspondant au second membre se réduit à la quantité

$$\pm \log(1 - z).$$

La somme de tous les termes devant rester finie pour $z = 1$, il s'ensuit que ces termes se détruiront deux à deux, de sorte que

dans le second membre de l'équation (15) on peut supprimer toutes les combinaisons $h_1 h_2 \ldots h_r$ lesquelles rendent entière la somme

$$\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}.$$

Cela posé, soit u une quantité réelle positive; nous aurons quelquefois à considérer les deux *restes*

$$u - E(u) = \Re(u), \qquad u - E\left(u + \frac{1}{2}\right) = R(u),$$

dont le premier s'appelle le plus petit reste positif, le second le plus petit reste absolu.

En posant pour un moment

$$\Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right) = x, \qquad (0 < x < 1),$$

on a évidemment

$$e^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)} = e^{2x\pi i},$$

et puisque, grâce à la condition $0 < x < 1$,

$$\log(1 - e^{2x\pi i}) = \log(2 \sin x\pi) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\pi i,$$

on aura

$$\log\left(1 - e^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots\right)}\right)$$

$$= \log\left|2 \sin \pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots\right)\right| + \pi i \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots\right) - \frac{\pi i}{2}.$$

Donc en passant à la limite pour $z = 1$ dans l'équation (15) il vient

$$(\delta) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r}\, P(D) \\ & = -\sum_{(h)}{}' \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right) \log\left|\sin \pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right| \\ & \quad \pi i \sum_{(h)}{}' \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right) \end{aligned} \right.$$

où les conditions sommatoires sont

$$0 < h_1 < \Delta_1\,, \quad 0 < h_2 < \Delta_2\,, \quad \ldots, \quad 0 < h_r < \Delta_r$$

et où l'on convient de suprimer les termes infinis.

Distinguons maintenant les deux cas $D > 0$ et $D < 0$.

Pour D négatif et égal à $-\Delta$ le nombre des termes négatifs dans la suite $D_1, D_2, \ldots, D_r$ sera impair $2\nu + 1$, et il vient

$$\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r} = (-1)^\nu i \sqrt{\Delta}.$$

Si donc, dans l'équation (δ), on compare les parties imaginaires des deux membres, il vient

$$(-1)^\nu \sqrt{\Delta}\, P(-\Delta) = -\pi \sum_{(h)} \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right).$$

Puisque ici $\Delta > 4$, on a $\tau = 2$ et l'équation (3^*) donne

$$P(-\Delta) = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} Cl(-\Delta),$$

et par conséquent, notre résultat devient

$$(-1)^{\nu+1} Cl(-\Delta) = \sum_{(h)} \left(\frac{D_1}{h_1}\right) \cdots \left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right),$$

ou bien

(16) $$Cl(D_1 D_2 \ldots D_r)$$
$$= (-)^{\nu+1} \sum_{h_1=1}^{\Delta_1 - 1} \left(\frac{D_1}{h_1}\right) \sum_{h_2=1}^{\Delta_2 - 1} \left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \sum_{h_r=1}^{\Delta_r - 1} \left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$

($D_1, D_2, \ldots, D_r$ désignant des discriminants fondamentaux dont $2\nu + 1$ sont négatifs, puis $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ leurs valeurs absolues correspondantes).

Supposons en second lieu que D est positif; alors parmi les facteurs $D_1, D_2, \ldots, D_r$ il y en aura un nombre pair 2ν qui soient négatifs, et le produit $\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\cdots\sqrt{D_r}$ sera exactement $(-1)^\nu \sqrt{D}$. En comparant les parties réelles dans l'équation (δ), on aura donc

$$(-1)^\nu \sqrt{D}\, P(D) = -\sum_{(h)}{}' \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots\right)\right|$$

et puisque

$$\sqrt{D}\, P(D) = Cl(D) \log E(D),$$

il vient

(17) $$Cl(D_1 D_2 \ldots D_r) \log E(D_1 D_2 \ldots D_r)$$
$$= (-1)^{\nu+1} \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_r}{}' \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \left(\frac{D_r}{h_r}\right) \log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right|$$

($D_1, D_2, \ldots, D_r$ désignants des discriminants fondamentaux dont 2ν sont négatifs, puis $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ leurs valeurs absolues; les conditions sommatoires étant

$$0 < h_1 < \Delta_1,\quad 0 < h_2 < \Delta_2,\quad \ldots,\quad 0 < h_r < \Delta_r$$

avec supression des termes infinies ou absurdes).

Ces formules généralisent évidemment les résultats (14) et (9^*); en effet, si $r = 1$, $D = -\Delta < -4$, on aura $\Re\left(\frac{h}{\Delta}\right) = \frac{h}{\Delta}$ et l'équation (16) se réduit à (14), puisque $\nu = 0$.

On peut transformer la formule (16) en sorte que la fonction numérique $\Re(x)$ se trouve remplacée par la fonction de Legendre $E(x)$; cette transformation suppose cependant que le nombre r des facteurs D_a surpasse l'unité. On a en effet, par définition,

$$\Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$
$$=\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)-E\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right),$$

et puis, grâce à l'hypothèse de $r>1$,

$$\sum_{(h)}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)=0;$$

la formule (16) devient alors

$$(16^*)\qquad Cl(D_1D_2\ldots D_r)$$
$$=(-1)^\nu\sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1}\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1}\left(\frac{D_r}{h_r}\right)E\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right),$$

en supposant comme plus haut que $2\nu+1$ signifie le nombre des termes négatifs de la suite $D_1, D_2, \ldots, D_r$; $r>1$.

Nous parviendrons plus tard à des formules équivalentes et nous développerons les conséquences qu'on en peut tirer, mais à présent je veux considérer l'équation (17) pour montrer qu'elle permet de simplifier l'équation de Dirichlet (9*) en cas où le discriminant D est un nombre pair.

Si D est un discriminant pair, positif et fondamental, il ne peut avoir que l'une des trois formes suivantes

$$D=4\Delta,\qquad D=8\Delta,\qquad D=8D_1,$$

où $-\Delta$ et D_1 sont des discriminants fondamentaux impairs, le premier négatif, le second positif. Dans le premier cas on a $D_1=-\Delta$, $D_2=-4$, donc $r=2$, $\nu=1$, et la formule (17) devient

$$Cl(4\Delta)\log E(4\Delta)$$
$$=-\sum_{h_1=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h_1}\right)\left\{\log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta}+\frac{1}{4}\right)\right|-\log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta}+\frac{3}{4}\right)\right|\right\}$$

en suprimant toutefois les valeurs de h_1 qui rendraient entier le nombre $\frac{h_1}{\Delta}+\frac{1}{2}$; or de telles valeurs de h_1 ne se présentent pas et l'on a comme la valeur du second membre

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{\sin\pi\left(\frac{h}{\Delta}+\frac{1}{4}\right)}{\sin\pi\left(\frac{h}{\Delta}+\frac{3}{4}\right)}\right|,$$

et en faisant usage de l'identité

$$\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{4}+\xi\right)}{\sin\pi\left(\frac{3}{4}+\xi\right)}=\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{4}+\xi\right)=\frac{1+\operatorname{tg}\xi\pi}{1-\operatorname{tg}\xi\pi}.$$

il vient

$$(18)\qquad Cl(4\Delta)\log E(4\Delta)=\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}{1-\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}\right|.$$

Les termes du second membre coïncident deux à deux et on peut l'écrire aussi

$$2\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}{1-\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}\right|.$$

On trouve en poursuivant la voie analogue les deux autres formules que je me borne à indiquer

$$(19)\qquad Cl(8\Delta)\log E(8\Delta)=\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{\Delta}\right)}{\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{h}{\Delta}\right)}\right|.$$

$$(20)\qquad Cl(8D)\log E(8D)=-\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\left|\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{D}\right)\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{h}{D}\right)\right|.$$

6. La formule (14), à savoir

$$\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta) = -\frac{1}{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu,$$

peut être transformée en expressions plus simples qui se prètent mieux aux applications. Je suppose en premier lieu Δ impair $2n+1$; la somme

$$S = \sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu$$

qui figure au second membre de la dite formule peut se décomposer comme il suit

$$S = \sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{n+\nu}\right)(n+\nu).$$

Or, Δ étant impair, on a

$$\left(\frac{-\Delta}{n+\nu}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\frac{-\Delta}{2n+2\nu}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\frac{-\Delta}{2\nu-1}\right),$$

et en faisant $2\nu - 1 = \lambda$, il vient

$$S = \sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\Delta+\lambda}{2}. \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1)$$

La première partie du second membre peut s'écrire

$$\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)\frac{2\nu}{2},$$

et on aura en décomposant la seconde partie en deux sommes

$$S = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{1}{2}\left\{\sum\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)2\nu + \sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda\right\} + \left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right).$$

Or l'expression entre parenthèses $\{\,\}$ n'est autre chose que la somme

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h = S,$$

et on a la relation

$$\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)S = \Delta\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right).$$

d'où en remplaçant S par sa valeur

$$-\frac{2\Delta}{\tau}Cl(-\Delta),$$

la formule suivante

$$(21)\qquad \sum_\lambda \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\left(\frac{2}{\Delta}\right) - 2\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta),$$

($-\Delta$ étant un discriminant fondamental impair, et λ parcourant les valeurs $1, 3, 5, \ldots, \Delta - 2$).

Cette formule subsiste aussi pour Δ pair, mais alors les deux membres sont nuls.

En restant dans l'hypothèse de Δ impair, on peut faire usage de la formule

$$\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\Delta-\lambda}\right),$$

et les différences $\Delta - \lambda = 2\nu$ ayant les valeurs $2, 4, 6, \ldots, \Delta - 1$, il vient

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = -\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_1^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$$

et la formule (21) devient la suivante

$$(22)\qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta).$$

Nous allons voir qu'elle subsiste aussi pour Δ pair. Dans ce cas on a toujours $\Delta = 4n$ et la somme désignée plus haut par S est ici évidemment

$$S = \sum_\lambda \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda; \qquad {\scriptstyle (\lambda = 1, 3, 5, \ldots, 4n-1)}$$

en remplaçant les nombres $\lambda > 2n$ par l'expression $2n + \lambda$ il vient d'abord

$$S = \sum_\lambda \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda + \sum_\lambda \left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right)(2n+\lambda), \qquad {\scriptstyle (\lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)}$$

Or on a comme cela est aisé de voir

$$\left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)$$

et il reste, après réduction,

$$S = -2n \sum_{\lambda} \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right), \qquad (\lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$$

ce que l'on peut écrire, en introduisant de termes nuls,

$$S = -2n \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right).$$

En remplaçant par S sa valeur $-\Delta \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)$, il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = 2\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta);$$

mais c'est précisément l'équation (22) pour Δ pair, puisque dans ce cas $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0$.

L'équation (22) est donc générale, et si l'on observe que la formule (12) donne pour $S = 2$

$$Cl(-4\Delta) = \frac{2}{\tau}\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) Cl(-\Delta),$$

on a l'équation équivalente

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = Cl(-4\Delta). \tag{22*}$$

C'est donc le nombre des classes de formes positives et primitives

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

qui appartiennent au *déterminant* $-\Delta = b^2 - ac$.

On parvient à une forme différente si, dans la somme S, on transforme les termes où $\nu > \frac{1}{2}\Delta$ en y faisant $\nu = \Delta - \mu$; il vient alors

$$S = \sum_{\nu} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \sum \left(\frac{-\Delta}{\Delta-\mu}\right)(\Delta-\mu), \qquad \left(\begin{matrix}\mu < \frac{\Delta}{2} \\ \nu < \frac{\Delta}{2}\end{matrix}\right),$$

ou bien

$$S = 2\sum_{\nu=1}^{\left[\frac12 \Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu - \Delta\sum_{\nu=1}^{\left[\frac12 \Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right).$$

En substituant la valeur de S et de la somme (22), il vient

$$(23)\qquad \sum_{\nu=1}^{\left[\frac12 \Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta} = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,Cl(-\Delta).$$

La somme au premier membre sera donc égale à zéro, si Δ est de la forme $8k-1$.

Pour obtenir la somme

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda, \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots, \Delta-2)$$

en cas du Δ impair, je pose $\lambda = \Delta - 2\mu$; elle devient

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\Delta-2\mu}\right)(\Delta-2\mu) = -\Delta\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\mu=1}^{\left[\frac12 \Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) + 2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\mu=1}^{\left[\frac12 \Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right)\mu,$$

ou en faisant usage des formules (22) et (23),

$$(24)\qquad \sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{\Delta} = -\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta)$$

($-\Delta$ étant un discriminant fondamental impair et la sommation s'étendant aux valeurs de $\lambda = 1, 3, 5, \ldots, \Delta-2$).

Pour Δ pair le premier membre n'est autre chose que

$$\frac{1}{\Delta}S = -\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta).$$

Reprenons la formule (22) pour Δ *impair* plus grand que 3,

$$\tau\sum_{\nu=1}^{\frac12(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta).$$

En repartissant les valeurs de ν en paires 2μ et impaires λ, et posant dans les termes correspondants à ces dernières $\lambda = \Delta - 2\rho$, on aura

$$0 < \mu < \frac{1}{4}\Delta, \qquad \frac{1}{4}\Delta < \rho < \frac{1}{2}\Delta$$

et la somme s devient

$$s = \sum \left(\frac{-\Delta}{2\mu}\right) - \sum \left(\frac{-\Delta}{2\rho}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left[\sum \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) - \sum \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\right].$$

Il s'ensuit

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) - \sum \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right) s$$

et on a évidemment

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) + \sum \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = s,$$

d'où

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} s,$$

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = \frac{1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} s.$$

En substituant la valeur de s il vient

$$\sum_{\mu=1}^{[\frac{1}{4}\Delta]} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \frac{\left(1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)}{2} Cl(-\Delta),$$

$$\sum_{\rho=[\frac{1}{4}\Delta]+1}^{[\frac{1}{2}\Delta]} \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = \frac{\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)}{2} Cl(-\Delta).$$

d'où en distingant les deux cas $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = \pm 1$, on tire aisément

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) &= \frac{1+\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} Cl(-\Delta), \\ \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) &= 3\,\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} Cl(-\Delta). \end{aligned} \right.$$

Une de ces deux quantités est nulle, l'autre est différente de zéro, et le calcul se ramène à déterminer $\left[\frac{1}{4}\Delta\right]$ signes de Legendre.

Nous terminons par la détermination de la somme

$$T = \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \nu^2.$$

En y remplaçant ν par $\Delta - \nu$, on aura

$$T = -\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) (\Delta - \nu)^2 = -\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) [\Delta^2 - 2\Delta\nu + \nu^2]$$

ou bien

$$T = 2\Delta \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \nu - T,$$

d'où il vient

$$T = \Delta \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \nu$$

ou bien

$$(26)\qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \nu^2 = -\frac{2\Delta^2}{\pi} Cl(-\Delta).$$

Il peut avoir quelque intérêt de connaître les sommes

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) h, \qquad \sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log\sin\frac{h\pi}{D}$$

aussi dans les cas où les discriminants $-\Delta$ et D ne sont plus fondamentaux. Ces sommes se déterminent aisément au moyen de l'identité (2)

$$(\alpha) \qquad \sum_1^{\infty} \left(\frac{Q^2}{h}\right) f(h) = \sum_d \mu(d) \sum_{h=1}^{\infty} f(dh),$$

d parcourant les diviseurs de Q.

Soit en effet $\Delta = \Delta_0 Q^2$, où $-\Delta_0$ est un discriminant fondamental; en faisant, dans la formule (α),

$$f(h) = \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) h \quad \text{pour} \quad h \leq \Delta, \quad \text{et} \quad f(h) = 0 \quad \text{pour} \quad h > \Delta,$$

elle devient

$$\sum_1^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta_0 Q^2}{h}\right) h = \sum_d \mu(d) \sum_{h=1}^{\frac{\Delta}{d}} \left(\frac{-\Delta_0}{hd}\right) hd,$$

ou bien

$$(\beta) \qquad \sum_1^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) h = \sum \mu(d) \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right) d \sum_{h=1}^{\Delta_0 \frac{Q^2}{d}} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) h.$$

Cela étant, l'expression

$$A = \sum_{h=1}^{\Delta_0 m} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) h$$

se détermine en faisant $h = \rho + \Delta_0 \nu$ ($\rho = 1, 2, \ldots, \Delta_0$, $\nu = 0, 1, \ldots, m-1$); on aura

$$A = \sum_{\rho=1}^{\Delta_0 - 1} \left(\frac{-\Delta_0}{\rho}\right) \sum_{\nu=0}^{m-1} (\rho + \Delta_0 \nu) = m \sum_1^{\Delta_0 - 1} \left(\frac{-\Delta_0}{\rho}\right) \rho;$$

or, $-\Delta_0$ étant un discriminant fondamental, on peut appliquer la formule (14) qui donne

$$A = -m \Delta_0 \frac{2}{\tau_0} Cl(-\Delta_0)$$

ou bien

$$(27) \qquad \sum_{h=1}^{\Delta_0 m} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) h = -m \Delta_0 \frac{2}{\tau_0} Cl(-\Delta_0).$$

L'expression qui figure au second membre de l'équation (β)

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0 \frac{Q^2}{d}} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) h$$

aura donc pour valeur

$$-\frac{Q^2}{d}\Delta_0 \frac{2}{\tau_0} Cl(-\Delta_0)$$

et il vient

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) h = -Q^2 \Delta_0 \frac{2}{\tau_0} Cl(-\Delta_0) \sum_d \mu(d) \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right).$$

La somme étendue aux diviseurs d du nombre Q

$$\sum_d \mu(d) \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)$$

n'est autre chose que le produit

$$\prod_q \left(1 - \left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\right)$$

étendu aux facteurs premiers différents du nombre Q. On aura par conséquent le résultat voulu

$$(28) \qquad -\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta} = \frac{2}{\tau_0} Cl(-\Delta_0) \prod_q \left(1 - \left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\right),$$

($\Delta = \Delta_0 Q^2$, $-\Delta_0$ étant un discriminant fondamental et q parcourant les facteurs premiers différents de Q).

Considérons maintenant la seconde somme, celle qui correspond au discriminant positif $D = D_0 Q^2$, où D_0 est un discriminant fondamental. En faisant, dans la formule (α),

$$f(h) = \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D_0 Q^2} \quad \text{pour} \quad 0 < h < D_0 Q^2,$$

puis $f(h) = 0$ pour $h \geq D_0 Q^2$, nous aurons

$$\sum_{1}^{D_0 Q^2 - 1} \left(\frac{D_0 Q^2}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D_0 Q^2} = \sum_d \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right) \cdot \sum_{h=1}^{D_0 \frac{Q^2}{d} - 1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \sin \frac{dh\pi}{D_0 Q^2}.$$

Pour évaluer la somme

$$B = \sum_{1}^{mD_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{mD_0}$$

on pose $h = \rho + D_0 \nu$ $(\rho = 1, 2, \ldots, D_0;\ \nu = 0, 1, \ldots, m-1)$, et il vient

$$B = \sum_{\rho=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{\rho}\right) \sum_{\nu=0}^{m-1} \log \sin \pi\left(\frac{\rho}{mD_0} + \frac{\nu}{m}\right);$$

la sommation relative à ν s'effectuera au moyen de l'identité

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \log \left| 2 \sin \pi\left(x + \frac{\alpha}{m}\right)\right| = \log |2 \sin mx\pi|$$

qui donne

$$B = \sum_{\rho=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{\rho}\right) \log \sin \frac{\rho\pi}{D_0}$$

ou bien

$$\sum_{1}^{mD_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \left|\sin \frac{h\pi}{mD_0}\right| = -Cl(D_0) \log E(D_0).$$

Au moyen de cette formule le résultat obtenu plus haut devient

$$\sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D} = -Cl(D_0) \log E(D_0) \sum_{d} \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right)$$

ou bien

$$(29) \qquad -\sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D} = Cl(D_0) \log E(D_0) \prod_{q} \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\right)$$

$(D = D_0 Q^2,$ D_0 étant un discriminant fondamental et q parcourant les facteurs premiers différents de $Q)$.

CHAPITRE II.

1. Les considérations suivantes basent sur la relation bien connue

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\nu^2\omega\pi i+2\nu u\pi i} = \sqrt{\frac{i}{\omega}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\nu)^2}$$

que j'écrirai encore une fois en prenant $\omega = ix$, $x > 0$:

$$(1) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 x\pi+2\nu u\pi i} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{x}(u+\nu)^2}.$$

Cela posé, soit D un discriminant fondamental positif; dans l'équation (1) je pose $u = \frac{h}{D}$ et après avoir multiplié les deux membres par le signe de LEGENDRE $\left(\frac{D}{h}\right)$ j'ajoute les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$. On reçoit de la sorte au premier membre l'expression

$$\sqrt{D} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\nu^2 x\pi},$$

et pour simplifier le résultat qui se présente au second membre, il faudra introduire un nouvel indice sommatoire $n = h + D\nu$; on obtient ainsi l'équation

$$\sqrt{D} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\nu^2 x\pi} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{D^2 x}}.$$

Elle prendra une forme plus élégante en remplaçant x par $\frac{x}{D}$ et en réunissant des termes égaux, à savoir

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}}.$$

Si au contraire on opère d'une manière analogue pour un discriminant fondamental négatif, on n'obtient aucun résultat, les deux membres de

l'équation obtenue étant nuls. Mais en prenant la dérivée des deux membres de l'identité (1) par rapport à u, on parvient à l'équation

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu e^{-\nu^2 x\pi} \sin 2\nu u\pi = \frac{1}{x\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (u+\nu) e^{-\frac{\pi}{x}(u+\nu)^2}.$$

En prenant, pour un discriminant fondamental négatif $-\Delta$, $u = \frac{h}{\Delta}$ et en ajoutant, après avoir multipliées les deux membres par le signe de LEGENDRE $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$, il vient

$$2\sqrt{\Delta} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \nu e^{-\nu^2 x\pi} = \frac{1}{x\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{n \,.\, \mathrm{sgn}\, n}{\Delta} e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta^2 x}},$$

ou bien, si l'on change x en $\frac{x}{\Delta}$ et simplifiant,

$$\text{(3)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) n e^{-\frac{n^2 x\pi}{\Delta}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) n e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}}.$$

Occupons-nous d'abord de cette dernière équation. Elle fait voir que la fonction suivante

$$F = \int_z^{\infty} dx \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) n e^{-\frac{n^2 x\pi}{\Delta}} + \int_0^{z} \frac{dx}{x\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) n e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}}$$

ne dépende pas de la variable z supposée positive. Pour z infiniment petit la seconde intégrale disparaît et il ne reste que la première, à savoir

$$\frac{\Delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 z\pi}{\Delta}}$$

qui, pour $z = 0$, se réduit à la quantité

$$F = \sqrt{\Delta}\, \frac{2}{\tau}\, Cl(-\Delta).$$

La constante F étant ainsi déterminée, nous aurons la relation suivante où z est une quantité positive quelconque:

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 z\pi}{\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) n \int_0^z e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

L'intégrale se simplifie en faisant $x = \frac{n^2\pi}{\Delta x_1^2}$ et on aura ce résultat définitif

$$(4) \qquad \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta}}}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Cette formule fournirait un moyen des plus expéditifs pour le nombre des classes des grands discriminants négatifs, si les tables de valeurs de l'intégrale

$$\int_u^{\infty} e^{-x^2} dx$$

étaient plus complètes, c'est à dire calculées pour les valeurs de l'argument à petite différence; cette difficulté externe, et provisoire peut-être, diminue l'utilité de la formule (4), les nombreuses interpolations dans le calcul étant bien fatigantes.

La formule fournira l'approximation la plus commode en prenant $z = 1$; on aura à peine besoins d'un nombre de termes égal à $\sqrt{\Delta}$, puisqu'il s'agit d'un nombre entier dont on connait d'ailleurs assez souvent certains diviseurs, si Δ est un nombre composé.

Passons maintenant à la formule (2); elle fait voir que la quantité

$$G = \int_z^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} + \int_0^z \frac{dx}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}}$$

est indépendante de la quantité z supposée positive; on obtient sa valeur en passant à la limite pour $z = 0$ ce qui donne

$$G = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\sqrt{D}}{n} = Cl(D) \log E(D).$$

En employant cette valeur de G et les formules faciles à obtenir

$$\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} = \frac{2\sqrt{D}}{n\sqrt{\pi}} \int_{n\sqrt{\frac{\pi z}{D}}}^\infty e^{-x^2} dx,$$

$$\int_0^z \frac{dx}{x} e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}} = \int_{\frac{n^2\pi}{Dz}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x},$$

on aura le développement à convergeance rapide

$$(5) \qquad Cl(D)\log E(D) = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}} \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{z\pi}{D}}}^\infty e^{-x^2} dx + \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{n^2\pi}{Dz}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Le nombre de termes qu'il faut calculer est encore plus petit que dans le cas précédent, à cause de la présence du facteur $\log E(D)$ au premier membre, dont la valeur paraît, d'après l'expérience, être comparable à $\sqrt{D}$. La valeur de z qu'on peut recommander est $z = 1$.

Ecrivons maintenant, pour abréger et d'une manière provisoire,

$$Cl(D)\log E(D) = A, \qquad \frac{n^2\pi}{D} = c, \qquad \left(\frac{D}{n}\right) = \varepsilon;$$

l'équation (5) s'écrira alors

$$A = \sum \varepsilon \int_1^\infty e^{-cxz} \sqrt{z} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \sum \varepsilon \int_1^\infty e^{-\frac{cx}{z}} \frac{dx}{x}.$$

Soit maintenant u une constante positive, multiplions les deux membres par $e^{-uz}\frac{dz}{\sqrt{z}}$ et intégrons de $z = 0$ à $z = \infty$; on aura

$$A\sqrt{\frac{\pi}{u}} = \sum \varepsilon \int_1^\infty \frac{1}{cx+u} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \sum \varepsilon \int_1^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{cx}{z} - uz} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

L'intégrale double se simplifie en faisant usage de la formule de CAUCHY

$$\int_0^\infty e^{-\frac{cx}{z}-uz}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{-2\sqrt{cux}},$$

et on aura

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}\int_0^\infty e^{-\frac{cx}{z}-uz}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\sqrt{\frac{\pi}{u}}\int_1^\infty e^{-2\sqrt{cux}}\frac{dx}{x};$$

en changeant x en x^2 la dernière quantité prend la forme

$$2\sqrt{\frac{\pi}{u}}\int_1^\infty e^{-2\sqrt{cu}\,x}\frac{dx}{x},$$

et notre formule devient

$$A\sqrt{\frac{\pi}{u}}=2\sqrt{\frac{\pi}{u}}\sum\varepsilon\int_1^\infty e^{-2x\sqrt{cu}}\frac{dx}{x}+\sum\varepsilon\int_1^\infty\frac{1}{cx+u}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

L'intégrale qui figure en seconde série s'exprime sous forme finie en posant $cx=ut^2$ ce qui donne

$$\int_1^\infty\frac{1}{cx+u}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{cu}}\int_{\sqrt{\frac{c}{u}}}^\infty\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{cu}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u}{c}};$$

notre équation sera ainsi

$$\frac{1}{2}A=\sum\frac{\varepsilon}{\sqrt{c\pi}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u}{c}}+\sum\varepsilon\int_1^\infty e^{-2x\sqrt{cu}}\frac{dx}{x}$$

ou bien en modifiant l'intégrale et substituant les valeurs de c, ε, A et posant pour plus d'élégance $\frac{Du}{\pi}=w^2$,

$$(6)\qquad \frac{1}{2}Cl(D)\log E(D)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\sqrt{D}}{n\pi}\operatorname{arctg}\frac{w}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{2nw\pi}{D}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x},$$

w étant une quantité positive quelconque.

L'avantage de cette formule n'est pas trop grand, la convergeance de la première série étant trop lente. Il s'ensuit que lorsque w surpasse une certaine limite, la quantité

$$\frac{2\sqrt{D}}{\pi \log E(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{w}{n}$$

a sa partie entière constante qui est égale à $Cl(D) - 1$.

2. Une source de relations arithmétiques consiste dans la représentation analytique de certaines fonctions arithmétiques. En particulier la fonction $E(x)$ de LEGENDRE a été représentée à l'aide d'une série trigonométrique par SCHAAR [1] et STERN; [2] ce dernier en a tiré plusieures conséquences arithmétiques. RIEMANN et dans son comentaire M. DEDEKIND [3] ont rencontré cette fonction, avec d'autres analogues, dans un domaine analytique important; les applications les plus intéressantes ont cependant été publiées par M. ALEXANDER BERGER. [4]

Au lieu de la fonction $E(x)$ nous introduisons la fonction $E^*(x)$, égale à $E(x)$ pour x fractionnaire, mais égale à $E(x) - \frac{1}{2}$ pour x entier; sous cette convention, la formule suivante aura lieu pour tous les x positifs

$$E^*(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}. \tag{7}$$

Elle aura lieu aussi pour x négatif, si l'on a soin de choisir sa définition de la sorte que

$$E^*(x) + E^*(-x) = -1.$$

Une autre fonction est

$$R(x) = x - E\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

[1] Mémoires des sav. étr. publiés par l'académie des Sciences de Belgique, T. 23.

[2] Journal de Crelle, T. 59.

[3] Riemann's Werke: *Fragmente aus d. Th. der ellipt. Modulfunctionen.*

[4] Nova Acta reg. Soc. sc. Upsaliensis, 1886.

qui s'appelle le plus petit reste absolu de x; elle satisfait aux conditions

$$-\frac{1}{2} \leqq R(x) < \frac{1}{2};$$

la différence $x - R(x)$ est le nombre entier le plus approchée de x.

J'introduirai au lieu de $R(x)$ la fonction modifiée

$$R^*(x) = x - E^*\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

qui ne diffère de $R(x)$ que lorsque x est un multiple impair de $\frac{1}{2}$. Evidemment, on a quel que soit x l'équation

$$(8) \qquad R^*(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

Le plus petit reste positif de x est l'expression

$$\mathfrak{R}(x) = x - E(x)$$

et il lui correspond la fonction modifiée

$$\mathfrak{R}^*(x) = x - E^*(x)$$

dont la développement résulte immédiatement de (7).

Nous désignerons suivant l'usage, par sgn. $R^*(x)$ le signe de $R^*(x)$, c'est à dire la quantité $+1$, 0, -1 selon que $R^*(x)$ est positif, nul ou négatif; cette fonction est développable pour toutes les valeurs de x en série suivante

$$(9) \qquad \operatorname{sgn.} R^*(x) = 4 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin (4\nu + 2)x\pi}{(2\nu + 1)\pi}.$$

Notons aussi la formule concernant la valeur absolue de $R(x)$,

$$(10) \qquad |R(x)| = \frac{1}{4} - 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos (4\nu + 2)x\pi}{(2\nu + 1)^2\pi^2}.$$

Cela étant, soit D un discriminant positif fondamental et m un entier positif; dans les formules qui précèdent nous changerons x en $x + \frac{mh}{D}$,

puis nous multiplierons par le signe de Legendre $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajouterons les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$. En faisant usage de la formule

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2\nu h\pi}{D} = \left(\frac{D}{\nu}\right)\sqrt{D}$$

nous parviendrons de cette manière aux équations suivantes:

$$(11)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)E^{*}\left(x+\frac{mh}{D}\right) = \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(12)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)R^{*}\left(x+\frac{mh}{D}\right) = -\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(13)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\mathrm{sgn.}\,R^{*}\left(x+\frac{mh}{D}\right) = 4\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{\sin 2\lambda x\pi}{\lambda\pi},$$

$$(14)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\left|R\left(x+\frac{mh}{D}\right)\right| = -2\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{\cos 2\lambda x\pi}{\lambda^{2}\pi^{2}},$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots).$$

En opérant de la même manière au moyen d'un discriminant fondamental négatif, les résultats seront semblables, seulement dans la première formule la quantité

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{mh}{\Delta}$$

ne sera plus nulle, mais aura pour valeur

$$-\frac{2m}{\tau}Cl(-\Delta);$$

nous aurons ainsi les équations:

$$(15)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)E^{*}\left(x+\frac{mh}{\Delta}\right)$$

$$= -\frac{2m}{\tau}Cl(-\Delta) + \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

$$(16) \qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)R^{*}\left(x+\frac{mh}{\Delta}\right)$$

$$=-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

$$(17) \quad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn.} R^{*}\left(x+\frac{mh}{\Delta}\right)=4\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\cos 2\lambda x\pi}{\lambda\pi},$$

$$(18) \quad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(x+\frac{mh}{\Delta}\right)\right|=2\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\sin 2\lambda x\pi}{\lambda^{2}\pi^{2}},$$

$$(\lambda=1\,,\,3\,,\,5\,,\,7\,,\,9\,,\,\ldots).$$

Ce système d'équations se distingue du précédent qui appartient aux discriminants positifs par ce que les séries aux seconds membres des trois premières équations ne s'annulent plus en prenant $x=0$; on obtient au contraire les séries

$$\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi}, \qquad \sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi}, \qquad \sqrt{\Delta}\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda\pi}.$$

La première est

$$\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta),$$

la troisième peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-4\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi}$$

et a pour valeur

$$\frac{1}{2}Cl(-4\Delta);$$

quant à la seconde, j'observe qu'on peut l'écrire, en séparant les valeurs impaires λ de ν des valeurs paires 2ν, comme il suit

$$\sqrt{\Delta}\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda\pi}-\sqrt{\Delta}\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{2\nu\pi}$$

ce qui est évidemment égal à

$$\frac{1}{2}Cl(-4\Delta) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{2}{\pi}Cl(-\Delta).$$

En substituant la valeur

$$Cl(-4\Delta) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\pi}Cl(-\Delta),$$

la dernière expression devient

$$\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\pi}Cl(-\Delta);$$

c'est donc la valeur de la série

$$\sqrt{\Delta}\sum_1^\infty (-1)^{\nu-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi},$$

Si donc on pose dans les équations (16) et (17) $x = 0$, $m = 1$, on aura d'abord

$$\sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right) = \left(1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\pi}Cl(-\Delta),$$

$$\sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right) = 2Cl(-4\Delta);$$

dans ces sommes je conserve la première moitié de termes, et dans la seconde je pose $h = \Delta - k$; on aura alors

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right)R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right) = \left(\frac{-\Delta}{k}\right)R^*\left(\frac{k}{\Delta}\right),$$

et de même pour la seconde somme; puisque enfin pour $h < \frac{1}{2}\Delta$ on a $R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right) = \frac{h}{\Delta}$, $\operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right) = 1$, il vient

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}=\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,Cl(-\Delta),$$

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)=Cl(-4\Delta),$$

résultats que nous avons vérifiés plus haut.

Les formules (11) et (15) sont les plus importantes.

Je m'arrêterai encore aux formules (14) et (18). En faisant $x=0$, $m=1$ dans la première, on trouve

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}=-\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda^2\pi^2}$$

ce qu'on peut écrire

$$(19)\qquad \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}=-\left(1-\left(\frac{2}{D}\right)\frac{1}{4}\right)\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}.$$

La série qui figure au second membre est une de celles qui s'expriment sous forme finie au moyen des polynômes de Bernoulli; pour le vérifier rapidement, je me rappelle l'équation qui a lieu pour $0\leqq x\leqq 1$

$$(20)\qquad x^2-x+\frac{1}{6}=\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu^2\pi^2};$$

en y faisant $x=\frac{h}{D}$, multipliant par $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajoutant, on obtient

$$(21)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2}=\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}$$

d'où en comparant avec (19) on tire cette relation remarquable

$$(22)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2=-\frac{4D}{4-\left(\frac{2}{D}\right)}\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)h.$$

Passons maintenant à (18); en y faisant $x = \frac{1}{4}$, $m = 1$, et en observant que

$$\sin\frac{\lambda\pi}{2} = \left(\frac{-4}{\lambda}\right), \qquad \left(\frac{-4}{\lambda}\right)\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = \left(\frac{4\Delta}{\lambda}\right)$$

nous aurons

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right| = \sqrt{4\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{4\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}.$$

Si Δ est impair, 4Δ sera un discriminant positif fondamental et on pourra appliquer l'équation (21) pour $D = 4\Delta$; il vient

$$\sqrt{4\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{4\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2} = \sum_{1}^{4\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)\frac{h^2}{(4\Delta)^2},$$

d'où il suit (pour Δ impair)

$$\sum_{h=1}^{4\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)h^2 = 16\Delta^2\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|, \tag{23}$$

et si l'on fait usage de (22)

$$\sum_{h=1}^{2\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)h = -4\Delta\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|. \tag{23^a}$$

Or, la somme qui figure au second membre

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|$$

est évidemment

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right) + \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{h}{\Delta}\right) + \sum_{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{3}{4}\right)$$

ce qui peut s'écrire, en réunissant des termes égaux,

$$2\sum^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta} - 2\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}.$$

Donc

$$(24)\qquad -\frac{1}{8}\sum_{1}^{2\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)h = \sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h - \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h,$$

$-\Delta$ étant un discriminant négatif fondamental impair.

3. Reprenons les équations (11) et (15) dans le cas de $m = 1$:

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E^{*}\left(x+\frac{a}{D}\right) = \sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)E^{*}\left(x+\frac{a}{\Delta}\right) = -\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) + \sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

où D et $-\Delta$ sont des discriminants fondamentaux. Ces développements deviennent plus importants, si l'on parvient à simplifier les premiers membres; c'est ce que donnent les formules suivantes

$$\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E\left(x+\frac{a}{D}\right) = \sum_{a=1}^{[Dx]}\left(\frac{D}{a}\right),$$

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)E\left(x+\frac{a}{\Delta}\right) = \sum_{1}^{[\Delta x]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right),$$

dans lesquelles x est une quantité positive et desquelles il est aisé de passer à la fonction $E^{*}(x)$.

Quant à la démonstration de ces relations, je me borne à établir la première en l'écrivant comme il suit

$$\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E\left(\frac{k+a}{D}\right) = \sum_{a=1}^{k}\left(\frac{D}{a}\right),$$

où il suffit de supposer k entier; car si k était fractionnaire, on recevrait une équation entièrement équivalente en remplaçant k par sa partie entière.

Je suppose d'abord $0 < k < D$, et je pose, pour abréger,

$$S_k = \sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E\left(\frac{k+a}{D}\right).$$

la différence

$$S_k - S_{k-1} = \sum_{\alpha=1}^{D-1} \left(\frac{D}{\alpha}\right) \left[E\left(\frac{k+\alpha}{D}\right) - E\left(\frac{k+\alpha-1}{D}\right) \right]$$

se compose de termes qui sont nuls, excepté le cas où $\frac{k+\alpha}{D}$ est un entier, ce qui ne se présente que pour $\alpha = D - k$; donc

$$S_k - S_{k-1} = \left(\frac{D}{D-k}\right) = \left(\frac{D}{k}\right);$$

en observant que

$$S_0 = 0,$$

on en déduit l'équation annoncée

$$S_k = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{D}{\nu}\right)$$

qui par là se trouve démontrée.

Cela posé, observons que la quantité

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right) E^*\left(x + \frac{\alpha}{D}\right)$$

coïncide avec l'expression

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right) E\left(x + \frac{\alpha}{D}\right),$$

excepté le cas où $x + \frac{\alpha}{D}$ est un entier; cela ne se présente que lorsque Dx est un entier qui satisfait à la congruence

$$Dx \equiv -\alpha \pmod{D};$$

la différence entre les deux expressions sera alors égale à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D}{\alpha}\right)$$

et on pourra l'écrire

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{Dx}\right).$$

Pour pouvoir nous servir de ce symbole dans tous les cas, convenons de représenter par le symbole

$$\left(\frac{D}{z}\right)$$

le zéro, si z est fractionnaire, en lui conservant sa signification habituelle pour z entier. On aura ainsi la formule suivante

$$\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E^*\left(x+\frac{a}{D}\right)=\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)E\left(x+\frac{a}{D}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{Dx}\right),$$

et on trouverait par le même raisonnement

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)E^*\left(x+\frac{a}{\Delta}\right)=\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)E\left(x+\frac{a}{\Delta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta}{\Delta x}\right).$$

Nous aurons donc les formules suivantes

$$\text{(I)}\qquad \sum_{a=1}^{[Dx]}\left(\frac{D}{a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{Dx}\right)=\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$\text{(II)}\qquad \sum_{a=1}^{[\Delta x]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta}{\Delta x}\right)=\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta)-\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

Elles sont démontrées sous l'hypothèse de $0<x<1$, mais elles ont lieu pour $x=1$ et aussi pour chaque $x>1$ puisque la somme p. ex.

$$\sum_{a=1}^{Dm+n}\left(\frac{D}{a}\right)$$

est identique avec

$$\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{D}{a}\right).$$

Il faut aussi remarquer que les considérations précédentes exigent de prendre p. ex.

$$\sum_{1}^{[Dx]}\left(\frac{D}{a}\right)$$

égale à zéro dans le cas de $[Dx]=0$, où le symbole perd de sens.

Je poserai maintenant d'une manière générale, pour un discriminant fondamental positif ou négatif D, et pour $x \geqq 0$,

$$\text{(III)} \qquad S(x\,,D) = \sum_{a}^{[\Delta x]} \left(\frac{D}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{D}{\Delta x}\right),$$

Δ désignant la valeur absolue de D. La fonction $S(x\,,D)$ sera alors identique avec les séries (I), resp. (II).

Comme première application de ces formules je vais calculer l'intégrale

$$\int_0^1 S^2(x\,, -\Delta)\,dx = J$$

d'abord au moyen de la formule (II), puis directement pour en conclure une relation arithmétique intéressante. On a évidemment

$$J = \left(\frac{2}{\pi}\,Cl(-\Delta)\right)^2 + \frac{\Delta}{\pi^2}\int_0^1 \left(\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}\right)^2 dx$$

ou en effectuant les intégrations

$$J = \left(\frac{2}{\pi}\,Cl(-\Delta)\right)^2 + \frac{\Delta}{2\pi^2}\sum_1^\infty \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2}.$$

Or on a

$$\sum_1^\infty \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2} = \prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right)\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2},$$

d parcourant les facteurs premiers différents du nombre Δ; en faisant usage de la valeur

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

on a donc

$$J = \left(\frac{2}{\pi}\,Cl(-\Delta)\right)^2 + \frac{\Delta}{12}\prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right).$$

De l'autre côté, la fonction $S(x, -\Delta)$ est discontinue aux points $x = 0, \frac{1}{\Delta}, \frac{2}{\Delta}, \frac{3}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta - 1}{\Delta}, 1$, en restant constante dans les intervalles qu'ils limitent; on a en particulier

$$S\left(\frac{\nu}{\Delta} - 0\right) = \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right), \qquad S\left(\frac{\nu}{\Delta} + 0\right) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right).$$

Donc, dans l'intervalle

$$\frac{\nu}{\Delta} < x < \frac{\nu + 1}{\Delta}$$

la fonction $S(x, -\Delta)$ étant égale à la quantité

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = s_\nu,$$

on peut décomposer l'intégrale comme il suit

$$J = \sum_{\nu=0}^{\Delta-1} \int_{\frac{\nu}{\Delta}}^{\frac{\nu+1}{\Delta}} S^2(x, -\Delta)dx$$

et il vient

$$J = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \frac{1}{\Delta} s_\nu^2.$$

En comparant les deux valeurs de J qu'on vient d'obtenir, on a la relation voulue

$$(25) \qquad \frac{4}{\pi^2} Cl(-\Delta)^2 = \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\right)^2 - \frac{\Delta}{12} \prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right),$$

($-\Delta$ étant un discriminant fondamental négatif et d parcourant les facteurs premiers différents de Δ).

En opérant d'une manière analogue sur la fonction

$$S(x, D), \qquad (D > 0),$$

on trouve

$$(26) \qquad \sum_{\nu=1}^{D-1} \left(\sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\frac{D}{\alpha}\right)\right)^2 = \frac{D^2}{12} \prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right).$$

Au moyen des développements (I) et (II) on vérifie aisément les formules suivantes, dans les quelles m signifie un entier positif arbitraire

$$(27)\qquad \sum_{a=0}^{m-1} S\left(\frac{x+a}{m}, D\right) = \left(\frac{D}{m}\right) S(x, D), \qquad (D > 0),$$

$$(28)\qquad \sum_{a=0}^{m-1} S\left(\frac{x+a}{m}, -\Delta\right)$$

$$= \left(m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right)\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \left(\frac{-\Delta}{m}\right) S(x, -\Delta).$$

puis la relation suivante qui a lieu pour $0 < x < 1$

$$(29)\qquad S(x) = -S(1-x)\,\mathrm{sgn.}\,D \qquad (D > 0 \quad \text{ou} \quad D < 0).$$

Occupons-nous spécialement de la formule (28) en faisant usage en même temps de la relation (29) qui pour $D = -\Delta$ devient

$$S(x) = S(1-x).$$

En prenant $m = 2$, $x = 0$, la formule (28) reproduit l'équation bien connue

$$\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) - S\left(\frac{1}{2}, -\Delta\right).$$

Pour $m = 3$, $x = 0$ il vient de (28)

$$(30)\qquad S\left(\frac{1}{3}, -\Delta\right) = S\left(\frac{2}{3}, -\Delta\right) = \frac{3 - \left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau} Cl(-\Delta);$$

en supposant $\Delta > 3$ pour qu'on ait $\left(\frac{-\Delta}{\frac{1}{3}\Delta}\right) = 0$, on peut écrire

$$(30^*)\qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{3 - \left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau} Cl(-\Delta), \qquad (\Delta > 3).$$

En faisant $m = 4$, $x = 0$, l'équation (28) devient

$$S\left(\frac{1}{4}\right) + S\left(\frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4 - \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\, 2\,Cl(-\Delta);$$

or

$$S\left(\frac{3}{4}\right) = S\left(\frac{1}{4}\right), \qquad S\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}\, Cl(-\Delta),$$

et par conséquent

$$(31) \qquad S\left(\frac{1}{4}, -\Delta\right) = \frac{2 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\, Cl(-\Delta)$$

et si l'on suppose $\Delta > 4$,

$$(31^*) \qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{2 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) - \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\, Cl(-\Delta).$$

On parvient aussi à un résultat simple, si l'on fait $m = 6$, $x = 0$; en effet cela donne

$$S\left(\frac{1}{6}\right) + S\left(\frac{1}{3}\right) + S\left(\frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{2}{3}\right) + S\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{6 - \left(\frac{-\Delta}{6}\right)}{\tau}\, 2\,Cl(-\Delta).$$

En faisant usage des valeurs connues des quantités $S\left(\frac{1}{2}\right)$ et $S\left(\frac{1}{3}\right) = S\left(\frac{2}{3}\right)$, puis observant que $S\left(\frac{5}{6}\right) = S\left(\frac{1}{6}\right)$, nous aurons

$$(32) \qquad S\left(\frac{1}{6}, -\Delta\right) = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{-\Delta}{3}\right) - \left(\frac{-\Delta}{6}\right)}{\tau}\, Cl(-\Delta)$$

ou bien

$$(32^*) \qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{6}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{-\Delta}{3}\right) - \left(\frac{-\Delta}{6}\right)}{\tau}\, Cl(-\Delta).$$

Faisant $m = 2$, $\frac{1}{2} x = \frac{1}{12}$, il vient

$$S\left(\frac{1}{12}\right) + S\left(\frac{7}{12}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \left(\frac{2}{\Delta}\right) S\left(\frac{1}{6}\right)$$

et en substituant la valeur précédente,

$$(33) \qquad S\left(\frac{1}{12}, -\Delta\right) + S\left(\frac{5}{12}, -\Delta\right)$$

$$= \frac{4 - \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right) + \left(\frac{-\Delta}{6}\right) - \left(\frac{-\Delta}{12}\right)}{\tau} Cl(-\Delta).$$

On trouve d'une manière analogue

$$(34) \qquad S\left(\frac{1}{8}, -\Delta\right) + S\left(\frac{3}{8}, -\Delta\right) = \frac{4 - \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau} Cl(-\Delta).$$

$$(35) \qquad S\left(\frac{1}{10}, -\Delta\right) + S\left(\frac{2}{5}, -\Delta\right)$$

$$= \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \left(\frac{2}{\Delta}\right) S\left(\frac{1}{5}, -\Delta\right).$$

De l'autre côté, l'hypothèse $x = 0$, $m = 5$ donne

$$(36) \qquad S\left(\frac{1}{5}, -\Delta\right) + S\left(\frac{2}{5}, -\Delta\right) = \frac{5 - \left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{\tau} Cl(-\Delta).$$

Si donc $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = -1$, c'est à dire pour $\Delta = 8k + 3$, on déduit de ces deux dernières équations

$$(37) \qquad S\left(\frac{1}{10}, -10\right) = \frac{1 + \left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{2} Cl(-\Delta), \qquad (\Delta \equiv 3 \pmod 8).$$

Mais beaucoup d'autres applications sont possibles des formules fondametales (I) et (II)

$$\text{(a)} \qquad S(x, D) = \sqrt{D} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$\text{(b)} \qquad S(x, -\Delta) = \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) - \sqrt{\Delta} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

Prenons, par exemple, dans la première équation $x+\frac{\alpha m}{\Delta}$ au lieu de x, multiplions de part et d'autre par $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$ et ajoutons pour $\alpha = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$; $-\Delta$ signifie, bien entendu, un discriminant négatif fondamental et m un entier positif arbitraire. On aura

$$\sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)S\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}, D\right)=\sqrt{D}\sum_1^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\cos 2\nu\pi\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right).$$

Le second membre étant évidemment égale à la série

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{D\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-D\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

on pourra l'écrire, d'après (b), sous la forme

$$-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)S(x, -\Delta D)+\left(\frac{-\Delta}{m}\right)Cl(-\Delta D),$$

et nous aurons, par conséquent, la formule suivante

$$(38)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)S\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}, D\right) = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)Cl(-\Delta D)-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)S(x, -\Delta D),$$

et on trouve d'une manière analogue

$$(39)\qquad \sum_{\alpha=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\alpha}\right)S\left(x+\frac{\alpha m}{D}, \quad \Delta\right)=-\left(\frac{D}{m}\right)Cl(-\Delta D)+\left(\frac{D}{m}\right)S(x, -\Delta D).$$

Ces formules ont lieu, si le produit $-\Delta D$ est un discriminant fondamental, de sorte que les entiers Δ et D sont premiers entre eux. Mais il est important de remarquer que ces relations subsisteront aussi dans le cas général où $-\Delta D$ n'est plus fondamental, si l'on convient de définir la fonction $S(x)$ comme la somme de la série (a) ou (b); dans ce cas la signification primitive de la fonction $S(x, -\Delta D)$ comme la somme (III), à savoir

$$\sum_1^{\Delta D x}\left(\frac{-\Delta D}{\alpha}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta D}{\Delta D x}\right),$$

est la seule chose qui va changer.

En particulier la formule $S(0, -\Delta D) = 0$ subsistera et les équations (38) et (39) donnent les relations suivantes

$$(38^\circ) \qquad \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(\frac{am}{\Delta}, D\right) = \left(\frac{-\Delta}{m}\right) Cl(-\Delta D),$$

$$(39^\circ) \qquad \sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) S\left(\frac{am}{D}, -\Delta\right) = -\left(\frac{D}{m}\right) Cl(-\Delta D),$$

qui ont lieu pour des discriminants fondamentaux quelconques $D > 0$, $-\Delta < 0$.

Soit maintenant D' un discriminant positif fondamental, premier avec D, on vérifie aisément l'équation

$$(40) \qquad \sum_{a=1}^{|D'|-1} \left(\frac{D'}{a}\right) S\left(x + \frac{am}{|D'|}, D\right) = \left(\frac{D'}{m}\right) S(x, DD')$$

qui, sous la forme écrite, subsiste aussi lorsque D et D' signifient deux discriminants fondamentaux négatifs, premiers entre eux; la lettre m signifie un entier positif arbitraire.

Dans les formules (38°) et (39°) supposons $m = 1$ et observons que grâce aux relations

$$S(1 - x, -\Delta) = S(x, -\Delta), \qquad S(1 - x, D) = -S(x, D)$$

les termes sont égaux deux à deux; nous aurons au premier membre de la première évidemment

$$2 \sum_{1}^{\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(\frac{a}{\Delta}, D\right).$$

Observons ensuite que les symboles

$$\left(\frac{D}{\frac{aD}{\Delta}}\right), \quad \left(\frac{-\Delta}{\frac{a\Delta}{D}}\right)$$

disparaîtront de la formule; en effet, si par exemple $\frac{aD}{\Delta} = k$ est un entier celui-ci ne pourra être premier avec D que lorsque Δ est un multiple

de D; si c'est le cas, on devra avoir $\alpha = k\frac{\Delta}{D}$, le nombre α aura un facteur commun avec Δ et il s'ensuit

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = 0;$$

alors, les termes correspondants ne se présentent pas dans l'équation.

On pourra donc mettre nos résultats (38°) et (39°) sous la forme

$$\text{(A)} \qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{aD}{\Delta}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\, Cl(-\Delta D),$$

$$\text{(B)} \qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{a}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{a\Delta}{D}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{2}\, Cl(-\Delta D).$$

Dans ces deux relations sont condensées plusieurs formules spéciales, dont quelquesunes proviennent de DIRICHLET.

Occupons-nous d'abord de la formule (B). En y prenant $D = 5$, il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{2}\, Cl(-5\Delta),$$

ou bien, en réduisant,

$$(41) \qquad \sum_{\nu=\left[\frac{1}{5}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\, Cl(-5\Delta).$$

L'hypothèse de $D = 8$ fournit la formule connue de DIRICHLET

$$(42) \qquad \sum_{\nu=\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\, Cl(-8\Delta),$$

et aussi en faisant $D = 12$ on parvient à une formule remarquable

$$(43) \qquad \sum_{\nu=\left[\frac{1}{12}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{5}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\, Cl(-12\Delta).$$

On peut combiner cette équation avec l'autre

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta),\qquad \Delta>4;$$

en retranchant, il vient en effet

$$\frac{1}{2}Cl(-12\Delta)=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta)-\sum_{1}^{\left[\frac{1}{12}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{5\Delta}{12}\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

où les deux sommes ne contiennent que peu de termes. Pour calculer p. ex. $Cl(-12.19)$ on observe que $Cl(-19)=1$, $\left(\frac{2}{\Delta}\right)=-1$, et il vient

$$\frac{1}{2}Cl(-12.19)=3-\left\{\left(\frac{-\Delta}{1}\right)+\left(\frac{-\Delta}{8}\right)+\left(\frac{-\Delta}{9}\right)\right\}=3-(1-1+1)$$
$$=2,$$

donc

$$Cl(-228)=4.$$

Revenons sur la formule (A). En faisant $\Delta=3$, elle donne

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{3}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-3D), \tag{44}$$

puis l'hypothèse de $\Delta=4$ donne la formule connue de Dirichlet

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-4D), \tag{45}$$

on a ensuite

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{7}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{2}{7}D\right]+1}^{\left[\frac{3}{7}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-7D); \tag{46}$$

si enfin on fait $\Delta = 8$, on a d'abord

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) + \sum_{1}^{\left[\frac{3}{8}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-8D),$$

et si l'on retranche l'expression

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = 0,$$

il vient

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-8D), \tag{47}$$

équation également due à DIRICHLET.

Les résultats (A) et (B) qui au fond sont identiques puisqu'on peut passer de l'un à l'autre par le changement de l'ordre de l'addition, contiennent beaucoup d'autres cas particuliers mais qui se compliquent autant que les discriminants augmentent; je noterai encore le cas de $D = 24$ qui donne d'abord

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + \sum_{1}^{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{1}^{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{1}^{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} Cl(-24\Delta)$$

ou bien, en réduisant,

$$\sum_{\left[\frac{1}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + 2 \sum_{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + \sum_{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-24\Delta).$$

Si l'on connaît déjà $Cl(-\Delta)$, on pourra employer les identités

$$\sum_{1}^{\left[\frac{5}{24}\lrcorner\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\lrcorner\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{5}{24}\lrcorner\right]+1}^{\left[\frac{1}{4}\lrcorner\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

$$\sum_{1}^{\left[\frac{7}{24}\lrcorner\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{3}\lrcorner\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{7}{24}\lrcorner\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}\lrcorner\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

$$\sum_{1}^{\left[\frac{11}{24}\lrcorner\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\lrcorner\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{11}{24}\lrcorner\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\lrcorner\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right);$$

les sommes qui figurent en seconde place des deuxièmes membres contiennent chacune au surplus $\frac{1}{12}\Delta$ termes, celles qui occupent la première place sont respectivement [voir (30^*) et (31^*)], en supposant $\Delta > 4$,

$$\frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}Cl(-\Delta),\qquad \frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{2}Cl(-\Delta),$$

$$\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta).$$

On aura donc

$$\frac{1}{2}Cl(-24\Delta)=\frac{5-3\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{2}Cl(-\Delta)$$

$$s\left(1\ldots\frac{1}{24}\right)+s\left(\frac{5}{24}\ldots\frac{1}{4}\right)\quad s\left(\frac{7}{24}\ldots\frac{1}{3}\right)-s\left(\frac{11}{24}\ldots\frac{1}{2}\right)$$

en posant pour abréger

$$\sum_{a\lrcorner\le\nu\le b\lrcorner}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=s(a\ldots b).$$

On ramène donc la détermination de $Cl(-24\Delta)$ à celle de $Cl(-\Delta)$ et au calcul de $\frac{1}{6}\Delta$ signes de Legendre.

Pour établir les formules précédentes, c'est l'élégance qui nous a aidé; mais les formules (A) et (B) peuvent être utiles mêmes dans des cas plus compliqués, si le discriminant donné est le produit de deux facteurs pas trop différents. Prenons par exemple le discriminant $-559 = (-43) \cdot 13$. J'emploie alors la formule (B) en y prenant $D = 13$, $\Delta = 43$; en écrivant simplement $(x \ldots y)$ pour représenter la somme

$$\sum_{x \leq \nu \leq y} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

on trouve immédiatement, en décomposant et réunissant d'une manière convenable,

$$\frac{1}{2} Cl(-13\Delta) = \left(\frac{\Delta}{13} \ldots \frac{2\Delta}{13}\right) + \left(\frac{3\Delta}{13} \ldots \frac{4\Delta}{13}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{4\Delta}{13} \ldots \frac{5\Delta}{13}\right) + \left(\frac{5\Delta}{13} \ldots \frac{6\Delta}{13}\right);$$

dans notre cas $\Delta = 43$ on a

$$\left(\frac{\Delta}{13} \ldots \frac{2\Delta}{13}\right) = (4 \ldots 6) = 1 - 1 + 1 = 1,$$
$$\left(\frac{3\Delta}{13} \ldots \frac{4\Delta}{13}\right) = (10 \ldots 13) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2,$$
$$\left(\frac{4\Delta}{13} \ldots \frac{5\Delta}{13}\right) = (14 \ldots 16) = 1 + 1 + 1 = 3,$$
$$\left(\frac{5\Delta}{13} \ldots \frac{6\Delta}{13}\right) = (17 \ldots 19) = 1 - 1 - 1 = -1.$$

Il s'ensuit

$$\frac{1}{2} Cl(-559) = 1 + 2 + 2 \cdot 3 - 1 = 8$$

ou bien $Cl(-559) = 16$.

Nous étions obligé de calculer treize symboles de Legendre $\left(\frac{-43}{\nu}\right)$; si nous voudrions faire la recherche directe de formes réduites, nous devrions chercher les décompositions des nombres

$$\frac{559 + \lambda^2}{4} \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots, 13$$

à savoir 140, 142, 146, 152, 160, 170, 182, en facteurs ac tels que $\lambda \leq a \leq c$. On aurait obtenu les formes réduites suivantes

$$(1, 1, 140), (2, \pm 1, 70), (4, \pm 1, 35), (5, \pm 1, 28), (7, \pm 1, 20),$$
$$(10, \pm 1, 14), (8, \pm 7, 19), (10, \pm 9, 16), (13, 13, 14).$$

On voit que la détermination des formes réduites est plus laborieuse.

Prenons comme second exemple $D = 21$, $\Delta = 59$; en faisant usage de (B), on a d'abord d'une manière générale

$$-\frac{1}{2} Cl(-21\Delta) = \left(1 \ldots \frac{\Delta}{21}\right) - \left(1 \ldots \frac{2\Delta}{21}\right) + \left(1 \ldots \frac{4\Delta}{21}\right)$$
$$+ \left(1 \ldots \frac{5\Delta}{21}\right) - \left(1 \ldots \frac{8\Delta}{21}\right) - \left(1 \ldots \frac{10\Delta}{21}\right).$$

C'est en décomposant en groupes, une expression de la forme

$$a - (a + b) + (a + b + c) + (a + b + c + d) - (a + b + c + d + e)$$
$$-(a + b + c + d + e + f) = -b - d - 2e - f,$$

où la signification des lettres est évidente; on a donc cette formule générale

$$\frac{1}{2} Cl(-21\Delta) = \left(\frac{\Delta}{21} \ldots \frac{2\Delta}{21}\right) + \left(\frac{4\Delta}{21} \ldots \frac{5\Delta}{21}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{5\Delta}{21} \ldots \frac{8\Delta}{21}\right) + \left(\frac{8\Delta}{21} \ldots \frac{10\Delta}{21}\right);$$

dans le cas particulier qui nous occupe, $\Delta = 59$, cette quantité est

$$(3 \ldots 5) + (12 \ldots 14) + 2(15 \ldots 22) + (23 \ldots 28);$$

on devra donc additionner les nombres

$$\left(\frac{-59}{3}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{4}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{5}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{12}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{13}\right) = -1,$$
$$\left(\frac{-59}{14}\right) = -1; \quad 2\left(\frac{-59}{15}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{16}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{17}\right) = 2,$$
$$2\left(\frac{-59}{18}\right) = -2, \quad 2\left(\frac{-59}{19}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{20}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{21}\right) = 2,$$
$$2\left(\frac{-59}{22}\right) = 2, \quad \left(\frac{-59}{23}\right) = -1, \quad \left(\frac{-59}{24}\right) = -1, \quad \left(\frac{-59}{25}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{-59}{26}\right) = \left(\frac{-59}{27}\right) = \left(\frac{-59}{28}\right) = 1.$$

Il vient

$$\frac{1}{2}\, Cl(-21.59) = 12,$$

ou bien

$$Cl(-1159) = 24.$$

Revenons sur les fonctions $S(x, -\Delta)$; la formule

$$S(x, -\Delta) = \frac{2}{\pi} Cl(-\Delta) - \sqrt{\Delta} \sum_{1}^{\infty}{}' \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}$$

donne pour $x = \frac{1}{2}$.

$$S\left(\frac{1}{2}, -\Delta\right) = \frac{2}{\pi} Cl(-\Delta) + \sqrt{\Delta} \sum_{1}^{\infty}{}' (-1)^{\nu-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu\pi};$$

la série infinie a pour valeur

$$\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \frac{2}{\pi} Cl(-\Delta)$$

et on a donc, même pour les discriminants non fondamentaux,

$$S\left(\frac{1}{2}, -\Delta\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \frac{2}{\pi} Cl(-\Delta);$$

remarquons que, si le discriminant n'est pas fondamental, l'expression finie (III) cesse d'avoir lieu.

Si donc, dans les formules (38) et (39) on fait $x = \frac{1}{2}$, $m = 1$, on aura

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{\Delta}, D\right) = -\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta D}\right)\right) Cl(-\Delta D),$$

$$\sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) S\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{D}, -\Delta\right) = -\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta D}\right)\right) Cl(-\Delta D).$$

ou en réduisant aux premiers membres,

$$(48)\qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{\Delta},\ D\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta D}\right)}{2}\, Cl(-\Delta D).$$

$$(49)\qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{a}\right) S\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{D},\ -\Delta\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta D}\right)}{2}\, Cl(-\Delta D).$$

Ces équations ont lieu pour des discriminants fondamentaux quelconques, $D>0$ et $-\Delta<0$.

Notons quelques cas particuliers. Pour $\Delta=3$, on tire de (48):

$$(50)\qquad S\left(\frac{1}{6},\ D\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{D}\right)}{2}\, Cl(-3D)$$

ou bien

$$(50^1)\qquad \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{6}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{D}\right)}{2}\, Cl(-3D),$$

et en retranchant de (44)

$$(50^2)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{6}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{D}\right) Cl(-3D).$$

Posant $\Delta=7$, on a une formule déjà compliquée

$$S\left(\frac{5}{14},\ D\right)+S\left(\frac{3}{14},\ D\right)-S\left(\frac{1}{14},\ D\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{D}\right)}{2}\, Cl(-7D).$$

En retranchant, membre à membre, les formules (30^*) et (31^*), il vient, pour $\Delta>4$,

$$(51)\qquad \sum_{\left[\ \ \right]}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\, Cl(-\Delta);$$

cette formule peut s'appliquer, si une au moins des équations suivantes n'a pas lieu : $1 = \left(\frac{-\Delta}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = \left(\frac{4}{\Delta}\right)$; donc si Δ est impair, il ne doit pas avoir la forme $24k - 1$; on devra déterminer à peu près $\frac{\Delta}{12}$ signes $\left(\frac{-\Delta}{a}\right)$.

En combinant les différentes formules que nous avons établies, on parvient à exprimer les sommes

$$\sum_{1}^{\left[\frac{m}{n}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right), \quad \sum_{1}^{\left[\frac{m}{n}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right)$$

par certains nombres des classes. J'abandonne ce sujet et je me borne à indiquer comment les formules générales établies jusqu'ici pourront servir au calcul du nombre des classes, si le discriminant (négatif) est le produit de trois discriminants fondamentaux premiers entre eux et dont la valeur absolue ne dépasse pas 100. C'est par exemple le discriminant

$$-35931 = 21 \,.\, 29(-59).$$

En faisant

$$D = 21, \qquad \Delta = 29 \,.\, 59 = 1711,$$

on peut employer la formule (B) qui donne comme nous l'avons vu plus haut

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} Cl(-21 \,.\, \Delta) = &-S\left(\frac{1}{21}, -\Delta\right) + S\left(\frac{2}{21}, -\Delta\right) - S\left(\frac{4}{21}, -\Delta\right) \\ &- S\left(\frac{5}{21}, -\Delta\right) + S\left(\frac{8}{21}, -\Delta\right) + S\left(\frac{10}{21}, -\Delta\right) \\ = &-\sum_{a} \left(\frac{21}{a}\right) S\left(\frac{a}{21}, -\Delta\right).\end{aligned}$$

En faisant usage de la formule (39) dans le cas de $\Delta = D_1 \Delta_1$ où $D_1 = 29$, $\Delta_1 = 59$, elle donne (en faisant $m = 1$),

$$S\left(\frac{a}{21}, -\Delta\right) = Cl(-\Delta) + \sum_{b} \left(\frac{29}{b}\right) S\left(\frac{a}{21} + \frac{b}{29}, -59\right)$$

et en substituant ces valeurs dans la formule précédente, la constante $Cl(-\Delta)$ disparaîtra et il y resteront les termes

$$\left(\frac{29}{b}\right) S\left(\frac{a}{21} + \frac{b}{29}, -\Delta_1\right), \qquad (\Delta_1 = 59).$$

Pour les former, on se sert des relations

$$S(x+1) = S(x), \qquad S(1-x) = S(x),$$

et on remarque qu'en prenant $b = 29 - b_1$, on aura des termes analogues, ce qui donne l'expression définitive ($\Delta_1 = 59$)

$$\frac{1}{2} Cl(-21 \,.\, 29 \,.\, 59)$$

$$= \sum_a \left(\frac{21}{a}\right) \sum_b \left(\frac{29}{b}\right) \left| S\left(\frac{a}{21} + \frac{b}{29}, -\Delta_1\right) + S\left(\frac{a}{21} - \frac{b}{29}, -\Delta_1\right) \right|$$

$$(a = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10;\ b = 1, 2, 3, \ldots, 14)$$

en convenant de représenter par $S(x, -\Delta_1)$ la quantité $S(1 + x, -\Delta_1)$ même si x est négatif.

Cela posé, les quantités $S\left(\frac{a}{21} \pm \frac{b}{29}\right)$ s'expriment aisément par les sommes

$$s_k = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{-59}{\nu}\right). \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, 29)$$

On se construit à cet effet un tableau à double entrée des valeurs $\frac{59a}{21} \pm \frac{59b}{29}$, en mettant ensemble les valeurs réduites qui correspondent aux deux signes, et en ajoutant en même temps le signe de Legendre $-\left(\frac{21}{a}\right)\left(\frac{29}{b}\right)$. On aura ainsi un tableau rectangulaire dont les éléments sont des quantités de la forme $\pm(s_h + s_k)$, et pour obtenir la formule définitive, on devra grouper ensemble les quantités égales $\pm s_h$ ce qui donne une expression de la forme

$$\frac{1}{2} Cl(-21 \,.\, 29 \,.\, 59) = \sum_{h=1}^{29} c_h s_h,$$

qui s'évalue aisément. On aura donc, en résumé, à dresser un tableau à 6×14 cases pour énumérer les c_h et à évaluer au surplus les signes de LEGENDRE $\left(\frac{-59}{h}\right)$ depuis $h = 1$ jusqu'à $h = 29$.

4. Reprenons l'équation (15) en y supposant $m = 1$:

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.$$

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle s'annulant à l'infini positif, $f'(x)$ sa dérivée. Certaines conditions qui assurent la convergence étant supposées satisfaites, multiplions les deux membres par $f'(x)dx$ et intégrons de zéro à l'infini. On a

$$\int_0^\infty f'(x)dx = -f(0), \qquad \int_0^\infty f'(x) E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right)dx = -\sum_{n=1}^{\infty} f\left(n - \frac{a}{\Delta}\right),$$

d'où en faisant $n\Delta - \alpha = m$,

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \int_0^\infty E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) f'(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) f\left(\frac{m}{\Delta}\right).$$

Ensuite, l'intégration par parties permet de transformer l'intégrale

$$\int_0^\infty f'(x) \cos 2\nu x\pi dx$$

en l'expression

$$-f(0) + 2\nu\pi \int_0^\infty f(x) \sin 2\nu x\pi dx.$$

En faisant usage de ces valeurs, nous aurons la formule

$$-\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) f\left(\frac{m}{\Delta}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \left\{ -\frac{f(0)}{\nu} + 2\pi \int_0^\infty f(x) \sin 2\nu x\pi dx \right\},$$

ou bien

$$(52)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)f\left(\frac{m}{\Delta}\right)=2\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\int_0^{\infty}f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx.$$

Si l'on choisit convenablement la fonction $f(x)$, la série

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

apparaîtra dans le second membre et on aura un développement de la quantité $Cl(-\Delta)$. Faisons par exemple

$$f(x)=\int_{ax}^{\infty}e^{-z^2}dz,$$

la formule

$$2\nu\pi\int_0^{\infty}f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx=f(0)+\int_0^{\infty}f'(x)\cos 2\nu x\pi\,dx$$

donnera

$$2\nu\pi\int_0^{\infty}f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-a\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}\cos 2\nu x\pi\,dx$$

ou bien

$$2\int_0^{\infty}f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\nu\pi}-\frac{\sqrt{\pi}}{2\nu\pi}e^{-\frac{\nu^2\pi^2}{a^2}}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\int_{\frac{am}{\Delta}}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\Delta\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{2\nu\pi}-\sqrt{\Delta\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{2\nu\pi}e^{-\frac{\nu^2\pi^2}{a^2}},$$

ou en faisant $a=\sqrt{\frac{\Delta\pi}{u}}$, $u>0$,

$$\frac{2}{\pi}Cl(-\Delta)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{m^2\pi u}{\Delta}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\int_{m\sqrt{\frac{\pi}{\Delta u}}}^{\infty}e^{-z^2}dz,$$

équation que nous avons obtenue plus haut par un procédé différent.

Prenons en second lieu la formule

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\cdot$$

L'hypothèse de $f(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$ n'étant permise puisque la fonction devient infinie pour $x = 0$, j'emploie la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

en la retranchant de la précédente; il vient

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x}\sin bx\,dx = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\cdot$$

Faisant donc, dans la formule (52),

$$f(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{x}$$

nous aurons

$$\Delta\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1 - e^{-\frac{am}{\Delta}}}{m} = 2\sqrt{\Delta}\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\operatorname{arctg}\frac{a}{2\nu\pi},$$

d'où en changeant a en $2u\pi$,

$$(53)\qquad \frac{2}{\pi}Cl(-\Delta) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{arctg}\frac{u}{m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mu\pi}{\Delta}}.$$

La formule suivante [1]

$$2\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{\sin a\pi}{e^{ux\pi} + \cos a\pi}\sin vx\pi\,dx = \frac{1}{v}\left(\alpha - \frac{\sin\operatorname{hyp}\frac{av\pi}{u}}{\sin\operatorname{hyp}\frac{v\pi}{u}}\right),$$

$$(0 < \alpha < 1\,,\ u > 0\,,\ v > 0),$$

[1] Reinhard Mildner, *Beitrag zur Ausmittlung des Werthes bestimmter Integrale* (Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 48; 1884).

conduit à choisir

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha\pi}{e^{ux\pi} + \cos \alpha\pi};$$

nous aurons

$$\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha\pi}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + \cos \alpha\pi} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \left(\alpha - \frac{\sin \text{hyp} \frac{2\nu\alpha\pi}{u}}{\sin \text{hyp} \frac{2\nu\pi}{u}} \right)$$

ou bien

$$(54) \qquad \frac{\alpha\pi}{\tau} Cl(-\Delta)$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha\pi}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + \cos \alpha\pi} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{\sin \text{hyp} \frac{2\alpha m\pi}{u}}{\sin \text{hyp} \frac{2m\pi}{u}},$$

$$(0 < \alpha < 1, \ u > 0).$$

En supposant α infiniment petit, on en déduit $(u > 0)$

$$(54^0) \qquad \frac{1}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + 1} + \frac{\sqrt{\Delta}}{u} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{\sin \text{hyp} \frac{2m\pi}{u}}$$

et en faisant $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$(54^1) \qquad \frac{\pi}{2\tau} Cl(-\Delta)$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} e^{-\frac{mu\pi}{\Delta}} + \frac{1}{4}\sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m \cos \text{hyp} \frac{m\pi}{u}};$$

cette dernière formule sera vérifiée plus tard.

En opérant sur la formule (11) pour $m = 1$, à savoir

$$\sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{D}\right) = \sqrt{D} \sum_{\nu=1}^\infty \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

d'une manière analogue que nous venons d'opérer sur la formule (15), nous aurons

$$(55) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)f\left(\frac{m}{D}\right) = 2\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\int_0^{\infty} f(x)\cos 2\nu x\pi\, dx.$$

D étant un discriminant fondamental positif.

Si l'on y fait par exemple

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{u}}{x},$$

on devra appliquer la formule suivante aisée à vérifier

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos vx}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{u}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{uv}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}$$

qui donne:

$$D\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{m}{Du} = \pi\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\int_{2\nu u\pi}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x};$$

en remplaçant $\operatorname{arctg}\frac{m}{Du}$ par sa valeur

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{Du}{m}$$

on en tire la formule (6).

Prenons en second lieu

$$f(x) = \log\frac{1 + e^{-cx}}{1 - e^{-cx}}, \qquad c > 0,$$

la formule

$$\int_0^{\infty}\log\frac{1 + e^{-cx}}{1 - e^{-cx}}\cos bx\, dx = \frac{\pi}{2b}\,\frac{1 - e^{-\frac{b\pi}{c}}}{1 + e^{-\frac{b\pi}{c}}}$$

permet de conclure

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\log\frac{1 + e^{-\frac{cm}{D}}}{1 - e^{-\frac{cm}{D}}} = \frac{1}{2}\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\,\frac{1 - e^{-\frac{2\nu\pi^2}{c}}}{1 + e^{-\frac{2\nu\pi^2}{c}}}.$$

Posant $c = u\pi$ et faisant usage des formules

$$\frac{1 - e^{-\frac{2\nu\pi}{u}}}{1 + e^{-\frac{2\nu\pi}{u}}} = 1 - \frac{2}{e^{\frac{2\nu\pi}{u}} + 1},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\sqrt{D}}{\nu} = Cl(D) \log E(D),$$

nous aurons

$$(56) \quad \frac{1}{2} Cl(D) \log E(D) = \sqrt{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u}} + 1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \log \frac{1 + e^{-\frac{mu\pi}{D}}}{1 - e^{-\frac{mu\pi}{D}}},$$

formule qui peut être assez commode pour le calcul effectif du nombre des classes d'un discriminant fondamental positif.

Nous terminons ces recherches en nous rappelant la formule suivante due à Kummer [1]

$$\int_0^1 \cos^{\beta-1} \frac{x\pi}{2} \cos \gamma x\pi dx = \frac{2^{1-\beta} \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + \gamma\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} - \gamma\right)}, \quad (\beta > 0),$$

qui donne l'occasion à une autre application de la formule (15)

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.$$

Je change, dans cette dernière, x en ux et multipliant les deux membres par $\cos^{\beta-1} \frac{x\pi}{2} dx$ j'intègre de zéro à un. Il vient, d'après la formule de Kummer

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) \frac{2^{1-\beta}\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2} + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \int_0^1 E\left(ux + \frac{a}{\Delta}\right) \cos^{\beta-1} \frac{x\pi}{2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} 2^{1-\beta} \Gamma(\beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + 2\nu u\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} - 2\nu u\right)}.$$

[1] Kummer, *Sur quelques transformations générales des intégrales définies* (Journal de Crelle, t. 20).

En supposant u positif et inférieur à $\frac{1}{\Delta}$, les fonctions

$$E\left(ux + \frac{\alpha}{\Delta}\right), \qquad (0 < \alpha < \Delta),$$

seront identiquement nulles dans l'intervalle de l'intégration, et il vient

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + 2\nu u\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} - 2\nu u\right)},$$

ou bien, en posant $\frac{\beta+1}{2} = \xi$, $u = \frac{x}{\Delta}$,

$$(57) \qquad \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{\Gamma(\xi)^2}{\Gamma\left(\xi + \frac{2\nu x}{\Delta}\right)\Gamma\left(\xi - \frac{2\nu x}{\Delta}\right)}.$$

Dans cette formule obtenue sous l'hypothèse de $\xi > \frac{1}{2}$, $0 < x < 1$ on peut cependant prendre $\xi = \frac{1}{2}$, puisque cela donne la formule (15) qui se trouve donc généralisée par la formule (55), sous l'hypothèse restrictive bien entendu $0 < x < 1$.

5. Aux résultats obtenus dans le présent chapitre s'ajoute une formule que nous avons tirée d'une source bien différente mais qui leur ressemble beaucoup et que nous allons exposer puisque elle à été le point de départ de nos études.

Soit (a, b, c) une forme quadratique positive à des coefficients réels quelconques, $\Delta = 4ac - b^2$ son discriminant changé de signe, et soit u une quantité également réelle et positive. La formule suivante, cas particulier d'une relation rappelée par Kronecker à maintes reprises, et dont la démonstration se trouve dans la thèse de M. de Séguier

$$\sum_{m,n} e^{-\frac{2u\pi}{\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)} = \frac{1}{u} \sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

contient des séries qui ne diffèrent des séries à double entrée employées dans le théorème de Dirichlet que par les termes constants où $m = n = 0$ dont les valeurs sont respectivement 1 et $\frac{1}{u}$. On aura donc, en isolant ces termes et en posant pour abréger

$$f(x) = e^{-\frac{2x\pi}{\sqrt{\Delta}}} - \frac{1}{u} e^{-\frac{2x\pi}{u\sqrt{\Delta}}},$$

la relation suivante

$$\sum_{m,n}{}' f(am^2 + bmn + cn^2) = \frac{1}{u} - 1,$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ excepté } m = n = 0).$$

Cela étant, remplaçons la forme (a, b, c) par les différents représentants des formes positives du discriminant fondamental $-\Delta$ et ajoutons les résultats ainsi obtenus; nous aurons

$$\sum_{(a,b,c)} \sum_{m,n}{}' f(am^2 + bmn + cn^2) = \left(\frac{1}{u} - 1\right) Cl(-\Delta).$$

Or, d'après la formule fondamentale de Dirichlet, le premier membre est égal à la quantité

$$\tau \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) f(hk) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{2uhk\pi}{\sqrt{\Delta}}} - \frac{1}{u} e^{-\frac{2hk\pi}{u\sqrt{\Delta}}}\right);$$

en effectuant la sommation relative à k et en comparant les deuxièmes membres, nous aurons la formule cherchée

$$(58) \qquad \left(\frac{1}{u} - 1\right) Cl(-\Delta) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{e^{\frac{2hu\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} - \frac{\tau}{u} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{e^{\frac{2h\pi}{u\sqrt{\Delta}}} - 1}$$

et on en tire en prenant les dérivées des deux membres pour $u = 1$, la formule suivante

$$(59) \qquad Cl(-\Delta) = -\tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{e^{\frac{2h\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} + \frac{4\tau\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{h}{\left(e^{\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}} - e^{-\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}}\right)^2}.$$

(à suivre.)

BIBLIOGRAPHIE.

C. J. Clay and Sons.

Cambridge 1904.

COX, JOHN, Mechanics.

The winning of the principles. Mathematical statement of the principles. Application to various problems. The elements of rigid dynamics. Plates: Archimedes, Galilei, Huyghens, Newton. — XIV + 332 p. 8. Sh. 9—.

JEANS, J. H., The dynamical theory of gases.

Law of distribution. Physical properties. Theory of a non-conservative gas. Free path phenomena. Index of subjects & names. — VI + 352 p. Royal 8 vo. Sh. 15— (cloth.).

SCOTT, R. F., The theory of determinants and their applications. 2nd ed., revised by G. B. Mathews.

Definitions and notations. Alternate numbres. General properties of determinants. On the minors and on the expansion of a determinant. Composition of arrays. Multiplication of determ. On determ. of compound systems. Arithmetical properties of determ. Elementary factors. Determ. of special forms. Cubic determ., and determ. with multiple suffixes. Determ. of infinite order. Applications to the theory of equations and of elimination. Rational functional determ. Jacobians and Hessians. Appl. to bilinear and quadratic forms. Determ. of functions of the same variable. Continued fractions. Appl. to geometry. — XI + 288 p. 8. Sh. 9—.

STOKES, G. G., Mathematical and physical papers. Vol. 4. — VIII + 378 p. 8. Sh. 15—.

SYLVESTER, J. J., The collected mathematical papers. Vol. 1 (1837—53). — XII + 650 p. 8. Sh. 18—.

THOMSON, J. J., Elements of the mathematical theory of electricity and magnetism. 3 ed. — VI + 544 p. 8. Sh. 10— (cloth.).

Walker, J., The analytical theory of light.

Geometrical propositions of the wave-theory. Analytical expression for a train of plane waves. Interference. Interference produced by isotropic plates. Differential equations of the polarisation-vector. Huygens' principle. Fraunhofer's diffraction phenomena. Fresnel's diffr. phenom. More accurate investigation of the problem of diffr. Reflection & refraction at the surface of isotropic media. Double refraction. Determination of the principal wave-velocities. Crystalline reflect. & refract. The interference of polarised light. The study of polar. light. Absorbing media. Dispersion. Structurally & magnetically active media. — XV + 416 p. Royal 8 vo. Sh. 15— (cloth.).

Whittaker, E. T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies.

Kinematical preliminaries. The equations of motion. Principles available for the integration. Soluble problems of particle dynamics. Dynamical specification of bodies. Soluble problems of rigid dynamics. Theory of vibrations. Nonholonomic systems. Dissipative systems. The principles of Hamilton and Gauss. Hamiltonian systems & their integral-invariants. The transformationtheory of dynamics. Properties of the integrals of dynamical systems. Reduction of the problem of three bodies. The theorems of Bruns and Poincaré. The general theory of orbits. Integration by trigonometric series. Index. — XIII + 414 p. Royal 8 vo. Sh. 12. 6 d. (cloth.).

Gauthier-Villars.

Paris 1904—05.

Baire, R., Leçons sur les fonctions discontinues.

Premières recherches sur les fonctions discontinues. Les ensembles bien ordonnés et les nombres transfinis. Les ensembles linéaires. Les fonctions d'une variable. Les fonctions de n variables. — VIII + 127 p. 8. Fr. 3,50.

Boltzmann, L., Leçons sur la théorie des gaz. Trad. par A. Galotti et H. Bénard. Avec une introduction et des notes de M. Brillouin. P. 2.

Éléments de la théorie de Van der Waals. Discussion physique de la théorie de Van der Waals. Théorèmes de mécanique générale nécessaires pour la théorie des gaz. Gaz à molécules composées. L'équation de V. d. Waals déduite de la notion de viriel. Théorie de la dissociation. Compléments aux théorèmes relatifs à l'équilibre thermique dans des gaz à molecules complexes. — XII + 280 p. 8. Fr. 10—.

Borel, E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. Réd. par M. Fréchet avec des notes par P. Painlevé et H. Lebesgue.

Notions générales sur les ensembles. Notions sur la continuité. Séries de fonctions réelles. Représentation des fonctions continues par des séries de polynomes. Représ. des fonct. discontinues par des séries de polynomes. Sur le développement des fonctions analytiques (par P. Painlevé). Démonstr. d'un théorème de M. Baire (par H. Lebesgue). Sur l'existence des fonctions de classe quelconque. — VIII + 160. p. 8. Fr. 4,50.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Publ. par les soins de B. Baillaud et H. Bourget. Avec une préface de Émile Picard. T. 1 (8 novembre 1882—22 juillet 1889). — XX + 477 p. 8. Fr. 16—.

Darboux, G., Étude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des sciences à Saint-Louis. — 34 p. 8. Fr. 1,50.

Fouët, E. A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. P. 2.

Théorèmes d'existence. Étude des fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann. — XI + 299 p. 8. Fr. 10—.

Frenet, F., Recueil d'exercises sur le calcul infinitésimal. 6[e] éd. avec un appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales, par H. Laurent.

Calcul différentiel. Calcul intégral. — XIV + 538 p. 8. Fr. 8—.

Goursat, É., Cours d'analyse mathématique. T. 2, fasc. 1.

Fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations. — 304 p. 8. Fr. 20— (prix du t. 2 complet pour les sous-cripteurs).

Humbert, M. G., Cours d'analyse professé à l'École Polytechnique. T. 2.

Compléments du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Équations différentielles. — XVIII + 493 p. 8. Fr. 16—.

Laguerre, Edmond, N., Oeuvres. Publ. sous les auspices de l'Académie des sciences, par Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché. T. 2. Géométrie. — 715 p. 8. Fr. 22—.

Lechalas, G., Introduction à la géométrie générale. (Actualités scientifiques.)

Géom. à une, à deux, à trois et à quatres dimensions. Géom. des espaces à courbure négatives. — IX + 58 p. 8. Fr. 1,75.

Picard, É., Traité d'analyse. 2e éd. rev. et corrigée. T. 2, fasc. 1.

Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann. — 368 p. 8. Fr. 16—.

Picard, É., Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique.

Trois conférences faites à Clark-University (1899): Sur l'extension de quelques notions mathem. et en particulier de l'idée de fonction depuis un siècle. Quelques vues générales sur la théorie des équations différentielles. Sur la théorie des fonctions analytiques et sur quelques fonctions spéciales. Conférence faite au Congrès de Saint-Louis (1904): Sur le développement de l'analyse mathém. et ses rapports avec quelques autres sciences. — 167 p. 8. Fr. 3,50.

Poincaré, H., La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La télégraphie sans fil. (Scientia, phys.-mathém. n° 23.) — VI + 110 p. 8. Fr. 2— (cart.).

Poincaré, H., Leçons de mécanique céleste, professées à la Sorbonne. T. 1: Théorie générale des perturbations planétaires.

Principes de la dynamique. Le probl. des trois corps. Le mouvement elliptique. Principes de la méthode de Lagrange. Application de la méth. de Lagrange. Transformations diverses des développements. Le probl. restreint. Théorie élém. des perturbations séculaires. Théorie complète des perturb. sécul. Cas général du probl. des trois corps. Théorème de Poisson. Symétrie des développements. Solutions périodiques. Principe de la méthode de Delauny — VI + 365 p. 8. Fr. .

Séguier, J. A. de, Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits.

Premières définitions et conséquences immédiates. Diviseurs. Groupes abéliens et hamiltoniens. Groupes d'ordre p^n. Sur les groupes de mouvements. Sur les matrices et les systèmes linéaires. Sur certaines propriétés des g_{p^a}. — II + 176 p. 8. Fr. 5—.

Vivanti, G., Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations. Professées à l'université de Messine. Trad. par A. Boulanger.

Théorie générale des groupes de transformations. Application de la théorie des groupes de transformations aux équations différentielles. Transformations de contact. — VII + 296 p. 8. Fr. 8—.

G. J. Göschen.

Leipzig 1904—05.

Bürklen, O. Th., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik. (Samml. Göschen.)

Arithmetik, Algebra, algebr. Analysis, eb. Geom., Stereom., eb. u. sphär. Trigonom., mathem. Geographie, analyt. Geom. der Ebene u. des Raumes, Differential- u. Integralrechnung. 3 durchgesehene Aufl. — 227 p. 12. M. 0,80 (geb.).

Classen, J., Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Bd 1—2. (Samml. Schubert 41—42.)

1: Elektrostatik und Elektrokinetik. — X+184 p. 8. M. 5— (geb.).
2: Magnetismus und Elektromagnetismus. — IX+251 p. 8. M. 7— (geb.).

Grimsehl, E., Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung. Bd 1. (Samml. Schubert 38.)

Allgemeine Potentialtheorie. Die Gravitation. Elektrostatik. — VII+219 p. 8. M. 6— (geb.).

Liebmann, Heinrich, Nichteuklidische Geometrie. (Samml. Schubert 49.)

Das Parallelenpostulat u. seine Scheinbeweise. Aufbau d. Geom. d. hyperbol. Ebene mit Hilfe d. Kreisgeom. d. euklid. Ebene. Synthetische Geom. d. hyperbol. Ebene. Die Trigonometrie in d. hyperbol. Ebene. Längen- u. Inhaltsmessungen mit Benutzung von Integralen. Analyt. Geom. d. hyperbol. Ebene. Sphärisch-ellipt. Geom. Nichteuklid. Mechanik. Alphabetisches Sachregister. — VIII+248 p. 8. M. 6,50 (geb.).

Runge, C., Theorie und Praxis der Reihen. (Samml. Schubert 32.)

Reihen von konstanten Grössen. Reihen von Funktionen. Die Fourier'schen Reihen. Unendliche Produkte. Reihenentwicklung der Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen. — 266 p. 8. M. 6— (geb.).

Sturm, A., Geschichte der Mathematik. (Samml. Göschen 226.)

Altertum, Mittelalter, Neuzeit. — 152 p. 12. M. 0,80 (geb.).

Voigt, W., Thermodynamik. Bd 1—2. (Samml. Schubert 39, 48.)

1: Thermometrie, Kalorimetrie, Wärmeleitung. Thermisch-mechanische Umsetzungen. Mit 43 Figuren. — XV+360 p. 8. M. 10— (geb.).

2: Thermisch-chemische Umsetzungen. Thermisch-elektrische Umsetzungen. Mit 44 Figuren u. 1 Kurventafel. — XI+370 p. 8. M. 10— (geb.).

Vries, H. de, Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Mit 25 Figuren. — 78 p. 8. M. 3—.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Hannover 1905.

Kiepert, L., Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. T. 1: Differential-Rechnung. 10:te vollst. umgearb. und verm. Aufl. von Dr. Max Stegemann. Mit 181 Figuren im Texte.

Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen. Einige grundlegende Untersuchungen aus der Algebra. Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. — XX+816 p. 8.

A. Hermann.

Paris 1903—04.

Green, George, Mathematical papers. Ed. by N. M. Ferrers. Fac-simile reprint. — X+336 p. 8.

Tannery, J., Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. 2e éd. entièrement refondue. T. 1.

Nombres irrationnels. Ensembles. Limites. Séries. Produits infinis. Fonctions élémentaires. Dérivées. — IX+422 p. 8. Fr. 14—.

Fr. Hodgson.

London 1904.

Cunningham, Allan, J. C., Quadratic partitions. — XXIII+266 p. 8. Sh. 12— (cloth.).

Ulrico Hoepli.

Milano 1904.

Brioschi, F., Opere matematiche. Pubbl. per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. T. 3. — X+435 p. 4. L. 25—.

Lehmann & Stage.

Köpenhamn 1904.

Lorenz, L., Oeuvres scientifiques. Rev. et annotées par H. Valentiner. T. II, fasc. 2.

Portrait. Vie et travaux de L.-V. Lorenz. S. le développement des fonctions au moyen d'intégrales définies. Un théorème sur la fonction potentielle. S. l'évaluation des aires. S. le mouvem. permanent d'un liquide. S. la résolution des éq. algébr. au moyen de séries et d'intégrales définies. Contribution à la théorie des nombres. S. la compensation des erreurs d'observation. S. la réduction du facteur eulérien. Éq. cinétiques fondamentales d'un système de points.

S. le développement des fonct. arbitraires au moyen de fonct. données. S. les nombres premiers. Recherches analytiques s. les nombres de nombres premiers. — XXII + 267 p. 8.

The Macmillan Company.

London, New York 1904—05.

Cajori, F., An introduction to the modern theory of equations.

Some elementary properties of equations. Elementary transformations of eq. Location of the roots of an eq. Approximation to the roots of numerical eq. The algebraic solution of the cubic and quartic. Solution of binomial eq. and reciprocal eq. Symmetric functions of the roots. Elimination. The homographic and the Tschirnhausen transformations. Substitutions. Subsist.-groups. Resolvents of Lagrange. The Galois theory of algebraic numbers. Reducibility. Normal domains. Reduction of the Galois resolvent by adjunction. Solution of eq. from standpoint of the Galois theory. Cyclic eq. Abelian eq. Algebraic solut. of eq. — IX + 239 p. 8. Cloth. Sh. 1,75.

Campbell, D. F., The elements of the differential and integral calculus, with numerous examples. — X + 364 p. 8.

Gibson, G. A., An introduction to the calculus, based on graphical methods.

Differentiation of powers. Maxima and minima. Differentials. Higher derivatives. Applications to mechanics. Further theorems on differentiation. Integration of powers. Areas. Definite integrals. Integral as limit of a sum. Simpson's rules. Appl. to mechanics. Differentiation of direct trigonometric functions. Integration of direct trigonom. funct. Mean values. Fourier series. Inverse circular funct. Logarithmic and exponential funct. Applications. Curvature. Bending of beams. Catenary. Alternate currents. Double integrals. Graphical integration. — XIII + 225 p. 8. Cloth.

Joly, Ch. J., A manual of quaternions.

Addition and subtraction of vectors. Multiplication and division of vectors and quaternions. Formulae and interpretations depending on products of vectors. Applications to plane and spherical trigonometry. Geometry of the straight line and plane. The sphere. Differentiation. Linear and vector functions. Quadric surfaces. Geometry of curves and surfaces. Staties. Finite displacements. Strain. Dynamics of a particle. Dynamics. The operator ∇. Projective geometry. Hyperspace. Index. — XVII + 320 p. 8. Sh. 10— (cloth.).

Kelland, Ph. and Tait, P. G., Introduction to quaternions. 3 ed., prepared by C. G. Knott.

Vector addition and subtraction. Quaternions & versors or quotients & products of vectors. Quaternion products and related developments. Simple geometrical applications. Cones & their sections. Central surfaces of the second order. Miscellaneous geometrical applications. Dynamical applications. Vector equations of the first degree. — XVII + 208 p. 8.

Righi, A., Modern theory of physical phenomena. Radio-Activity, Ions, Electrons. Transl. by A. Trowbridge.

Electrolytic ions and electrons. The electrons and the phenomena of light. Nature of the cathode- rays. The ions in gases and in solids. Radio-activity. Mass, velocity, and electric charge of the ions and of the electrons. The electrons and the constitution of matter. Bibliography. Index. — XIII + 165 p. 8. Sh. 5— (cloth.).

Swan Sonnenschein & Co.

London 1904.

Hinton, C. H., The fourth dimension. — VIII + 247 p. 8.

B. G. Teubner.

Leipzig 1904.

Cesàro, E., Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch. hrsg. von Gerhard Kowalewski.

Theorie der Determinanten. Lineare und quadratische Formen. Irrationale Zahlen. Grenzwerthe. Unendl. Reihen u. Produkte. Theorie der Funktionen. Komplexe Zahlen u. Quaternionen. Algebr. Gleichungen. Differentialrechnung. Integralrechnung. Sachregister. — 894 p. 8. M. 15— (geb.).

Webster, A. G., The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Geb. d. math. Wiss., Bd 11.)

Kinematics of a point. Laws of motion. Important particular motions of a material point. General principles. Work and energy. Principle of least action. Generalized equations of motion. Oscillations and cyclic motions. Systems of vectors. Distribution of mass. Instantaneous motion. Dynamics of rotating bodies. Newtonian potential function. Dynamics of deformable bodies. Staties of deformable bodies. Hydrodynamics. List of works consulted by the author. — XI + 588 p. 8. M. 14— (geb.).

The University of Chicago Press.

Chicago 1904.

Bolza, O., Lectures on the calculus of variations. (The decennial publications of the university of Chicago. 2nd series. Vol. 14.)

The first and second variation of the integral $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$. Sufficient conditions for an extremum of the same integral. Weierstrass's theory of the problem in parameter-representation. Kneser's theory. Weierstrass's theory of the isoperimetric problems. Hilbert's existence theorem. — XV + 271 p. 8. Sh. 4 — (cloth.).

Vieweg und Sohn.

Braunschweig 1904.

LEJEUNE-DIRICHLET, G., Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Herausg. von G. Arendt. Mit in den Text eingedruckten Abbildungen.

Die Lehre von den bestimmten Integralen. Einige Anwendungen der bestimmten Integrale. — XXIII + 476 p. 8. M. 12—.

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

30

STOCKHOLM

BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.

1906.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

PARIS

A. HERMANN.

8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 30. — 1906. — TOME 30.

SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DISCONTINUES

PAR

RENÉ BAIRE

à MONTPELLIER.

PREMIÈRE PARTIE.

Introduction.

Le présent mémoire constitue la première partie d'un travail dans lequel je me propose d'exposer l'ensemble des résultats que j'ai obtenus dans l'étude du problème suivant: Caractériser les fonctions discontinues (de n variables) représentables par des séries simples, doubles, triples, etc. de fonctions continues, et que j'appelle fonctions de classes $1, 2, 3, \ldots$.

En ce qui concerne le cas des séries simples (fonctions de classe 1), j'ai exposé d'une manière complète la solution du problème dans mes »Leçons sur les fonctions discontinues».[1] Je renverrai souvent le lecteur à ce livre, dans lequel j'ai eu l'occasion de traiter plusieurs questions qui me sont utiles pour l'étude que j'ai en vue, en particulier la théorie des nombres transfinis (Chapitre II).

Voici un résumé des matières traitées dans le présent mémoire.

Je donne, au chapitre I, la définition des diverses classes de fonctions, ainsi que quelques propriétés générales qui en résultent d'une manière immédiate.

Je rappelle, au chapitre II, les principaux théorèmes de la théorie des ensembles de points à n dimensions dont j'ai besoin pour la suite.

[1] Editées chez Gauthier-Villars, dans la »Collection de monographies sur la théorie des fonctions» publiée sous la direction de M. Borel. Voir, dans les »Leçons sur les fonctions de variables réelles», de M. Borel (même collection), Note II, une autre solution, de M. Lebesgue.

Dans le chapitre III, après avoir rappelé le théorème général concernant les fonctions représentables par des séries de fonctions continues, je donne à ce résultat une extension, relative au cas où l'on se donne une fonction définie en des points dont l'ensemble ne constitue pas un continu, ni même un ensemble fermé, et où l'on veut savoir sous quelles conditions on peut compléter la définition de la fonction de manière à obtenir une fonction de classe 1 sur un ensemble fermé. Cette généralisation, outre l'intérêt qu'elle présente par elle-même, m'est nécessaire pour la suite de mes recherches.

Au chapitre IV, j'établis l'existence d'une certaine propriété qui appartient aux fonctions continues et qui *se conserve à la limite,* c'est-à-dire qui, dès qu'elle appartient à tous les termes d'une suite de fonctions tendant vers une fonction limite, appartient aussi à cette dernière fonction.

J'aborde, au chapitre V, l'étude des fonctions de classes 2 et 3, dont je démontre l'existence effective. Pour poursuivre cette étude, j'ai été conduit, comme je l'ai indiqué d'une façon succincte dans des notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (décembre 1899), à transformer les notions d'ensemble de points et de point limite. Toutefois, la notion nouvelle dont il s'agit n'apparaît pas dans le présent mémoire; elle sera exposée avec tous les développements nécessaires dans un mémoire ultérieur.

CHAPITRE I.

Définition des diverses classes de fonctions.

1. Désignons par R l'ensemble des nombres réels, par R' l'ensemble obtenu en adjoignant à R les éléments $+\infty$, $-\infty$. Une suite: u_1, $u_2, \ldots, u_n, \ldots$ a pour limite λ ($u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et λ appartenant à R') si, quels que soient les nombres λ' et λ'' tels que $\lambda' < \lambda < \lambda''$ (l'un des nombres λ' et λ'' pouvant ne pas exister), il y a un entier p tel que $n > p$ entraîne $\lambda' < u_n < \lambda''$.

P étant un ensemble *fermé* de l'espace à n dimensions G_n, si, à chaque point A de P correspond un nombre de R', $f(A)$, l'ensemble de ces nombres constitue une fonction définie sur P. Si tous les nombres

$f(A)$ appartiennent à R, la fonction est dite *finie*. Si les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des nombres $f(A)$ appartiennent à R, la fonction est dite *bornée*.

Une fonction f définie sur P est dite *continue* si elle a en chaque point une valeur finie et si, $A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots$ étant une suite de points de P tendant vers un point A_0 (qui fait nécessairement partie de P), on a: $\lim\limits_{h=\infty} f(A_h) = f(A_0)$.

Toute fonction non continue est *discontinue*.

Si l'on a des fonctions: $f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$ et f, définies sur P, et telles que, A étant un point quelconque de P, on a: $\lim\limits_{p=\infty} f_p(A) = f(A)$, on dit que *$f$ est la limite de f_p*.

P étant toujours un ensemble fermé de G_n, aux différents nombres ordinaux des classes I et II nous ferons correspondre des classes de fonctions définies sur P au moyen de la définition suivante.

1° Une fonction continue appartient à la classe 0.

2° Une fonction appartient à la classe α $(\alpha > 0)$ si elle est la limite d'une suite de fonctions appartenant à des classes marquées par des nombres inférieurs à α, et si elle ne fait pas partie de l'une de ces classes.

Soit E l'ensemble des fonctions appartenant à toutes les classes marquées par les nombres des classes I et II. Je dis que E contient toutes ses fonctions limites, c'est-à-dire que si une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ a pour limite f, et si toutes les fonctions f_ν appartiennent à E, il en est de même de f. En effet, les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ appartiennent à certaines classes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$, il existe un nombre α des classes I ou II supérieur à tous les α_ν; donc f est de classe α ou de classe inférieure; donc f fait partie de E.

2. Soit f une fonction quelconque définie sur l'ensemble fermé P. Soient b et B deux nombres finis $(b < B)$. Appelons transformation $\theta(b, B)$ la transformation qui remplace f par une fonction φ ainsi définie:

En un point A de P où: $\quad f(A) \leqq b, \quad \varphi(A) = b.$

En un point où: $\quad b \leqq f(A) \leqq B, \quad \varphi(A) = f(A).$

En un point où: $\quad B \leqq f(A), \quad \varphi(A) = B.$

On voit d'abord que, si f est continue, φ l'est aussi. Car, pour deux points quelconques A et A', on a:

$$|\varphi(A) - \varphi(A')| \leqq |f(A) - f(A')|.$$

Donc, si A' varie et tend vers A supposé fixe, le second membre tend vers o, par suite aussi le premier.

Supposons maintenant qu'on considère une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ ayant une limite f; la transformation $\theta(b, B)$, appliquée à toutes ces fonctions, donne de nouvelles fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ et φ; je dis que φ_ν tend vers φ. Il y a, pour un point A de P, trois cas possibles:

1° $b < f(A) < B$. Quand ν dépasse une certaine valeur p, on a: $b < f_\nu(A) < B$, et par suite: $\varphi_\nu(A) = f_\nu(A)$; comme $\varphi(A) = f(A)$, on a: $\lim \varphi_\nu(A) = \varphi(A)$.

2° $B \leqq f(A)$. A $\varepsilon > 0$ correspond p tel que, si $\nu \geqq p$, on a: $B - \varepsilon < f_\nu(A)$. Dans ces conditions, que $f_\nu(A)$ surpasse ou non B, on a: $B - \varepsilon < \varphi_\nu(A) \leqq B$; comme $\varphi(A) = B$, on a encore: $\lim \varphi_\nu(A) = \varphi(A)$.

3° $f(A) \leqq b$. La démonstration est analogue.

Cela posé, je dis que la transformation $\theta(b, B)$, appliquée à une fonction f de classe $\leqq \alpha$, donne une fonction φ de classe $\leqq \alpha$. Le fait a été établi pour $\alpha = 0$. Pour qu'il soit établi dans le cas général, il suffit, d'après le principe de récurrence généralisé, de montrer qu'en l'admettant pour tous les nombres inférieurs au nombre déterminé α, il a encore lieu pour α. Or, si f est de classe $\leqq \alpha$, f est la limite d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ dont chacune est de classe $< \alpha$; en appliquant à toutes ces fonctions la transformation $\theta(b, B)$, on obtient une suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tendant vers φ, et chacune des fonctions φ_ν est de classe $< \alpha$, d'après l'hypothèse admise; donc φ est de classe $\leqq \alpha$.

Si f, supposée de classe $\leqq \alpha$, est bornée, si m et M sont ses bornes inférieure et supérieure, en prenant: $b = m$, $B = M$, on a $\varphi = f$, la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tend vers f, et on a: $m \leqq \varphi_\nu \leqq M$. Donc, *une fonction bornée de classe $\leqq \alpha$ peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions de classes $< \alpha$, dont chacune est comprise entre les bornes de f.*

3. La somme algébrique, le produit d'un nombre fini de fonctions finies de classe $\leqq \alpha$ est de classe $\leqq \alpha$. Dans le cas de $\alpha = 0$, cela résulte de la définition des fonctions continues. Admettons le théorème pour tous

les nombres inférieurs au nombre α, et étendons-le à ce nombre; il suffit de considérer le cas de deux fonctions. Soient donc f et g deux fonctions finies et de classes $\leqq \alpha$; elles sont respectivement limites de fonctions f_ν et g_ν de classes $< \alpha$; d'après l'hypothèse admise, $f_\nu \pm g_\nu$, $f_\nu g_\nu$ sont de classes au plus égales à la plus grande des classes de f_ν et g_ν, donc de classes $< \alpha$; or $f_\nu \pm g_\nu$, $f_\nu g_\nu$ tendent vers $f \pm g$, fg, qui sont donc de classes $\leqq \alpha$.

Une série, dont tous les termes sont des fonctions finies de classes $< \alpha$, si elle est convergente en tout point de P, définit par sa somme une fonction de classe $\leqq \alpha$; car la somme des n premiers termes est une fonction de classe $< \alpha$.

Une série, dont tous les termes $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$ sont des fonctions finies définies en tous les points de P, et qui est convergente en chacun de ces points, est dite *uniformément convergente sur P* si, quel que soit $\varepsilon > 0$, et quel que soit l'entier h, il existe un entier $n > h$ tel qu'on a, en tout point de P:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots| < \varepsilon.$$

Nous allons montrer que, *si les termes d'une telle série sont des fonctions de classes $\leqq \alpha$, la somme f de la série est aussi de classe $\leqq \alpha$.* Dans le cas de $\alpha = 0$, ce théorème se réduit à une proposition connue relative aux fonctions continues.[1]

Pour traiter le cas de $\alpha > 0$, j'utiliserai la remarque suivante:[2] *Étant donnée une série uniformément convergente: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, on peut, par un certain groupement de termes consécutifs, la remplacer par une série: $U_0, U_1, \ldots, U_i, \ldots$ dont les termes sont, à partir du second, inférieurs en valeur absolue à ceux d'une série convergente à termes positifs numériques donnée.*

Si les u_n sont de classes $< \alpha$, il en sera de même des U_i, dont chacun est la somme d'un nombre fini de termes u_n.

Tout revient donc à montrer que si l'on a une série de fonctions de classes $\leqq \alpha$: $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$ et une série convergente à termes numériques positifs: $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, telles que: $|u_\nu| \leqq a_\nu$, la somme f de la série est de classe $\leqq \alpha$.

D'après l'hypothèse, il y a, pour u_ν, une suite de fonctions $u_{\nu,1}$, $u_{\nu,2}, \ldots, u_{\nu,p}, \ldots$, tendant vers u_ν, toutes de classes $< \alpha$, et telles que,

[1] *Leçons sur les fonctions discontinues*, p. 111.

[2] Pour la démonstration, voir loc. cit., p. 112.

quel que soit p: $|u_{\nu,p}| \leqq a_\nu$. Si on pose: $f_i = u_{1,i} + u_{2,i} + \ldots + u_{i,i}$, on vérifie[1] que f_i a pour limite f. Or, f_i est de classe $< \alpha$, comme somme d'un nombre fini de fonctions de classes $< \alpha$. Donc f est de classe $\leqq \alpha$.

Etant donnée une série uniformément convergente, on dit que la somme f_ν des ν premiers termes tend uniformément vers la somme de la série. On voit que, si une fonction f_ν de classe $\leqq \alpha$ tend uniformément vers une limite f, f est aussi de classe $\leqq \alpha$.

Si une fonction f est telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ de classe $\leqq \alpha$ différant de f de moins de ε, f est de classe $\leqq \alpha$. En effet, prenons une suite de nombres positifs tendant vers 0, soit ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ et prenons, pour chaque ε_ν, une fonction f_ν de classe $\leqq \alpha$ telle que $|f_\nu - f| < \varepsilon_\nu$; on voit que f_ν tend uniformément vers f, qui est par suite de classe $\leqq \alpha$.

4. Montrons que l'étude des fonctions non finies ou non bornées peut se ramener à l'étude des fonctions bornées. Nous utiliserons pour cela la transformation T qui remplace la variable y pouvant prendre toutes les valeurs de R' par une nouvelle variable z définie comme il suit:

$$T \left| \begin{array}{lll} \text{Pour} & -\infty \leqq y < 0, & z = \dfrac{y}{1 - y}. \\[2ex] \text{Pour} & 0 \leqq y \leqq +\infty, & z = \dfrac{y}{1 + y}. \end{array} \right.$$

On sait[2] que si les nombres: $y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots$ et y_0, appartenant à R', ont pour transformés par T les nombres $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ et z_0, il y a équivalence entre les conditions:

$$\lim y_\nu = y_0 \quad \text{et} \quad \lim z_\nu = z_0.$$

En appliquant la transformation T aux valeurs d'une fonction f définie sur un ensemble P, on obtient une fonction φ, comprise entre -1 et 1, qui est la transformée de f par T; f est la transformée de φ par T^{-1}.

I. Si on considère une suite de points de P: $A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots$ ayant pour limite un point A, il y a équivalence entre les conditions:

$$\lim f(A_h) = f(A) \quad \text{et} \quad \lim \varphi(A_h) = \varphi(A).$$

[1] loc. cit., p. 113.

[2] [illegible]

II. Si l'on a des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ et f, définies sur P, et si leurs transformées par T sont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ et φ, il y a équivalence entre les conditions:

$$\lim f_\nu = f \quad \text{et} \quad \lim \varphi_\nu = \varphi.$$

Nous avons réservé le mot de fonction continue aux fonctions *finies*. Une fonction peut avoir en certains points l'une des valeurs $+\infty$, $-\infty$, et posséder en tout point A la propriété: $\lim f(A_h) = f(A)$ pour toute suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots$ tendant vers A. Nous dirons qu'une telle fonction est continue (sens étendu). D'après I, on voit que:

Une fonction f et sa transformée φ sont continues (sens étendu) ou non en même temps.

Si f est de classe 0, il en est de même de φ; mais, si φ est de classe 0, f n'est de classe 0 que si elle est finie. Je dis que, *étant données une fonction f et sa transformée φ, si l'une de ces deux fonctions est de classe α ($\alpha \geqq 1$), il en est de même de l'autre.*

Admettons cette proposition pour toutes les valeurs de $\alpha \geqq 1$ et inférieures à un nombre β, et démontrons-la pour β.

1° Si f est de classe β, il y a une suite $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ tendant vers f, chaque fonction f_ν étant de classe $< \beta$. Les transformées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ sont, d'après la proposition admise, de classes $< \beta$ et tendent vers φ; donc φ est de classe $\leqq \beta$.

2° Si φ est de classe β, il y a une suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tendant vers φ, chaque fonction φ_ν étant de classe $< \beta$ et étant comprise, comme φ, entre -1 et 1. Prenons une suite de nombres positifs inférieurs à 1 et tendant vers 1, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$. La fonction $\lambda_\nu \varphi_\nu$, qui tend vers φ, est comprise entre des nombres intérieurs à l'intervalle $(-1, 1)$; donc la transformée de $\lambda_\nu \varphi_\nu$ par T^{-1}, soit f_ν, est bornée; f_ν est de même classe que $\lambda_\nu \varphi_\nu$, c'est-à-dire que φ_ν, si cette classe est $\geqq 1$, d'après la proposition admise, et aussi dans le cas où elle est égale à 0, car alors f_ν, étant bornée, est une fonction continue proprement dite; ainsi les f_ν, qui tendent vers f, sont de classes $< \beta$; donc f est de classe $\leqq \beta$.

Les fonctions f et φ appartiennent donc à deux classes dont aucune ne peut surpasser l'autre; donc f et φ sont de même classe.

On voit, en outre, qu'une fonction f *quelconque* de classe $\leqq \alpha$ peut

être considérée comme la limite d'une suite de fonctions *bornées* de classes $< \alpha$.

Supposons qu'on soit parvenu à déterminer une condition (A) nécessaire et suffisante pour qu'une fonction *bornée* soit de classe $\leqq \alpha$ (α étant $\geqq 1$ et déterminé); supposons que la condition (A) soit invariante par rapport aux transformations T et T^{-1}, c'est-à-dire que, φ étant la transformée par T d'une fonction f, les fonctions f et φ remplissent en même temps ou non la condition (A); je dis que (A) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction *quelconque* soit de classe $\leqq \alpha$. En effet: 1° si f est de classe $\leqq \alpha$, φ est aussi de classe $\leqq \alpha$, et, étant bornée, satisfait à (A); donc f satisfait à (A). 2° si f satisfait à (A), il en est de même de φ; φ, étant bornée, est de classe $\leqq \alpha$, donc f aussi. Cela nous permettra, dans la suite, d'introduire le plus souvent la restriction qu'on s'occupe de fonctions bornées, les résultats s'étendant facilement au cas général.

CHAPITRE II.

Les ensembles à n dimensions.

5. J'indique ici les résultats relatifs à la théorie des ensembles de points à n dimensions dont j'ai besoin pour la suite; pour la plupart d'entre eux, je me contente de donner les énoncés, renvoyant pour les démonstrations aux »Leçons sur les fonctions discontinues«, (Ch. V, section 1).

$P, Q, R, \ldots$ étant des ensembles de points dans G_n, on désigne par $D(P, Q, R, \ldots)$ l'ensemble des points communs à $P, Q, R, \ldots$, par $M(P, Q, R, \ldots)$ l'ensemble formé par la réunion de $P, Q, R, \ldots$; quand $P, Q, R, \ldots$ n'ont deux à deux aucun point commun, on écrit aussi: $M(P, Q, R, \ldots) = P + Q + R + \ldots$.

Si $P, Q, R, \ldots$ sont *fermés* et en nombre *fini*, $M(P, Q, R, \ldots)$ est *fermé*, car tout point limite pour cet ensemble est limite pour l'un au moins des ensembles $P, Q, R, \ldots$.

Si $P, Q, R, \ldots$ sont *fermés*, $D(P, Q, R, \ldots)$, s'il existe, est *fermé*.

Si on a des ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ tels que:

$$P_1 \geqq P_2 \geqq \ldots \geqq P_\nu \geqq \ldots$$

chacun contenant au moins un point, et si P_1 est borné, il y a au moins un point commun à tous.

6. P étant un ensemble quelconque, on désigne par P^1 l'ensemble dérivé, ou dérivé d'ordre 1, de P. Nous désignerons par P^0 l'ensemble $M(P, P^1)$, et nous dirons que c'est le *dérivé d'ordre* 0 de P. On voit que P^0 comprend, outre les points de P^1, les points qui font partie de P sans faire partie de P^1, c'est-à-dire les points isolés de P. Ainsi, *un point A appartient à P^0 si toute sphère de centre A contient au moins un point de P*, et il appartient à P^1 si toute sphère de centre A contient une infinité de points de P.

L'ensemble P^0 est fermé et a pour dérivé P^1, car si un point A est limite pour P^0, c'est que toute sphère de centre A contient une infinité de points de P^0: ces points appartenant à P ou P^1, le point A fait partie de P^1; réciproquement, un point de P^1, étant limite pour P, est limite pour P^0, qui contient P.

Si un point A n'appartient pas à P^0, il y a une sphère de centre A et de rayon positif qui ne contient aucun point de P: on dit que *A est extérieur à P.*

Si P est *dense en lui-même*, on a $P \leqq P^1$; il y a donc identité entre P^0 et P^1: P^0 est *parfait.*

7.[1] Si l'on a des ensembles fermés ou nuls correspondant aux nombres des classes I et II:

$$P_0, P_1, \ldots, P_\alpha, \ldots \tag{1}$$

avec la condition que $\alpha < \alpha'$ entraîne $P_\alpha \geqq P_{\alpha'}$, ces ensembles sont tous identiques entre eux à partir d'une certaine valeur β de α, c'est-à-dire que:

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots.$$

En désignant par P_Ω l'ensemble commun à tous les ensembles (1), on a, en outre, les résultats suivants:

[1] loc. cit., p. 103, 104, 105.

I. Si, pour tout nombre α de seconde espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les ensembles $P_{\alpha'}$ d'indice inférieur à α, on a:

$$P_0 = \sum (P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega, \qquad \gamma = 0, 1, \ldots < \beta.$$

II. Si, outre la condition I, on a $P_\Omega = 0$, et si P_0 est borné, il y a un nombre γ tel que P_γ contient des points, $P_{\gamma+1}$ étant nul.

III. Si les ensembles (1) sont tels qu'un point isolé de l'un d'eux ne fait pas partie du suivant, P_Ω est nul ou parfait.

Ces considérations s'appliquent en particulier aux ensembles dérivés d'un ensemble quelconque P. En tenant compte de la définition donnée plus haut du dérivé d'ordre 0, on voit que P a des dérivés marqués par les nombres des classes I et II à partir de 0, et par Ω, soit

$$P^0, P^1, P^2, \ldots, P^\alpha, \ldots, P^\Omega.$$

On a

$$P^0 = \sum (P^\gamma - P^{\gamma+1}) + P^\Omega. \tag{2}$$

P^Ω est nul ou parfait, et les ensembles P^γ sont tous identiques à P^Ω à partir d'une certaine valeur de γ. Si, dans un domaine borné, P^Ω est nul, il y a un nombre γ tel que P^γ contient des points dans ce domaine, tandis que $P^{\gamma+1}$ y est nul: P^γ contient dans ce domaine un nombre fini de points.

Dans la formule (2), chaque terme $P^\gamma - P^{\gamma+1}$ est un ensemble isolé, par suite dénombrable, donc $\sum (P^\gamma - P^{\gamma+1})$ est aussi dénombrable.

8. Soit P un ensemble parfait. Désignons par Σ, soit une sphère à n dimensions, soit un parallélépipède de côtés parallèles aux axes, contenant au moins un point de P à son intérieur. Considérons l'ensemble K des points de P qui sont *intérieurs* à Σ; K est dense en lui-même, car, au voisinage de tout point A de K existent des points de P intérieurs à Σ; donc (§ 6) K^0 est parfait. D'ailleurs K^0 est contenu dans P. Nous appellerons *portion*[1] *de P déterminée par Σ* l'ensemble parfait $P_1 = K^0$;

[1] La définition actuelle diffère légèrement de la définition donnée dans les »Leçons etc.«, (p. 105), en ce qu'un point de la surface de Σ n'est ici considéré comme appartenant à la portion que *s'il est limite de points de P intérieurs à Σ*. Cela ne modifie en rien la définition des ensembles non denses.

de plus, nous conviendrons de dire que tout point de K est *intérieur à la portion* P_1 *de* P. D'après cela, pour qu'un point A de P soit intérieur à une portion déterminée P_1 de P, il faut et il suffit qu'il existe une sphère de centre A et de rayon positif telle que tous les points de P contenus dans cette sphère appartiennent à P_1.

Soit P un ensemble parfait, et Q un ensemble contenu dans P. Deux cas seulement sont possibles:

1° Dans toute portion P_1 de P existe une portion P_2 qui ne contient aucun point de Q, (et par suite aucun point de Q^0). Nous dirons dans ce cas que Q est *non dense* dans P.

2° Il existe une portion P_1 de P telle que toute portion P_2 de P_1 contient des points de Q. La partie de Q contenue dans P_1 est alors *partout dense* par rapport à P_1, et la partie de Q^0 contenue dans P_1 coïncide avec P_1.

On voit que, si Q est non dense dans P, on peut, au voisinage de tout point de P, trouver un point de P n'appartenant pas à Q^0, et réciproquement, si ce fait a lieu, Q est non dense.

Si Q est *fermé* et ne coincide pas avec P, il y a une portion de P qui ne contient aucun point de Q.

9.[1] En supposant toujours que Q est un ensemble contenu dans l'ensemble parfait P, nous dirons que Q est *de première catégorie par rapport à* P si Q peut être formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité *dénombrable* d'ensembles *non denses* par rapport à P.

Tout ensemble qui n'est pas de première catégorie est dit de *deuxième catégorie.*

Un ensemble contenu dans un ensemble de première catégorie est lui-même de première catégorie.

Un ensemble formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie, est lui-même de première catégorie.

Si Q *est de première catégorie dans* P*:* 1° *la partie de* Q *contenue dans une portion* P_1 *de* P *est de première catégorie dans* P_1*:* 2° *il y a,*

[1] loc. cit., § 65. p. 105.

dans toute portion P_1 de P, des points de P qui n'appartiennent pas à Q:
3° *$P - Q$ est de deuxième catégorie.*

Dans les applications, nous aurons souvent à considérer un ensemble Q_n contenu dans un ensemble parfait P et dépendant d'un entier n de manière qu'on ait:

$$Q_1 \leqq Q_2 \leqq \ldots \leqq Q_n \leqq \ldots$$

Soit:

$$Q = M(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots)$$

Nous dirons que Q est l'ensemble *limite* de Q_n. On voit que si Q_n est de première catégorie, l'ensemble limite Q l'est aussi.

La même remarque s'applique au cas d'un ensemble Q_ρ dépendant d'un nombre positif ρ, avec la condition que $\rho' < \rho$ entraîne $Q_{\rho'} \geqq Q_\rho$. Prenons une suite quelconque de nombres positifs décroissants tendant vers 0: ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ et soit Q l'ensemble limite de Q_{ρ_n}. On reconnaît que Q est indépendant de la suite choisie; nous dirons encore que Q est l'ensemble *limite* de Q_ρ quand ρ tend vers 0. Si, pour toute valeur positive de ρ, Q_ρ est de première catégorie, il en est de même de Q.

CHAPITRE III.

Les fonctions de classe 1.

10. Supposons qu'une fonction f soit définie en tous les points d'un ensemble Γ de G_n, Γ étant *quelconque*, et f pouvant prendre toutes les valeurs de l'ensemble R' défini au § 1.

Si Γ_1 est un ensemble contenu dans Γ, f est définie aux différents points de Γ_1, l'ensemble des valeurs de f en ces points a une borne supérieure, une borne inférieure et une oscillation,[1] que nous désignons respectivement par:

$$M(f, \Gamma_1), \qquad m(f, \Gamma_1), \qquad \omega(f, \Gamma_1) = M(f, \Gamma_1) - m(f, \Gamma_1).$$

[1] On convient de poser, si a est fini:

$$+\infty - a = a - (-\infty) = +\infty - (-\infty) = +\infty,$$
$$+\infty - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0$$

On a évidemment, si Γ_2 est contenu dans Γ_1:

$$M(f, \Gamma_1) \geqq M(f, \Gamma_2), \qquad m(f, \Gamma_1) \leqq m(f, \Gamma_2), \qquad \omega(f, \Gamma_1) \geqq \omega(f, \Gamma_2).$$

Soit maintenant A un point de Γ^0 (§ 6). En appelant Γ_ρ la partie de Γ contenue dans la sphère de centre A et de rayon ρ, on reconnaît que, lorsque ρ décroît et tend vers 0, les nombres $M(f, \Gamma_\rho)$, $\omega(f, \Gamma_\rho)$ ne croissent pas, le nombre $m(f, \Gamma_\rho)$ ne décroît pas; ces trois nombres ont donc des limites, que nous désignons par:

$$M(f, \Gamma, A), \qquad m(f, \Gamma, A),$$

$$\omega(f, \Gamma, A) = M(f, \Gamma, A) - m(f, \Gamma, A) \geqq 0,$$

et que nous appelons respectivement *maximum, minimum, oscillation de f en A par rapport à Γ*.

D'après ces définitions, si un point A de Γ^0 est *intérieur* à une sphère Σ et si Γ_1 est la partie de Γ contenue dans Σ, on a:

$$M(f, \Gamma, A) \leq M(f, \Gamma_1); \qquad m(f, \Gamma, A) \geqq m(f, \Gamma_1); \qquad \omega(f, \Gamma, A) \leqq \omega(f, \Gamma_1).$$

11. Si f est définie au point A_0 de Γ^0, (ce qui n'a pas lieu nécessairement), on a

$$M(f, \Gamma, A_0) \geqq f(A_0).$$

Supposons qu'on ait:

$$M(f, \Gamma, A_0) = f(A_0). \tag{1}$$

Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre positif ρ tel que, dans la sphère de centre A_0 et de rayon ρ, on ait, en tout point A de Γ:

$$f(A) < f(A_0) + \varepsilon.$$

Réciproquement, cette propriété entraîne la condition (1). Nous dirons que la fonction f est *semi-continue supérieurement en A_0 par rapport à Γ*.

De même, nous dirons que f est *semi-continue inférieurement en A_0 par rapport à Γ* si l'on a:

$$m(f, \Gamma, A_0) = f(A_0).$$

Si, au point A_0, on a:

$$M(f, \Gamma, A_0) = m(f, \Gamma, A_0) = f(A_0),$$

la fonction est *continue en A_0 par rapport à Γ*; la condition de continuité s'exprime par:

$$\omega(f, \Gamma, A_0) = 0.$$

Si une fonction f définie en tous les points d'un ensemble *fermé* P possède en chaque point de cet ensemble la semi-continuité supérieure, ou inférieure, ou la continuité, nous dirons qu'elle est *semi-continue supérieurement*, ou *inférieurement*, ou *continue* sur P. Toutefois, dans ce dernier cas, pour nous conformer aux définitions du chapitre I, la fonction ne devra être considérée comme une fonction continue proprement dite que si elle a en chaque point une valeur finie.

Si P_1 est un ensemble fermé contenu dans l'ensemble fermé P, la semi-continuité supérieure (inférieure) sur P entraîne la semi-continuité supérieure (inférieure) sur P_1.

Si f est semi-continue supérieurement, $-f$ est semi-continue inférieurement.

La somme d'un nombre fini de fonctions semi-continues supérieurement est aussi semi-continue supérieurement.

Si f définie sur l'ensemble fermé P est semi-continue supérieurement, l'ensemble H des points où l'on a: $f \geqq k$, k étant un nombre quelconque, est *fermé*. En effet, si A_0 est limite d'une suite de points en chacun desquels on a: $f \geqq k$, il en résulte: $M(f, P, A_0) \geqq k$, et par suite:

$$f(A_0) = M(f, P, A_0) \geqq k;$$

donc l'ensemble H contient tous ses points limites.

12. Soit f une fonction définie sur un ensemble Γ *quelconque*. Nous avons défini, en chaque point A de Γ^0, le nombre $M(f, \Gamma, A)$; ce nombre est donc une fonction $\varphi(A)$ définie en tout point de l'ensemble fermé Γ^0; je dis que cette fonction est *semi-continue supérieurement* sur Γ^0. En effet, soit A_0 un point de Γ^0 et ε un nombre positif; nous pouvons déterminer une sphère Σ_1 de centre A_0 telle que, Γ_1 étant la partie de Γ contenue dans cette sphère, on ait:

$$M(f, \Gamma_1) < M(f, \Gamma, A_0) + \varepsilon,$$

et par suite, si A est un point *quelconque* de Γ_1 *intérieur* à Σ_1:

$$M(f, \Gamma, A) \leqq M(f, \Gamma_1) < M(f, \Gamma, A_0) + \varepsilon,$$

d'où l'on déduit que, dans une sphère Σ_2 concentrique et intérieure à Σ_1, on a, *en tout point* de Γ:

$$\varphi(A) < \varphi(A_0) + \varepsilon.$$

C'est la propriété qui caractérise les fonctions semi-continues supérieurement.

On reconnaît de même que $\psi(A) = m(f, \Gamma, A)$ est semi-continue inférieurement sur Γ^0.

La fonction $\omega(A)$, qui est égale en chaque point A de Γ^0 à l'oscillation de f, étant la somme des fonctions $\varphi = M(f, \Gamma, A)$ et $-\psi = -m(f, \Gamma, A)$, est *semi-continue supérieurement.* Il en résulte que l'ensemble des points de Γ^0 où l'oscillation de f est $\geqq \sigma$, σ étant un nombre positif, est *fermé.*

13. Une fonction f définie en tous les points d'un ensemble *parfait* P est *ponctuellement discontinue* sur P, si, quel que soit $\sigma > 0$, l'ensemble des points A de P où $\omega(f, P, A) \geqq \sigma$ est non dense dans P; alors l'ensemble des points de discontinuité est de première catégorie; il y a, dans toute portion de P, des points de continuité; la fonction $\omega(f)$ a, dans toute portion, et par suite en tout point, son minimum nul. (Nous faisons rentrer le cas des fonctions continues dans ce cas.) Dans le cas contraire, f est *totalement discontinue;* il existe un nombre positif α et une portion Π de P telle qu'en tout point de Π on a $\omega \geqq \alpha$; on voit que $\omega(f)$ a son minimum $\geqq \alpha$ dans la portion Π.[1]

Théorème I. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P soit de classe $\leqq 1$ est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait contenu dans P.*[2]

[1] loc. cit., § 67, p. 108.

[2] La démonstration de ce théorème résulte des §§ 68, 73 et 74 des »Leçons sur les fonctions discontinues», où toutefois l'ensemble P est supposé parfait; mais les raisonnements des §§ 73 et 74, qui établissent que la condition est suffisante, sont valables en supposant seulement que P est fermé. L'extension du résultat, démontré d'abord pour les fonctions bornées, aux fonctions quelconques, (§ 77) peut se faire en remarquant que la condition de l'énoncé est invariante par rapport aux transformations T et T^{-1} (§ 4 du présent mémoire).

14. Une fonction semi-continue, supérieurement par exemple, sur un ensemble fermé P, est de classe ≤ 1.[1]

Une telle fonction a la propriété suivante. Σ étant une sphère contenant des points de P, soit $\varphi(\Sigma)$ le maximum de f dans Σ; étant donné un point A de P, et une sphère Σ de centre A dont le rayon tend vers 0, $\varphi(\Sigma)$ a pour limite $f(A)$. Nous allons établir une propriété en quelque sorte réciproque.

Soit P un ensemble fermé. Supposons qu'à chaque sphère Σ contenant des points de P corresponde un nombre $\varphi(\Sigma)$, avec la condition que si Σ' est contenu dans Σ, on ait: $\varphi(\Sigma') \leq \varphi(\Sigma)$. Soit A_0 un point de P, et soit Σ la sphère de centre A_0 et de rayon ρ; quand ρ décroît et tend vers 0, $\varphi(\Sigma)$, qui ne croît pas, a une limite déterminée. Soit $f(A_0)$ cette limite; je dis que $f(A)$ est *semi-continue supérieurement*. En effet, soit ε un nombre positif; nous pouvons déterminer une sphère Σ de centre A_0 telle qu'on ait: $\varphi(\Sigma) < f(A_0) + \varepsilon$. Soit A un point quelconque de P intérieur à Σ, il y a une sphère de centre A contenue dans Σ, d'où il résulte qu'on a:

$$f(A) \leq \varphi(\Sigma) < f(A_0) + \varepsilon .$$

La fonction f possède donc bien la semi-continuité supérieure.

15. Il résulte du théorème I que si une fonction n'est pas de classe ≤ 1, il existe un ensemble parfait sur lequel elle est totalement discontinue. *Pour démontrer qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P est de classe ≤ 1, il suffira donc de démontrer que dans tout ensemble parfait H contenu dans P existe une portion sur laquelle f est de classe ≤ 1.* En particulier, une fonction quelconque définie sur un ensemble fermé dénombrable (autrement dit réductible) est de classe ≤ 1. Une fonction définie sur un ensemble fermé P est de classe ≤ 1 si elle est de classe ≤ 1 sur l'ensemble parfait P^{Ω}.

Soit f_1 une fonction de classe ≤ 1 définie sur un ensemble fermé P_1, f_2 une fonction de classe ≤ 1 sur un ensemble fermé P_2; je considère la fonction f qui est égale à f_1 en tout point de P_1, et à f_2 en tout point de P_2 qui n'appartient pas à P_1. Je dirai que f est obtenue par la *super-*

[1] loc cit, § 78, p. 124; même observation que plus haut.

position de f_1 à f_2; f est définie sur l'ensemble fermé $M(P_1, P_2)$. Je dis que f est de classe $\leqq 1$.

Il faut montrer que, dans tout ensemble parfait H contenu dans $M(P_1, P_2)$, existe une portion de H dans laquelle f est de classe $\leqq 1$. Posons: $H_1 = D(H, P_1)$. Ou bien H_1 coïncide avec H, et f est identique sur H à f_1, donc de classe $\leqq 1$. Ou bien H_1 ne coïncide pas avec H, et comme H_1 est fermé, il y a (§ 8) une portion K de H ne contenant aucun point de H_1 et par suite de P_1; sur K, f est identique à f_2, donc de classe $\leqq 1$.

Le théorème est donc établi; il s'étend de suite au cas de h fonctions superposées, et l'on a l'énoncé suivant: Soient $f_1, f_2, \ldots, f_h$ des fonctions de classe $\leqq 1$ respectivement définies sur les ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots, P_h$. Prenons f égale à f_i aux points de P_i qui ne font pas partie de $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$. La fonction f, définie sur $M(P_1, P_2, \ldots, P_h)$, est de classe $\leqq 1$.

16. Nous nous sommes occupés, dans les § 13, 14, 15, de fonctions définies en tous les points d'un ensemble *fermé*. Nous allons maintenant, dans le cas où l'on donne une fonction sur un ensemble P *quelconque*, étudier la question suivante: à quelles conditions est-il possible de compléter la définition de f aux points de l'ensemble fermé P^0 où elle ne se trouve pas définie, de manière à obtenir une fonction F de classe 0, ou de classe $\leqq 1$, etc.? Si ce problème est possible, nous conviendrons de dire que la fonction f, *incomplètement définie sur* P^0, est de classe 0, 1, ... suivant le cas.

Le cas des fonctions continues se traite sans difficulté. Il est évidemment nécessaire, pour que f, définie sur l'ensemble P quelconque, soit de classe 0, qu'en chaque point A de P^0 on ait: $\omega(f, P, A) = 0$. Cette condition est aussi suffisante, car si elle est remplie, il suffit de poser, en tout point A de P^0:

$$F(A) = M(f, P, A) = m(f, P, A).$$

La fonction F, continue sur P^0, est identique à f sur P.

17. Pour traiter le cas des fonctions de classe 1, nous donnerons d'abord une extension aux notions rappelées au § 13.

Soit H un ensemble parfait, f se trouvant définie seulement en certains points de H, formant un ensemble I; l'ensemble I^0 est contenu dans H; nous dirons que f, au voisinage d'un point de I^0, se trouve définie sur H, et au voisinage d'un point de $H - I^0$, n'est pas définie. En chaque point A de I^0 existent des valeurs déterminées pour le maximum, le minimum et l'oscillation de f relativement à I; nous désignerons ces nombres par $M(f, H, A)$, $m(f, H, A)$, $\omega(f, H, A)$.

Nous dirons que f est *ponctuellement discontinue sur* H si l'ensemble des points où $\omega(f, H, A) \geq \sigma$ $(\sigma > 0)$, est non dense dans H; sinon, f sera dite *totalement discontinue*. Cette définition comprend évidemment la définition relative au cas où f est complètement définie sur H.

Si f est ponctuellement discontinue sur H, l'ensemble K des points de discontinuité est de première catégorie par rapport à H; un point de $H - K$ est, ou bien un point de continuité pour f, ou bien un point au voisinage duquel f n'est pas définie. Si f est totalement discontinue, il y a une portion H_1 de H et un nombre positif λ tel qu'en tout point de H_1, l'oscillation de f est $\geq \lambda$.

18. Etant donnée une fonction f sur un ensemble P quelconque, s'il existe une fonction F définie sur l'ensemble fermé P^0, égale à f sur P, et de classe ≤ 1, cette fonction F, d'après le théorème I, doit être ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait H contenu dans P^0: donc f doit aussi être, sur tout ensemble parfait, ponctuellement discontinue, au sens étendu du § 17. *Je dis que cette condition nécessaire est aussi suffisante.*

Supposons donc f ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. Je vais tout d'abord déterminer, étant donné un nombre positif σ, une fonction F_0 définie en tout point de P^0, différant de f de moins de σ en tout point de P, de classe ≤ 1, et enfin comprise entre les bornes de f.

Définissons des ensembles fermés:

$$P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_\alpha,\ \ldots \tag{1}$$

au moyen des trois conventions suivantes:

1° $P_0 = P^0$.

2° $P_{\alpha+1}$ est, quel que soit α, l'ensemble des points A de P_α^Ω où l'on a:

$$\omega(f, P_\alpha^\Omega, A) \geq \sigma.$$

3° Si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les ensembles d'indice inférieur à α.

On voit que, si P_α^Ω existe, f étant ponctuellement discontinue sur cet ensemble, $P_{\alpha+1}$ est non dense dans P_α^Ω, et l'on en déduit que les ensembles (1) sont nuls [1] à partir d'un certain indice β; par suite, on peut écrire:

$$P_0 = P^0 = \sum_\alpha (P_\alpha - P_{\alpha+1}) \qquad \alpha = 0, 1, \ldots < \beta.$$

Chaque ensemble $P_\alpha - P_{\alpha+1}$ se décompose comme il suit:

$$P_\alpha - P_{\alpha+1} = \sum_\gamma (P_\alpha^\gamma - P_\alpha^{\gamma+1}) + (P_\alpha^\Omega - P_{\alpha+1}).$$

Pour définir F_0 en chaque point A de P^0, donnons-nous tout d'abord un nombre C compris entre les bornes de f, et distinguons deux cas:

1° Le point A fait partie d'un ensemble $P_\alpha^\gamma - P_\alpha^{\gamma+1}$. Ce cas se subdivise en deux:

a) f est définie en A. Nous posons: $F_0(A) = f(A)$.

b) f n'est pas définie en A. Nous posons: $F_0(A) = C$.

2° Le point A fait partie d'un ensemble $P_\alpha^\Omega - P_{\alpha+1}$. Soit H_α l'ensemble des points de P_α^Ω où f est définie; en chaque point A de H_α^0 existe une valeur pour $m(f, P_\alpha^\Omega, A)$. Subdivisons en deux cas:

c) A fait partie de H_α^0. Nous posons: $F_0(A) = m(f, P_\alpha^\Omega, A)$.

d) A ne fait pas partie de H_α^0. Nous posons: $F_0(A) = C$.

On voit que si A fait partie de H_α, et ne fait pas partie de $P_{\alpha+1}$, ensemble des points de P_α^Ω où $\omega(f, P_\alpha^\Omega, A) \geqq \sigma$, on a:

$$M(f, P_\alpha^\Omega, A) - m(f, P_\alpha^\Omega, A) < \sigma,$$

d'où il résulte:

$$0 \leqq f(A) - F_0(A) < \sigma. \tag{2}$$

Cette condition est remplie aussi dans le cas a); elle est donc remplie en tout point où f se trouve définie. F_0 est évidemment compris entre les bornes de f. Il reste à montrer que F_0 est de classe $\leqq 1$, et pour cela (§ 15), que dans tout ensemble parfait H existe une portion sur laquelle

[1] Cf. loc. cit., § 74, p. 117.

F_0 est de classe $\leqq 1$. H étant un ensemble parfait quelconque contenu dans $P^0 = P_0$, posons: $H_\alpha = D(H, P_\alpha)$. On en déduit:

$$H_\alpha - H_{\alpha+1} = D(H, P_\alpha - P_{\alpha+1})$$

et par suite:

$$H = \sum_\alpha (H_\alpha - H_{\alpha+1}) \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, < \beta.$$

Les ensembles $H_\alpha - H_{\alpha+1}$ ne peuvent être tous nuls; soit η le plus petit des nombres pour lesquels $H_\alpha - H_{\alpha+1}$ n'est pas nul. On a:

$$H = H_0 = H_1 = \ldots = H_\eta > H_{\eta+1}.$$

De $H = H_\eta \leqq P_\eta$ on déduit: $H^\Omega \leqq P_\eta^\Omega$, et comme H est parfait:

$$H = H^\Omega \leqq P_\eta^\Omega.$$

Comme l'ensemble fermé $H_{\eta+1} = D(H, P_{\eta+1})$ ne coïncide pas avec H, il y a une portion K de H qui ne contient aucun point de $H_{\eta+1}$, par suite aucun point de $P_{\eta+1}$. L'ensemble parfait K est contenu dans P_η^Ω et ne contient aucun point de $P_{\eta+1}$; donc, d'après les définitions c) et d), F_0 est égal sur K à la constante C, sauf aux points A de l'ensemble fermé $D(H_\eta^0, K)$, où F_0 est égal à $m(f, P_\eta^\Omega, A)$; cette dernière fonction est semi-continue inférieurement, par suite de classe $\leqq 1$, sur H_η^0 et aussi sur $D(H_\eta^0, K)$; ainsi F_0 est obtenu, sur K, par la superposition de cette fonction à la fonction constante C; donc (§ 15), F_0 est de classe $\leqq 1$ sur K, qui est une portion de H. Ainsi F_0 remplit toutes les conditions indiquées.

Posons, en tout point de P:

$$f = F_0 + \varphi_1.$$

On a, d'après (2):

$$0 \leqq \varphi_1 < \sigma.$$

La fonction φ_1 définie sur P est ponctuellement discontinue par rapport à tout ensemble parfait H, car l'ensemble des points de discontinuité de $\varphi_1 = f - F_0$, ne pouvant comprendre que des points de discontinuité de f ou de F_0, est de première catégorie par rapport à H. On peut donc appliquer la méthode précédente à φ_1 et, remplaçant σ par $\frac{\sigma}{2}$, déterminer une fonction F_1 de classe $\leqq 1$ définie sur P^0 telle que:

$$\psi_1 = F_1 + \psi_2, \qquad 0 \leq \psi_2 < \frac{\sigma}{2}, \qquad 0 \leq F_1 \leq \sigma.$$

En continuant l'application de la méthode, en obtient successivement:

$$\psi_2 = F_2 + \psi_3, \qquad 0 \leq \psi_3 < \frac{\sigma}{2^2}, \qquad 0 \leq F_2 \leq \frac{\sigma}{2},$$

$$\vdots$$

$$\psi_i = F_i + \psi_{i+1}, \qquad 0 \leq \psi_{i+1} < \frac{\sigma}{2^i}, \qquad 0 \leq F_i \leq \frac{\sigma}{2^{i-1}},$$

$$\vdots$$

Les F_i sont des fonctions de classe ≤ 1 définies sur P^0, et forment une série uniformément convergente; donc la fonction

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_i + \ldots$$

est définie sur P^0 et est de classe ≤ 1.

On a, en tout point de P:

$$f = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_i + \psi_{i+1},$$

et comme ψ_{i+1} tend vers 0, il en résulte: $f = F$.

En résumé, on a déterminé une fonction F de classe ≤ 1 sur P^0, égale à f en tout point de P, ce qui démontre la proposition énoncée.

CHAPITRE IV.

Propriété commune aux fonctions de E.

19. Soit H un ensemble parfait; supposons qu'une fonction f soit définie en tous les points de H.

Je désigne par $M'(f, H)$ la borne supérieure des nombres λ tels que l'ensemble des points de H où $f > \lambda$ est de deuxième catégorie. L'ensemble des points où $f > M' - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$, est de deuxième catégorie. L'ensemble des points où $f > M' + \varepsilon$ est de première catégorie; ce dernier

ensemble, qui dépend de ε, et ne peut que s'accroître quand ε décroît, a pour limite, quand ε tend vers o, l'ensemble des points où $f > M'$, lequel est par suite de première catégorie (§ 9). En résumé, il existe un nombre $M'(f, H)$ tel que l'ensemble des points où $f > M'(f, H)$ est de première catégorie, tandis que l'ensemble des points où $f > M'(f, H) - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie. Cette double propriété ne peut évidemment appartenir qu'à un seul nombre, elle caractérise donc le nombre $M'(f, H)$.

On a évidemment: $M(f, H) > M'(f, H)$.

De la même manière, on voit qu'il existe un nombre déterminé $m'(f, H)$ caractérisé par ce double fait que l'ensemble des points où $f < m'(f, H)$ est de première catégorie dans H, tandis que l'ensemble des points où $f < m'(f, H) + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie. On a: $m'(f, H) \geqq m(f, H)$.

Je dis qu'on a: $M'(f, H) > m'(f, H)$. En effet, l'ensemble Q des points où $f > M'$ est de première catégorie; donc l'ensemble $H - Q$ est de deuxième catégorie, et en chaque point de cet ensemble, on a $f \leqq M'$. Donc, d'après la propriété caractéristique de m', on a $M' \geqq m'$.

On a donc:

$$M(f, H) \geqq M'(f, H) > m'(f, H) \geqq m(f, H).$$

Posons:

$$\omega'(f, H) = M'(f, H) - m'(f, H);$$

nous aurons:

$$\omega'(f, H) \leq \omega(f, H).$$

Nous dirons que M', m', ω', *sont le maximum, le minimum, l'oscillation de f sur H, quand on néglige les ensembles de première catégorie.* Remarquons que si P est un ensemble de première catégorie dans H, on peut, dans la définition de M', m', ω', faire complètement abstraction des valeurs de f aux points de P; de plus on a:

$$M(f, H - P) \geqq M'(f, H), \qquad m(f, H - P) \leqq m'(f, H),$$

$$\omega(f, H - P) \geqq \omega'(f, H).$$

20. Je dis que si H_1 est une *portion* (§ 8) de H, on a

$$M'(f, H_1) \leqq M'(f, H).$$

En effet, l'ensemble des points de H où $f > M'(f, H)$ est de première catégorie dans H, donc (§ 9) la partie de cet ensemble contenue dans H_1 est aussi de première catégorie dans H_1, par suite le nombre $M'(f, H_1)$ ne peut surpasser le nombre $M'(f, H)$.[1]

On a, dans les mêmes conditions:

$$m'(f, H_1) \geqq m'(f, H) \quad \text{et} \quad \omega'(f, H_1) \leqq \omega'(f, H).$$

Cela posé, soit A un point de H. Désignons par H_ρ la portion de H déterminée par la sphère Σ de centre A et de rayon ρ. Quand ρ décroît et tend vers 0, les nombres $M'(f, H_\rho)$, $\omega'(f, H_\rho)$ ne croissent pas, le nombre $m'(f, H_\rho)$ ne décroît pas; ces trois nombres ont donc des limites, que nous désignons par:

$$M'(f, H, A), \qquad m'(f, H, A), \qquad \omega'(f, H, A) = M'(f, H, A) - m'(f, H, A).$$

D'après ces définitions, si un point A de H est *intérieur* à une sphère S, et si H_1 est la portion de H déterminée par S, on a:

$$M'(f, H, A) \leqq M'(f, H_1), \qquad m'(f, H, A) \geqq m'(f, H_1),$$
$$\omega'(f, H, A) \leqq \omega'(f, H_1).$$

21. Le nombre $M'(f, H, A)$, défini en chaque point A de H, constitue une fonction φ', qui fait évidemment partie de la catégorie de fonctions étudiées au § 14. Donc φ' est semi-continue supérieurement. De même, $\psi' = m'(f, H, A)$ est semi-continue inférieurement, et enfin $\omega' = \varphi' - \psi'$ est semi-continue supérieurement.

En chaque point de H, on peut avoir $f > \varphi'$ ou bien $f \leqq \varphi'$, mais je dis que *l'ensemble des points où $f > \varphi'$ est de première catégorie dans H.*

Pour le montrer, considérons[2] l'ensemble (Δ) des cubes:

$$\frac{a_i - 1}{2^p} < x_i \leqq \frac{a_i + 1}{2^p} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

[1] Mais, à l'inverse de ce qui a lieu pour la fonction M, du fait qu'un ensemble parfait K est contenu dans H, ne résulte nullement la condition $M'(f, K) \leqq M'(f, H)$ Par exemple, soit $f = 0$ aux points de l'ensemble H des points du segment $(0, 1)$, sauf aux points d'un ensemble parfait non dense K, où $f = 1$. On a: $M'(f, H) = 0$ et $M'(f, K) = 1 > M'(f, H)$.

[2] loc. cit., § 61, p. 101.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant entiers, p étant un entier positif. Cet ensemble est dénombrable et a la propriété suivante: si A est un point, et si Σ est une sphère de centre A, il est possible de trouver un domaine Δ auquel A est intérieur et tout entier contenu dans Σ.

En désignant les domaines de (Δ) par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i, \ldots$, soit H_i la portion de H déterminée par Δ_i si cette portion existe; le nombre $M'(f, H_i)$ est alors déterminé, et l'ensemble K_i des points de H_i où l'on a $f > M'(f, H_i)$ est de première catégorie dans H_i, par suite dans H. L'ensemble

$$K = \mathfrak{M}(K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots,$$

est donc aussi de première catégorie dans H. Je dis que cet ensemble contient tous les points de H où $f > \varphi'$.

En effet, soit A un tel point. On peut poser:

$$f(A) = \varphi'(A) + \alpha, \qquad \alpha > 0.$$

Soit ε tel que: $0 < \varepsilon < \alpha$. Nous pouvons déterminer une sphère Σ de centre A telle qu'on ait, R étant la portion de H déterminée par Σ:

$$M'(f, R) < \varphi'(A) + \varepsilon,$$

et il existe un domaine de l'ensemble (Δ) auquel A est intérieur et contenu dans Σ; soit Δ_j un tel domaine; H_j est une portion de R et l'on a:

$$M'(f, H_j) \leq M'(f, R) < \varphi'(A) + \varepsilon < \varphi'(A) + \alpha = f(A).$$

Ainsi, au point A, on a $f(A) > M'(f, H_j)$, ce qui montre que A fait partie de K_j, et par suite de K.

L'ensemble des points de H où $f > \varphi'$, étant compris dans K, est de première catégorie. Il en est de même pour l'ensemble des points où $f < \psi'$. Soit P la réunion de ces deux ensembles, on voit qu'*il y a un certain ensemble P de première catégorie dans H, tel qu'en tout point A de $H - P$, on a:*

$$\psi'(A) \leq f(A) \leq \varphi'(A).$$

22. La fonction φ', définie dans ce qui précède, possède, outre la semi-continuité supérieure, une propriété spéciale, que nous allons établir. Nous avons d'abord, en vertu de cette première propriété:

$$\text{(1)} \qquad \varphi'(A) = M(\varphi', A) \geq M'(\varphi', A).$$

D'autre part, dans une sphère S de centre A déterminant une portion R de H, l'ensemble des points où $f > \varphi'$ est de première catégorie, on peut le négliger dans la définition des nombres $M'(f, R)$ et $M'(\varphi', R)$; comme en tous les autres points où f est définie, $f \leqq \varphi'$, on a:

$$M'[f, R] \leqq M'[\varphi', R].$$

En faisant tendre le rayon de S vers 0, cette inégalité donne, pour les limites des deux membres:

$$(2) \qquad \varphi'(A) = M'[f, A] \leqq M'[\varphi', A].$$

De (1) et (2) résulte:

$$\varphi'(A) = M(\varphi', A) = M'(\varphi', A),$$

propriété plus particulière que la semi-continuité supérieure.

23. On a vu, dans le chapitre III, l'importance de la notion de *discontinuité ponctuelle* d'une fonction f sur un ensemble parfait H; cette propriété s'exprime par la condition que, H_1 étant une portion quelconque de H, on a:

$$m[\omega(f, H, A), H_1] = 0$$

ou encore

$$m[\omega(f, H, A), H, A] = 0$$

en tout point A de H.

D'une manière analogue, considérons une fonction f définie sur H et telle qu'on ait:

$$m[\omega'(f, H, A), H_1] = 0$$

pour toute portion H_1 de H, ou, ce qui revient au même,

$$m[\omega'(f, H, A), H, A] = 0$$

pour tout point A de H. Pour abréger, nous conviendrons de dire que f satisfait dans ce cas à la condition

$$(1) \qquad m[\omega'(f)] = 0$$

sur l'ensemble H.

Remarquons que, en vertu de la propriété exprimée par $\omega' \leqq \omega$, les fonctions *ponctuellement discontinues* sur H satisfont à la condition (1), de sorte que les fonctions de classe 0 et 1 possèdent, sur tout ensemble parfait H, la propriété (1).

Si f satisfait à la condition (1) sur H, l'ensemble fermé des points où $\omega'(f, H, A) \geqq \sigma$ $(\sigma > 0)$ est non dense dans H, car sans cela, dans une certaine portion de H, le minimum de $\omega'(f, H, A)$ serait $\geqq \sigma$; donc l'ensemble Q des points où $\omega' > 0$ est de première catégorie, et en tout point de $H - Q$, on a $\omega' = 0$, d'où $\varphi' = \psi'$.

D'autre part, d'après le § 21, en tout point de $H - P$, P étant un certain ensemble de première catégorie, on a: $\psi' \leqq f \leqq \varphi'$. L'ensemble $\Pi = M(P, Q)$ est encore de première catégorie, et, en tout point de $H - \Pi$, on a:

$$f = \varphi' = \psi'.$$

D'après cela, f, étant sur $H - \Pi$ égale à φ' et à ψ', est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement en tout point A de $H - \Pi$ par rapport à $H - \Pi$, c'est-à-dire continue.

En résumé, *si f satisfait sur H à $m(\omega'(f)) = 0$, il y a un ensemble de première catégorie Π tel qu'en tout point A de $H - \Pi$, f est continue par rapport à $H - \Pi$.*

24. Réciproquement, supposons cette dernière condition vérifiée. Soit A_0 un point de $H - \Pi$, et soit $\varepsilon > 0$; il y a une sphère Σ de centre A_0 telle que, dans la portion H_1 de H déterminée par Σ, on a, pour tout point A de $H - \Pi$:

$$f(A_0) - \varepsilon < f(A) < f(A_0) + \varepsilon.$$

Comme Π est de première catégorie dans H, on peut en faire abstraction dans la définition des nombres $M'(f, H_1)$, $m'(f, H_1)$, lesquels sont par suite compris entre $f(A_0) - \varepsilon$ et $f(A_0) + \varepsilon$; il en est a fortiori de même pour les nombres $\varphi'(A_0) = M'(f, H, A_0)$, et $\psi'(A_0) = m'(f, H, A_0)$ compris entre les précédents; le résultat étant vrai quel que soit ε, on a:

$$f(A_0) = \varphi'(A_0) = \psi'(A_0),$$

d'où:

$$\omega'(A_0) = 0.$$

A_0 étant un point quelconque de $H - \Pi$. Enfin, $H - \Pi$ étant dense dans toute portion de H, la fonction ω' a son minimum nul dans toute portion de H, et par suite en tout point, c'est-à-dire satisfait à la condition (1): $m(\omega'(f)) = 0$.

La fonction φ', étant semi-continue, est de classe ≤ 1; donc, *si f satisfait à $m(\omega'(f)) = 0$, f diffère d'une certaine fonction de classe ≤ 1 aux points d'un ensemble de première catégorie.*

Remarquons, en dernier lieu, que la condition (1) est invariante par rapport aux transformations T et T^{-1} du § 4; cela résulte de ce que, si A est un point de $H - \Pi$ où f est continue par rapport à $H - \Pi$, la transformée de f par T ou par T^{-1} a la même propriété.

25. Nous allons démontrer que *la condition $m(\omega'(f)) = 0$ se conserve à la limite*, c'est-à-dire qu'on a le théorème suivant:

Théorème. *Si, sur un ensemble parfait P, une suite de fonctions f_1, $f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ a une limite f, et si chacune des fonctions f_i satisfait à la condition $m(\omega'(f_i)) = 0$, il en est de même de f.*

Dans la démonstration de ce théorème, nous supposerons que les fonctions f_i et f sont *finies*, ce qui n'enlèvera rien à la généralité du résultat.

Tout revient à montrer que l'hypothèse contraire à l'énoncé conduit à une contradiction; cette hypothèse est qu'il existe une portion H de P dans laquelle on a:

$$m[\omega'(f, P, A), H] > 0. \tag{2}$$

Prenons deux nombres λ et μ tels qu'on ait:

$$m[\omega'(f, P, A), H] > 2\lambda > 2\mu > 0$$

et posons:

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon, \qquad (\varepsilon > 0). \tag{3}$$

Pour toute portion H' de H, on a:

$$\omega'(f, H') > 2\lambda. \tag{4}$$

D'autre part, à la fonction f_i correspond un ensemble Π_i de première catégorie dans H tel qu'en tout point de $H - \Pi_i$, f_i est continue par rapport à $H - \Pi_i$. Si l'on pose: $\Pi = M(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_i, \ldots)$, l'ensemble Π est de

première catégorie; quel que soit i et quel que soit le point A de $H - H$ (qui est contenu dans tous les $H - H_i$), *f_i est continue en A par rapport à $H - H$.*

Cela posé, soit p un entier, et soit H_1 une portion quelconque de H, déterminée par une sphère Σ_1. L'ensemble $H - H$ étant partout dense dans H, on peut choisir un point A_0 qui fasse partie de $H - H$ et soit *intérieur à* Σ_1. Comme on a: $\lim f_\nu(A_0) = f(A_0)$, on peut déterminer un entier $\alpha > p$ tel que:

$$(5) \qquad |f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon.$$

La fonction f_α étant continue en A_0 par rapport à $H - H$, on peut trouver une sphère Σ_2 de centre A_0, contenue dans Σ_1, telle que, A étant un point quelconque de $H - H$ intérieur à Σ_2, on ait:

$$(6) \qquad |f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon.$$

Prenons une sphère Σ_3 de centre A_0 et intérieure à Σ_2, et soit H_3 la portion de H déterminée par Σ_3. D'après (4), on a: $\omega'(f, H_3) > 2\lambda$.

Or, si l'on pose: $Q = D(H - H, H_3)$, on a, d'après une remarque du § 19:

$$\omega(f, Q) \geqq \omega'(f, H_3) > 2\lambda.$$

Les valeurs de f aux points de Q forment donc un ensemble dont l'oscillation surpasse 2λ; donc, d'après un lemme connu,[1] l'une de ces valeurs diffère du nombre $f(A_0)$ de plus de λ, c'est-à-dire qu'on peut trouver un point A_1 de Q tel que:

$$(7) \qquad |f(A_1) - f(A_0)| > \lambda.$$

On a: $\lim f_\nu(A_1) = f(A_1)$; on peut donc choisir un entier $\beta > p$ tel que:

$$(8) \qquad |f_\beta(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon.$$

Enfin, A_1, qui appartient à Q, par suite à Σ_3, est intérieur à Σ_2, et appartient aussi à $H - H$; f_β est donc continue en A_1 par rapport à $H - H$; déterminons une sphère Σ_4 de centre A_1, contenue dans Σ_2, et telle que, A étant un point quelconque de $H - H$ contenu dans Σ_4, on ait:

$$(9) \qquad |f_\beta(A) - f_\beta(A_1)| < \varepsilon.$$

[1] [illegible]

Comme Σ_4 est contenu dans Σ_2, le même point A vérifie aussi la relation (6).

En combinant, d'une part (5) et (6), d'autre part (8) et (9), on trouve:

$$|f_\alpha(A) - f(A_0)| < 2\varepsilon, \qquad |f_\beta(A) - f(A_1)| < 2\varepsilon,$$

inégalités qui, combinées avec (7):

$$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda = \mu + 4\varepsilon,$$

donnent, *pour tout point A de $H - H$ contenu dans Σ_4*:

$$|f_\alpha(A) - f_\beta(A)| > \mu, \tag{10}$$

et par suite, comme α et β sont supérieurs à p:

$$\omega[f_p(A), f_{p+1}(A), \ldots] > \mu. \tag{11}$$

Ainsi, p étant donné, toute portion H_1 de H contient une portion dont tous les points, sauf peut-être ceux de H, satisfont à (11). Par suite, l'ensemble K_p des points de H qui ne satisfont pas à (11), se compose d'un ensemble non dense dans H et d'un ensemble compris dans H, donc est de première catégorie. Donnons à p toutes les valeurs possibles, et soit:

$$K = M(K_1, K_2, \ldots, K_p, \ldots).$$

K est de première catégorie par rapport à H. L'ensemble complémentaire $H - K$ contient donc effectivement des points, lesquels ne font partie d'aucun des ensembles K_p; si A est l'un de ces points, A satisfait à (11), quel que soit p, ce qui est contradictoire avec le fait que $f_\nu(A)$ tend vers une limite finie.

Ainsi, l'hypothèse (2) conduit à une contradiction.

On a donc, dans toute portion H de P:

$$m[\omega'(f, P, A), H] = 0.$$

Autrement dit, la condition $m(\omega'(f)) = 0$ se conserve à la limite.

26. Cette propriété appartient à toutes les fonctions de l'ensemble E défini au § 1. En effet, elle appartient aux fonctions des classes 0 et 1; supposons établi qu'elle appartient à toutes les fonctions de classes inférieures à α, et montrons qu'elle appartient aussi aux fonctions de classe

α. Soit f une fonction de classe α; il existe une suite $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ tendant vers f, chaque fonction f_ν appartenant à une classe $< \alpha$, et par suite satisfaisant à $m[\omega'(f_\nu)] = 0$. Donc la fonction $f = \lim f_\nu$ satisfait à la même condition.

D'après cela, on serait assuré qu'une fonction f n'appartient pas à l'ensemble E si, sur un certain ensemble parfait H, f satisfaisait à la condition: $m[\omega'(f, H, A), H] > 0$. Par exemple, si l'on pouvait partager H en deux ensembles K et $H - K$ qui, dans chaque portion de H, seraient tous deux de deuxième catégorie, en posant $f = 0$ sur H, $f = 1$ sur $H - K$, on aurait, dans toute portion, et par suite en tout point de H: $M' = 1$, $m' = 0$, d'où $\omega' = 1$, et f ne ferait pas partie de E.

CHAPITRE V.

Premières recherches sur les fonctions de classes 2 et 3.

27. Abordons maintenant la recherche des conditions suffisantes pour qu'une fonction f définie sur un ensemble fermé P de l'espace à n dimensions soit de classe $2, 3, \ldots$. D'après les résultats du chapitre précédent, nous devons nous borner à considérer des fonctions satisfaisant, sur tout ensemble parfait, à la condition $m(\omega'(f)) = 0$, puisque ce sont les seules qui appartiennent à l'ensemble E. D'un autre côté, d'après le § 15, une fonction f définie aux points d'un ensemble fermé P est de classe $\leqq 1$ si elle est de classe $\leqq 1$ sur l'ensemble parfait P^Ω; a fortiori, f est de classe $\leqq \alpha$ $(\alpha > 1)$ sur P si elle est de classe $\leqq \alpha$ sur P^Ω; nous pouvons donc, dans la suite, nous borner à considérer des fonctions définies sur un ensemble *parfait*.

Soit donc f définie sur l'ensemble parfait P et satisfaisant à la condition: $m[\omega'(f)] = 0$ sur P. D'après le § 24, il existe sur P une fonction φ de classe $\leqq 1$ telle que f ne diffère de φ qu'aux points d'un ensemble de première catégorie K. Soit $K = M(K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots)$, les K_i étant non denses dans P. Remplaçons chaque ensemble K_i par son dérivé d'ordre 0, K_i^0, qui est aussi non dense dans P, de plus, est fermé, et contient K_i, de sorte que si $K' = M(K_1^0, K_2^0, \ldots, K_i^0, \ldots)$, on a $f = \varphi$ en tout point

de $P - K'$. Chaque ensemble K_i^0 se compose de l'ensemble parfait K_i^Ω (s'il existe), plus un ensemble dénombrable, soit H_i. Posons:

$$H = M(H_1, \ldots, H_i, \ldots) \quad \text{et} \quad K'' = M(K_1^\Omega, \ldots, K_i^\Omega, \ldots).$$

On a:

$$K' = M(K'', H)$$

et H est dénombrable. En résumé, *on peut supposer que l'ensemble de première catégorie K tel que $f = \varphi$ aux points de $P - K$ se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits, plus un ensemble dénombrable.* Nous sommes conduits à étudier f sur chacun des ensembles K_i^0, et pour cela sur chacun des ensembles parfaits K_i^Ω.

Nous devons supposer que f satisfait sur K_i^Ω à la condition $m(\omega'(f)) = 0$, de telle sorte qu'on peut déterminer une fonction φ_i de première classe sur K_i^Ω et une infinité dénombrable d'ensembles fermés et non denses dans K_i^Ω, soit $K_{i1}, K_{i2}, \ldots, K_{ij}, \ldots$, avec la condition que $f = \varphi_i$ en tout point de K_i^Ω qui n'appartient pas à l'un des ensembles K_{ij}. On sera conduit ensuite à étudier f sur les ensembles K_{ij}^Ω, et à introduire de nouveaux ensembles non denses par rapport aux ensembles K_{ij}^Ω, et ainsi de suite.

Pour montrer l'utilité de ce procédé, démontrons d'abord un théorème qui nous permettra de définir des fonctions de classe 2.

28. **Théorème.** Soit P_0 un ensemble fermé, et $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ une infinité dénombrable d'ensembles fermés tous contenus dans P_0; soit f_0 une fonction définie sur P_0 et de classe $\leqq 2$, et $f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$ des fonctions respectivement définies sur $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ et toutes de classes $\leqq 2$. La fonction f qui est égale à f_1 sur P_1, à f_i $(i = 2, 3, \ldots)$ aux points de P_i qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$, enfin à f_0 sur les points de P_0 qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

En effet, d'après les hypothèses de l'énoncé, h étant un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, i, \ldots$, f_h est de classe $\leqq 2$ sur P_h. Il y a donc une suite de fonctions de classe $\leqq 1$ tendant vers f_h, soit:

$$f_{1,h}, f_{2,h}, \ldots, f_{j,h}, \ldots.$$

En tout point A de P_h, on a: $\lim\limits_{j=\infty} f_{jh}(A) = f_h(A)$.

Cela posé, définissons des fonctions φ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de la manière suivante: φ_ν est égale à $f_{\nu,1}$ sur P_1, à $f_{\nu,h}$ $(h = 2, 3, \ldots, \nu)$ sur les points de P_h qui n'appartiennent à aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}$, enfin à $f_{\nu,0}$ sur les points de P_0 qui n'appartiennent à aucun des ensembles P_1, $P_2, \ldots, P_\nu$. La fonction φ_ν, qui est ainsi définie sur P_0, est de classe $\leqq 1$, d'après le § 15, car elle est obtenue par superposition des fonctions de classe $\leqq 1$: $f_{\nu,1}, f_{\nu,2}, \ldots, f_{\nu,\nu}, f_{\nu,0}$. Je dis en outre qu'on a: $\lim \varphi_\nu = f$.

En effet, soit A un point de P_0. Si A fait partie d'un des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, soit i le plus petit indice tel que A appartient à P_i; alors A n'appartient à aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ (dans l'hypothèse $i > 1$). D'après la définition de φ_ν, dès que $\nu \geqq i$, on a: $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,i}(A)$. On a donc: $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = \lim\limits_{\nu=\infty} f_{\nu,i}(A) = f_i(A)$; or, d'après la définition de f, on a aussi $f(A) = f_i(A)$; donc $\lim \varphi_\nu(A) = f(A)$.

Si A ne fait partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, on a, quel que soit ν: $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,0}(A)$; donc, on a: $\lim \varphi_\nu(A) = \lim f_{\nu,0}(A) = f_0(A)$; on a aussi, d'autre part, $f(A) = f_0(A)$, par suite $\lim \varphi_\nu(A) = f(A)$.

En résumé, f est la limite de φ_ν, qui est de classe $\leqq 1$, donc f est de classe $\leqq 2$.

29. Indiquons des cas particuliers de la proposition générale qui précède.

Si f_0 est de classe $\leqq 2$ sur l'ensemble fermé P_0, la fonction f obtenue en remplaçant par des valeurs arbitraires les valeurs de f_0 aux points d'un ensemble *dénombrable* Q est de classe $\leqq 2$. En effet, soient $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ les points de Q; il suffit d'appliquer la proposition du § 28 en prenant $P_i = A_i$, et $f_i = f$. La proposition est vraie a fortiori si f_0 est de classe $\leqq 1$. On peut aussi conclure de ce qui précède que *si R est un ensemble dénombrable, la classe α d'une fonction f ne dépend pas de ses valeurs aux points de R, dès que $\alpha \geqq 2$.*

Reprenons maintenant le procédé du § 27. Partons d'une fonction f satisfaisant sur l'ensemble parfait P_0 à la condition $m[\omega'(f)] = 0$. Il existe, d'une part une fonction φ_0 de classe $\leqq 1$, d'autre part un ensemble de première catégorie dans P_0, soit P_1, tel qu'en tout point de $P_0 - P_1$, on a $f = \varphi_0$; de plus, d'après une remarque du § 27, on peut supposer que P_1 se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits

non denses dans P_0, soit $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. Si f se trouve être de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles p_i, l'application du théorème du § 28 (en remplaçant f_0 par φ_0, et tous les f_i $(i > 0)$ par f) montre que f est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

Sinon, nous traiterons chaque ensemble parfait p_i comme nous avons traité P_0; nous définissons donc une fonction φ_i de classe $\leqq 1$ sur p_i, et un ensemble de première catégorie dans p_i, soit p'_i, tel que $f = \varphi_i$ en tout point de $p_i - p'_i$; en outre, p'_i se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans p_i, soit: $p_{i,1}, p_{i,2}, \ldots, p_{i,j}, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. Soit P_2 l'ensemble formé par la réunion de tous les ensembles à deux indices $p_{i,j}$. Supposons que f soit de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i,j}$; alors f est de classe $\leqq 2$ sur chacun des ensembles p_i, d'après le § 28; ce point étant établi, on voit, par une seconde application du même théorème, que f est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

Si les conditions précédentes ne sont pas remplies, c'est-à-dire si f n'est pas de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i,j}$, nous serons conduits à continuer l'application du procédé précédent; nous introduirons donc des fonctions $\varphi_{i,j}$ de classe $\leqq 1$ et des ensembles à trois indices $p_{i,j,k}$, puis s'il y a lieu, des fonctions $\varphi_{i,j,k}$, et des ensembles $p_{i,j,k,l}$. D'une manière générale, si nous avons été conduits à introduire l'ensemble parfait $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, et si f n'est pas de classe $\leqq 1$ sur cet ensemble, comme f satisfait sur cet ensemble à la condition $m[\omega'(f)] = 0$, il y a une fonction $\varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$ de classe $\leqq 1$ sur $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, et un ensemble de première catégorie par rapport à $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, soit $p'_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, tel qu'on a: $f = \varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$ en tout point de $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha} - p'_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$. L'ensemble $p'_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$ se compose, outre un certain ensemble dénombrable, d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$; nous les désignons par $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha,i_{\alpha+1}}$, l'indice $i_{\alpha+1}$ prenant les valeurs $1, 2, \ldots$. Désignons par P_α l'ensemble formé par la réunion des ensembles p à α indices.

Cela posé, si, par l'application du procédé dont la loi vient d'être indiquée, nous obtenons un ensemble P_h tel que f soit de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i_1,i_2,\ldots,i_h}$, dont se compose P_h, je dis que f est de classe $\leqq 2$ sur P_0. Il suffit en effet, pour le faire voir, d'appliquer successivement le théorème du § 28, d'abord à chacun des ensembles à $h - 1$ indices, ce qui montre que f est de classe $\leqq 2$ sur chacun de ces ensembles,

puis ensuite à chacun des ensembles à $h - 2$ indices, et ainsi de suite en remontant jusqu'à chacun des ensembles $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ et finalement à P_0.

30. Nous allons, pour éclaircir les généralités exposées dans ce qui précède, les appliquer à des exemples. Nous nous bornerons tout d'abord, pour plus de simplicité, à étudier des fonctions d'une seule variable x définies dans le champ $0 \leq x \leq 1$.

Je rappelle d'abord des résultats relatifs à la notion d'ensemble parfait non dense par rapport à un continu linéaire.[1]

Si P est un ensemble parfait non dense dans le segment de droite AB, il existe, sur AB, une infinité dénombrable d'intervalles, que j'appelle contigus à P, qui n'ont deux à deux aucun point commun, et tels que l'ensemble $AB - P$ est constitué par les points intérieurs à ces intervalles. L'ensemble P contient des points de deux sortes: 1° les points e, extrémités des intervalles contigus à P; 2° les points l, dont chacun est extérieur à tous ces intervalles. Chaque point de P, qu'il soit e ou l, est limite de points des deux catégories; mais, tandis qu'il y a, au voisinage d'un point l, des points de P, *à gauche et à droite de ce point,*[2] il n'y a, au voisinage d'un point e, de points de P que *d'un seul côté.* L'ensemble des points e est dénombrable.

31. Rappelons d'autre part certaines propriétés relatives à la représentation des nombres par des fractions continues, limitées ou illimitées. Nous poserons;

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_\nu + \cdots}}} = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots);$$

chaque nombre a_ν est un entier positif; les quotients incomplets $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ sont en nombre fini, ou en nombre infini.

Un nombre irrationnel de l'intervalle $(0, 1)$ est représentable d'une manière bien déterminée par une fraction continue illimitée $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$

[1] loc. cit., Ch. III, section II.

[2] Sauf dans le cas où le point coincide avec A ou B, extrémités du segment AB.

et réciproquement, de telle sorte qu'il y a une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble des nombres irrationnels du segment $(0, 1)$ et l'ensemble des suites infinies d'entiers positifs $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$.

Un nombre rationnel de l'intervalle $(0, 1)$ [les nombres 0 et 1 étant mis à part], est représentable d'une manière bien déterminée par une fraction continue limitée dont le dernier quotient est > 1; mais, si on supprime cette restriction, il y a, pour tout nombre rationnel, deux représentations possibles, car on a, si $a_p > 1$:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p) = (a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p - 1, 1).$$

Étant donné un système de h entiers positifs rangés dans un ordre déterminé, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, tous les nombres représentables par des fractions continues, limitées ou illimitées, commençant par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, sont compris dans la formule

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_h + y}}} \qquad \text{avec} \quad 0 \leqq y \leqq 1.$$

Ils forment donc, dans le segment représentatif $(0, 1)$, un intervalle continu, points extrêmes compris, que je désigne par $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, et dont les extrémités sont les deux points rationnels:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h) \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, 1).$$

Pour tout point intérieur à l'intervalle, on a: $0 < y < 1$, de sorte que la représentation d'un point *intérieur* à cet intervalle commence toujours par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$.

Soit A un point rationnel, admettant les deux représentations:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h) = (a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h - 1, 1) \quad [a_h > 1].$$

Le point A est l'extrémité commune des deux intervalles:

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h) \quad \text{et} \quad I(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h - 1, 1),$$

et ces deux intervalles sont situés de part et d'autre de A.

Soit B un point irrationnel, représenté par la fraction:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots).$$

Le point B est *intérieur* à chacun des intervalles:

$$I(a_1)\ ,\ I(a_1\ ,\ a_2)\ ,\ \dots\ ,\ I(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots,\ a_\nu)\ ,\ \dots$$

dont chacun est contenu dans le précédent, et c'est le seul point contenu dans tous ces intervalles.

Enfin, étant donnée une fraction continue, limitée ou illimitée, si on y remplace le quotient incomplet d'ordre h par un nombre plus grand, on augmente ou on diminue le nombre représenté suivant que h est pair ou impair.

32. Cela posé, donnons-nous d'une part un entier positif n, d'autre part un système de h entiers positifs dans un ordre donné, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h)$; je me propose d'étudier *l'ensemble Q des points représentables par des fractions continues limitées ou illimitées commençant par* $(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_h)$, *chacun des quotients suivants, s'il existe, étant $> n$.*

Tout d'abord, l'ensemble Q est évidemment compris dans l'intervalle $I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_h)$, de sorte que tout point, rationnel ou irrationnel, qui est en dehors de cet intervalle, ne fait pas partie de Q, et n'est pas point limite pour Q.

Étudions maintenant les points de cet intervalle, et en premier lieu, les points rationnels. En mettant à part pour l'instant les deux points extrêmes, tout point rationnel A de l'intervalle $I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_h)$ admet une représentation de la forme:

$$(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_h\ ,\ \beta_{h+1}\ ,\ \dots\ ,\ \beta_k) \quad \text{avec} \quad k > h \quad \text{et} \quad \beta_k > 1\,.$$

Le point A est donc l'extrémité commune de deux intervalles situés de part et d'autre de lui, savoir:

$$I_1 = I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_h\ ,\ \beta_{h+1}\ ,\ \dots\ ,\ \beta_k)$$

et

$$I_2 = I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_h\ ,\ \beta_{h+1}\ ,\ \dots\ ,\ \beta_{k-1}\ ,\ \beta_k - 1\ ,\ 1).$$

Un point *intérieur* à l'intervalle I_2 ne peut, dans aucun cas, faire partie de Q, car la fraction qui représente un tel point contient nécessairement un quotient $\leq n$, à savoir le quotient de rang $k+1$, qui est égal à 1.

En ce qui concerne I_1, deux cas sont à distinguer. Si A *ne fait pas partie de Q*, c'est que l'un des nombres $\beta_{h+1}\ ,\ \dots\ ,\ \beta_k$ est $\leq n$; alors, pour

tout point intérieur à I_1, il y a un quotient incomplet $\leq n$, tous ces points sont donc en dehors de Q, de sorte que le point A est *extérieur à* Q (§ 6). Si au contraire A *fait partie de* Q, les nombres $\beta_{h+1}, \ldots \beta_k$, sont supérieurs à n; considérons alors les points:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_k, \gamma)$$

où γ reçoit des valeurs supérieures à n et croissant indéfiniment, nous obtenons ainsi une suite de points distincts de A, qui appartiennent à Q et *qui tendent vers* A; donc A *est point limite pour* Q, *mais d'un seul côté.*

Nous avons laissé de côté les extrémités de l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$. Le point B: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, *fait partie de* Q; il est, d'une part, extrémité de l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h - 1, 1)$ si $\alpha_h > 1$ ou $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1} + 1)$ si $\alpha_h = 1$, dont aucun point intérieur ne fait partie de Q; d'autre part, il est limite de la suite de points de Q représentés par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \gamma)$, où γ croît indéfiniment, de sorte que B *est limite pour* Q, *mais d'un seul côté.* Quant au point $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, 1)$, *il ne fait pas partie de* Q, et comme il est l'extrémité des deux intervalles

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, 1) \quad \text{et} \quad I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_h + 1),$$

dont aucun point intérieur ne fait partie de Q, il est *extérieur à* Q. On a, en résumé, les résultats suivants, concernant les points rationnels du segment $(0, 1)$:

1° *Tout point rationnel de* Q *est limite pour* Q, *d'un seul côté.*

2° *Tout point rationnel qui ne fait pas partie de* Q *est extérieur à* Q.

Passons maintenant aux points irrationnels de l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$. Si C est un point irrationnel *ne faisant pas partie de* Q, la fraction correspondante est de la forme:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_k, \ldots)$$

avec la condition qu'un certain quotient β, soit β_k, est $\leq n$. Dans ces conditions, tous les points intérieurs à l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_k)$, auquel C est intérieur, sont en dehors de Q; donc C est *extérieur à* Q.

Si D est un *point irrationnel de* Q, la fraction correspondante est de la forme:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots, \beta_k, \ldots),$$

tous les β étant supérieurs à n. On obtiendra un autre point de Q en remplaçant un quelconque des nombres β, soit β_r, par un nombre supérieur; en prenant r assez grand, et successivement pair ou impair, ce nouveau point pourra être pris d'un côté ou d'autre de D, et aussi voisin qu'on voudra de D. Donc D est *limite pour* Q, et *des deux côtés*. En résumé:

3° *Tout point irrationnel de Q est limite pour Q, des deux côtés.*

4° *Tout point irrationnel qui ne fait pas partie de Q est extérieur à Q.*

Tirons maintenant des conclusions des propositions 1°, 2°, 3°, 4°. D'après 2° et 4°, tout point qui ne fait pas partie de Q est extérieur à Q, donc Q est *fermé*. D'après 1° et 3°, tout point de Q est limite pour Q, donc Q, qui est fermé, est *parfait*. D'après 1° et 2°, il y a, au voisinage de tout point rationnel, par suite dans toute portion du continu, un intervalle qui ne contient aucun point de Q, c'est-à-dire que Q est *non dense* par rapport au continu.

Ainsi, *Q est un ensemble parfait non dense dans le continu linéaire;* d'après le § 30, les points de Q sont de deux sortes, les points e, et les points l; d'après 1°, tout point rationnel de Q est un point e; d'après 3°, tout point irrationnel de Q est un point l; il en résulte que réciproquement tous les points e de Q sont rationnels, tous les points l de Q sont irrationnels. En résumé, on a la proposition suivante:

L'ensemble des points représentables par des fractions continues limitées ou illimitées commençant par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, les autres quotients étant supérieurs à n, est un ensemble parfait non dense, et ceux de ces points qui sont irrationnels constituent les points l de cet ensemble.

Nous désignerons dans la suite cet ensemble par $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, et l'ensemble de ses points l par $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$.

33. Supposons qu'on donne à n une valeur fixe, et qu'on fasse varier de toutes les manières possibles les entiers h, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$. On obtient ainsi une infinité dénombrable d'ensembles $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$. Je désigne par P_n l'ensemble formé par la réunion de tous les $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ correspondants. On reconnaît que:

Tout point de P_n est un point irrationnel représentable par une fraction continue dont tous les quotients incomplets surpassent n, à partir d'un

certain rang; et réciproquement, un point qui remplit ces conditions appartient à P_n.

Un point déterminé de P_n appartient évidemment à une infinité d'ensembles $p^{(n)}$, car soit $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$ ce point, les quotients de rang supérieur à ν étant supérieurs à n; le point fait partie de tous les ensembles $p^{(n)}[a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots, a_{\nu+k}]$, quel que soit k. Mais, comme nous allons le montrer, il est possible de choisir parmi les ensembles $p^{(n)}$, une série déterminée, dont la réunion constituera P_n, et telle qu'un point donné de P_n fasse partie d'un seul ensemble de cette série. De plus, en vue d'applications ultérieures, nous nous astreindrons à ce que, dans chaque ensemble de cette série, le nombre h des quotients incomplets qui ont des valeurs fixes soit au moins égal à n.

Prenons, parmi les ensembles $q^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$:

1° ceux d'entre eux pour lesquels $h = n$, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ prenant toutes les valeurs possibles.

2° ceux pour lesquels $h > n$, avec la condition $\alpha_h \leqq n$.

Appelons, pour abréger, *ensembles normaux* $q^{(n)}$ les ensembles $q^{(n)}$ qui viennent d'être définis, et *ensembles normaux* $p^{(n)}$ les $p^{(n)}$ correspondants.

Je dis qu'*un point déterminé A de P_n appartient à un et un seul ensemble normal $p^{(n)}$.* En effet, soit $(a_1, a_2, \ldots)$ ce point. Le seul ensemble $q^{(n)}$ qui remplit l'une des conditions 1° ou 2° et qui contient A est l'ensemble $q^{(n)}[a_1, a_2, \ldots, a_h]$, h étant le plus petit nombre supérieur ou égal à n, tel que tous les a de rang supérieur à h soient supérieurs à n.

D'après cela, deux ensembles normaux $p^{(n)}$ distincts n'ont aucun point commun, deux ensembles normaux $q^{(n)}$ distincts ne peuvent avoir en commun que des points rationnels.

34. D'après la propriété caractéristique des points de P_n, il est évident que P_{n+1} est contenu dans P_n. D'une manière plus détaillée, étudions la disposition d'un ensemble normal de P_{n+1} par rapport aux ensembles normaux de P_n.

Soit $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ un ensemble normal $q^{(n+1)}$; on a:

$$\text{soit} \quad k = n + 1, \quad \text{soit} \quad k > n + 1, \quad \text{avec} \quad \alpha_k \leqq n + 1.$$

Si les nombres $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_k$, sont tous supérieurs à n, posons: $h = n$; sinon, certains d'entre eux étant inférieurs ou égaux à n, prenons, parmi

ces derniers, celui qui a le rang le plus élevé, et désignons par h ce rang. Ainsi, on a, soit $h = n$, soit $h > n$, avec $\alpha_h \leq n$, de sorte que l'ensemble $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ est normal; de plus, les nombres $\alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_k$ (si $k > h$) sont supérieurs à n. Par suite, tout point de $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \ldots, \alpha_k]$ possède la propriété caractéristique des points de $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$. Donc *tout ensemble normal* $q^{(n+1)}$ *est contenu dans un certain ensemble normal* $q^{(n)}$, lequel est unique, car un ensemble normal $q^{(n)}$ autre que $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, n'ayant en commun avec cet ensemble que des points rationnels, ne peut contenir $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \ldots, \alpha_k]$.

Je dis que *l'ensemble* $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ *est non dense dans* $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$. Pour le démontrer, si nous tenons compte d'une part de ce fait que l'ensemble $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ a pour dérivé $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ et est donc dense par rapport à lui, d'autre part de ce que $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ est parfait, par suite fermé, il suffit (cf. § 8) de faire voir qu'au voisinage de tout point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ existe un point qui fait partie de $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ sans faire partie de $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$. Or, soit A un point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots).$$

Considérons, j étant un entier arbitraire, le point B:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots, \beta_{h+j}, n+1, n+1, \ldots)$$

dans lequel tous les quotients qui suivent celui de rang $h+j$ sont égaux à $n+1$. Ce point appartient bien à $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, puisque les quotients de rang $> h$ sont $> n$, mais il n'appartient pas à P_{n+1}, puisqu'il y a une infinité de quotients égaux à $n+1$; donc il n'appartient pas à $p^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$, et, étant irrationnel, n'appartient pas non plus à $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$. De plus, en prenant j assez grand, le point B peut être pris aussi près qu'on veut du point A. La proposition est donc démontrée.

Cela posé, modifiant les notations précédentes, nous supposerons qu'on ait rangé d'abord les ensembles normaux $q^{(1)}$ dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par la notation $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_i, \ldots$. Chacun des ensembles normaux $q^{(2)}$ appartient à un et un seul des ensembles normaux $q^{(1)}$; considérons ceux des ensembles normaux $q^{(2)}$ qui sont contenus dans q_i; il y en a une infinité dénombrable; nous supposerons qu'on les ait

rangés dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par $q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,j}, \dots$. Nous définirons, par l'application du même procédé, des ensembles q à $3, 4, \dots, n, \dots$ indices, qui seront les ensembles normaux $q^{(3)}, q^{(4)}, \dots, q^{(n)}, \dots$.

On a ainsi des ensembles parfaits non denses dans le continu désignés par la notation générale: $q_{i_1, i_2, \dots, i_n}$, les entiers n, $i_1, i_2, \dots, i_n$ prenant toutes les valeurs entières positives. L'ensemble $q_{i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}}$ est contenu dans l'ensemble $q_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ et est non dense par rapport à lui.

Soit $p_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ l'ensemble des points *irrationnels* de $q_{i_1, i_2, \dots, i_n}$. La réunion de tous les $p_{i_1, i_2, \dots, i_n}$, n étant fixe, constitue l'ensemble P_n des points irrationnels pour lesquels tous les quotients incomplets, à partir d'un certain rang, surpassent n.

35. Il existe des points qui font partie de P_n, quel que soit n; ce sont les points irrationnels représentables par des fractions continues dans lesquelles le nombre des quotients incomplets inférieurs à n est fini, quel que soit n; je désigne l'ensemble de ces points par P_ω; ainsi, *P_ω est l'ensemble des points irrationnels pour lesquels le quotient incomplet de rang n croît indéfiniment avec n,* et l'on a, P_0 désignant le segment $(0, 1)$:

$$P_0 > P_1 > P_2 > \dots > P_n > \dots > P_\omega.$$

Soit A un point déterminé de P_ω, représenté par la fraction:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Ce point fait partie de $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$; il appartient donc à un ensemble normal $q^{(1)}$ bien déterminé, soit q_{i_1}, à un ensemble normal $q^{(2)}$ bien déterminé qui, puisqu'il a en commun avec q_{i_1} un point irrationnel, doit être contenu dans q_{i_1}, soit donc q_{i_1, i_2}; d'une manière générale, le point A est contenu dans un ensemble normal $q^{(n)}$ déterminé, qui est de la forme $q_{i_1, i_2, \dots, i_n}$. Ainsi, au point A de P_ω correspond une suite d'entiers positifs bien déterminée $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ telle que le point A est contenu dans tous les ensembles:

$$q_{i_1} > q_{i_1, i_2} > \dots > q_{i_1, i_2, \dots, i_n} > \dots.$$

Réciproquement, donnons-nous une suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ et considérons les ensembles:

$$P_0 > q_{i_1} > q_{i_1, i_2} > \dots > q_{i_1, i_2, \dots, i_n} > \dots. \tag{1}$$

Ces ensembles étant fermés, et le premier d'entre eux étant borné, il existe au moins un point qui leur est commun. Si nous revenons aux notations premières relatives aux ensembles q, ces ensembles seront désignés de la manière suivante:

$$q_{i_1} = q^{(1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}] \text{ avec } h_1 \geqq 1,$$

$$q_{i_1, i_2} = q^{(2)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_2}] \text{ avec } h_2 \geqq 2 \text{ et } h_2 \geqq h_1,$$

. . . .

$$q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_2}, \ldots, \alpha_{h_n}] \text{ avec } h_n \geqq n \text{ et } h_n \geqq h_{n-1}.$$

. . . .

Du fait que $h_n \geqq n$ résulte que h_n croît indéfiniment, de sorte que les entiers α définis par ce qui précède sont en nombre infini; il y a donc un et un seul point contenu dans tous les ensembles q de (1); c'est le point irrationnel défini par:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_2}, \ldots, \alpha_{h_n}, \ldots),$$

et ce point appartient à tous les P_n, par suite à P_ω. Ainsi, à toute suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ correspond un point déterminé de P_ω, à savoir le point unique contenu dans tous les ensembles $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. Nous établissons de la sorte, entre l'ensemble S de toutes les suites d'entiers positifs et l'ensemble P_ω, une correspondance *biunivoque et réciproque* définie par la loi suivante:

Il y a correspondance entre l'élément A de S:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)$$

et le point B de P_ω représenté par la fraction:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$$

si le point $(a_1, a_2, \ldots)$ est contenu dans tous les ensembles $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, quel que soit n.

Je dis que la partie de P_ω contenue dans l'ensemble $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, soit $D[q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}, P_\omega]$, *est dense dans* $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. En effet, soit

$$q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h];$$

au voisinage de tout point A de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, soit:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots)$$

existe un point faisant partie du même ensemble et de P_ω; il suffit de prendre le point:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_{h+j}, n+1, n+2, \ldots)$$

où les quotients qui suivent celui de rang $h+j$ sont les nombres de la suite naturelle à partir de $n+1$. Ce point, qui fait partie de P_ω et de $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_h]$, peut être pris aussi près qu'on veut de A, en prenant j assez grand. La proposition est donc démontrée.

A fortiori, si $r > n$, *l'ensemble* $D[q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}, P_r]$ *est dense dans* $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, puisque P_r contient P_ω.

36. Cela posé, nous allons donner des exemples de fonctions de classes 2 et 3, définies sur P_0. Remarquons d'abord que, d'après le § 29, la classe α d'une fonction f définie sur P_0, si $\alpha > 1$, est indépendante des valeurs de f aux points *rationnels* de P_0, qui forment un ensemble dénombrable.

Donnons-nous $n+1$ nombres finis, quelconques, que nous désignerons par $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ et considérons la fonction φ définie de la manière suivante: sur $P_i - P_{i+1}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $\varphi = u_i$; sur P_n, $\varphi = u_n$. φ est ainsi définie en tout point de P_0; je dis que φ est de classe $\leqq 2$. En effet, φ est de classe $\leqq 2$ sur chaque ensemble normal $q^{(n)}$, puisqu'on a sur un tel ensemble: $\varphi = u_n$, sauf aux points rationnels de l'ensemble; admettons comme démontré que φ est de classe $\leqq 2$ sur tous les ensembles normaux $q^{(i+1)}$; alors, comme, sur chaque ensemble normal $q^{(i)}$, φ diffère de la constante u_i aux points d'un ensemble comprenant, d'une part un ensemble dénombrable, d'autre part une infinité dénombrable d'ensembles $q^{(i+1)}$ sur chacun desquels φ est de classe $\leqq 2$ par hypothèse, φ est aussi de classe $\leqq 2$ sur l'ensemble $q^{(i)}$ considéré (§ 28); en remontant de proche en proche, on reconnaît ainsi que φ est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

37. Donnons-nous maintenant un système de nombres finis comprenant une suite infinie: $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et en outre un nombre u_ω; considérons la fonction f ainsi définie: sur $P_i - P_{i+1}$ $[i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots]$,

$f = u_i$; sur P_ω, $f = u_\omega$. Je dis que f, qui est ainsi définie en tout point de P_0, est de classe ≤ 3.

En effet, désignons par f_n la fonction qui est égale à u_i sur $P_i - P_{i+1}$ $[i = 0, 1, 2, \ldots, n-1]$, et à u_ω sur P_n; f_n est de classe ≤ 2 d'après le § 36. Je dis qu'on a: $\lim f_n = f$. En effet, tout point A de P_0 appartient, soit à un des ensembles $P_i - P_{i+1}$, soit à P_ω; dans le premier cas, A appartenant à $P_i - P_{i+1}$, on a, dès que n dépasse la valeur i: $f_n(A) = u_i = f(A)$, d'où $\lim\limits_{n=\infty} f_n(A) = f(A)$; dans le second cas, A fait partie de P_n, quel que soit n; on a donc, pour toute valeur de n: $f_n(A) = u_\omega = f(A)$; donc encore: $\lim f_n(A) = f(A)$. Ainsi f, limite de f_n qui est de classe ≤ 2, *est de classe* ≤ 3.

Dans le cas particulier où l'on a: $\lim u_n = u_\omega$, je dis que f est de classe ≤ 2. En effet, formons la fonction $f - f_n$; elle est égale, sur $P_0 - P_1$, $P_1 - P_2$, $P_{n-1} - P_n$, à 0; sur $P_n - P_{n+1}$, $P_{n+1} - P_{n+2}$, $\ldots$, $P_{n+h} - P_{n+h+1}$, $\ldots$ respectivement à $u_n - u_\omega$, $u_{n+1} - u_\omega$, $\ldots$, $u_{n+h} - u_\omega$, $\ldots$ enfin, sur P_ω, à 0. Si ε est un nombre positif, dès que n est assez grand, toutes les quantités $u_n - u_\omega$, $u_{n+1} - u_\omega$, $\ldots$ sont en valeur absolue inférieures à ε; on a donc: $|f - f_n| < \varepsilon$, ce qui montre que f_n tend uniformément vers f; donc f est de classe ≤ 2 d'après le § 3.

38. Je dis maintenant que si l'on n'a pas: $\lim u_n = u_\omega$, la fonction f n'est pas de classe ≤ 2, *par suite est certainement de classe* 3. Pour cela, je vais montrer qu'on aboutit à une contradiction en supposant, comme je vais le faire, qu'il existe une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ toutes de classe ≤ 1, et telles qu'on ait: $\lim f_\nu = f$.

Du fait que la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ n'a pas pour limite u_ω résulte qu'il existe un nombre positif λ tel que, quel que soit n, il y a un entier $n_1 > n$ tel que:

$$|u_{n_1} - u_\omega| > \lambda.$$

Prenons μ tel que: $0 < \mu < \lambda$ et posons: $\lambda = \mu + 2\varepsilon$.

Cela posé, considérons un ensemble normal $q^{(n)}$ déterminé, choisi arbitrairement, et soit H une *portion* de cet ensemble, c'est-à-dire, d'après la définition du § 8, l'ensemble parfait qui est le dérivé de l'ensemble des points de $q^{(n)}$ intérieurs à un segment Σ contenant à son intérieur au moins un point de $q^{(n)}$

Déterminons un entier $n_1 > n$ tel que:

$$(1) \qquad |u_{n_1} - u_\omega| > \lambda = \mu + 2\varepsilon.$$

L'ensemble $D(q^{(n)}, P_{n_1})$ est *dense* dans l'ensemble $q^{(n)}$, par suite $D(H, P_{n_1})$ est dense dans l'ensemble parfait H, de sorte qu'on peut trouver un point A intérieur à Σ, faisant partie de H et de P_{n_1}; ce point appartenant à P_{n_1}, fait partie d'un ensemble normal $q^{(n_1)}$ bien déterminé, soit K la portion de cet ensemble normal déterminée par Σ. K est contenu dans H.

K est un ensemble parfait; chacune des fonctions f_i est de classe ≤ 1 sur K, par suite ponctuellement discontinue; il y a donc un ensemble H de première catégorie par rapport à K, tel qu'en tout point de $K - H$, chacune des fonctions f_i est continue par rapport à K. D'autre part, K est une *portion* d'un certain ensemble normal $q^{(n_1)}$; on a $f = u_{n_1}$ aux points de cet ensemble qui ne font pas partie de P_{n_1+1} et qui ne sont pas rationnels, et comme $D(q^{(n_1)}, P_{n_1+1})$ est de première catégorie par rapport à $q^{(n_1)}$, l'ensemble L des points de K où l'on n'a pas: $f = u_{n_1}$, est de première catégorie par rapport à K. L'ensemble $K - M(H, L)$ est donc *dense* dans K; nous pouvons prendre un point B intérieur à Σ et contenu dans cet ensemble; on a: $f(B) = u_{n_1}$, et toutes les fonctions f_i sont continues en B par rapport à K.

Cela posé, donnons-nous un entier p. Comme $\lim f_\nu(B) = f(B) = u_{n_1}$, nous pouvons déterminer un entier $p_1 > p$ tel que:

$$|f_{p_1}(B) - u_{n_1}| < \varepsilon.$$

Comme f_{p_1} est continue en B par rapport à K, nous pouvons déterminer une portion H_1 de K contenant B, telle que, C étant un point *quelconque* de H_1, on ait:

$$|f_{p_1}(C) - f_{p_1}(B)| < \varepsilon,$$

ce qui donne, en combinant avec l'inégalité précédente:

$$|f_{p_1}(C) - u_{n_1}| < 2\varepsilon.$$

En rapprochant de l'inégalité (1), on obtient:

$$(2) \qquad |f_{p_1}(C) - u_\omega| > \mu.$$

En résumé, étant donnés, d'une part un entier p, d'autre part une portion H d'un ensemble normal $q^{(n)}$, on peut déterminer un entier $p_1 > p$ et une portion H_1 d'un ensemble normal $q^{(n_1)}$, avec $n_1 > n$, et H_1 étant compris dans H, tels que pour tout point C de H_1, on ait l'inégalité (2).

Appliquons cette proposition une seconde fois en remplaçant p et H par p_1 et H_1, nous obtenons un entier $p_2 > p_1$ et une portion H_2 d'un ensemble normal $q^{(n_2)}$, avec $n_2 > n_1$, et H_2 étant compris dans H_1, tels qu'en tout point C de H_2, on a:

$$|f_{p_2}(C) - u_\omega| > \mu.$$

En répétant indéfiniment l'application de ce procédé, on obtient, d'une part deux suites d'entiers croissant indéfiniment:

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_i < \ldots,$$
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots,$$

d'autre part des ensembles parfaits dont chacun est contenu dans celui qui précède:

$$H_1 > H_2 > \ldots > H_i > \ldots,$$

H_i étant une portion d'ensemble normal $q^{(n_i)}$, de telle sorte qu'en tout point C de H_i on a:

$$|f_{p_i}(C) - u_\omega| > \mu. \tag{3}$$

Il existe un point contenu dans tous les ensembles fermés H, par suite, satisfaisant à (3) quel que soit i; un tel point, soit C, appartenant à une infinité d'ensembles normaux $q^{(n_1)}, q^{(n_2)}, \ldots, q^{(n_i)}, \ldots$, les n_i croissant indéfiniment, fait partie de P_ω; on a donc:

$$f(C) = u_\omega.$$

L'inégalité (3) s'écrit donc:

$$|f_{p_i}(C) - f(C)| > \mu,$$

ce qui, comme p_i croît indéfiniment, est en contradiction avec le fait que $\lim f_{p_i}(C) = f(C)$. La proposition est donc démontrée.

Nous avons ainsi établi *l'existence effective de fonctions de classe* 3.[1] On peut particulariser, en prenant, par exemple: $u_0 = u_1 = \ldots = u_n = \ldots = 0$, $u_\omega = 1$, ce qui nous donne, comme exemple de fonction de classe 3, la fonction égale à 0 en tout point du segment $(0, 1)$, sauf aux points irrationnels dont le quotient incomplet de rang n croît indéfiniment avec n, pour lesquels elle est égale à 1.

---

[1] Dès 1898, M. Volterra, à qui j'avais communiqué le théorème sur les fonctions de classe 1 (§ 13), m'avait indiqué un exemple d'une fonction qui n'est certainement pas de classe $\leqq 2$.

TABLE.

Pages.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Trajectoires le long desquelles deux au moins des trois corps se choquent. Conditions qui entraînent un choc

PAR

GIULIO BISCONCINI

À ROME.

Préface.

M. PAINLEVÉ, en étudiant le problème des trois corps, a démontré que le mouvement se poursuit indéfiniment régulier, pourvu que les conditions initiales ne soient pas telles qu'à un instant fini une au moins des distances mutuelles ne soit pas nulle.[1]

En d'autres termes, si, pour une valeur finie t_1 du temps, deux au moins des trois points coïncident, les équations différentielles du mouvement ne peuvent pas être intégrées à l'aide de séries convergentes pour $t \geq t_1$. Les développements sont au contraire toujours valables pour $t < t_1$.

M. PAINLEVÉ ajoutait ensuite: »Il serait donc extrêmement important de définir avec précision les conditions initiales qui correspondent à un choc», et plus loin, en faisant allusion à une étude qu'il avait commencée, mais pas accomplie, il observait: »Cette discussion me donne lieu de penser que les conditions initiales qui entraînent un choc au bout d'un temps fini satisfont à deux relations analytiques distinctes (qui se réduisent à une dans le cas du mouvement plan)».

M. le prof. LEVI-CIVITA, en envisageant le cas particulier du mouvement plan, se proposa cette question, que M. PAINLEVÉ n'avait pas résolue.

---

[1] *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles,* p. 583.

Dans son travail il démontra effectivement l'existence d'une relation analytique uniforme, et il en donna une expression développée en série de puissances de la distance des deux points, qui tendent à se choquer.[1]

Le chemin avait été tracé, et l'on n'avait qu'à le suivre pour résoudre le problème dans le cas général. Voici les résultats auxquels nous sommes parvenus. Soient P_0, P_1, P_2 les trois corps. Posons $\rho_1 = P_0P_1$, $\rho_2 = P_0P_2$, et faisons l'hypothèse que $\lim_{t=t_1} \rho_1 = 0$ et $\lim_{t=t_1} \rho_2 \neq 0$. Il s'agit de déterminer les relations, auxquelles doivent satisfaire les conditions initiales, pour que cela ait lieu. — Les deux hypothèses, que nous avons faites, doivent être évidemment suffisantes pour caractériser les chocs P_0P_1 et les conditions initiales, dont ils dépendent. Néanmoins, pour la résolution du problème, nous avons introduit une troisième hypothèse, que nous n'avons pas pu déduire des autres. Nous avons admis, que, dans le voisinage de P_0, la vitesse angulaire de P_0P_1 dans le mouvement relatif par rapport à P_0 soit finie.

Le raisonnement, qui nous a conduit à l'admettre, est tout à fait intuitif et on le trouvera dans le § 4, n° 2.

Quant aux différentes phases du procédé, elles peuvent être résumées en un mot.

Nous avons considéré le mouvement relatif des points P_1, P_2, par rapport à P_0 et, par un choix convenable des variables, nous avons conduit les équations du mouvement au type de celles de M. LEVI-CIVITA (v. § 4, n° 1). Nous avons alors démontré, que les trajectoires singulières du système, le long desquelles les deux points P_0, P_1 doivent se choquer, correspondent univoquement aux solutions, qui sont holomorphes dans le voisinage de la position de choc (v. § 5, n° 3). Nous avons déduit, selon les prévisions de M. PAINLEVÉ »deux relations analytiques distinctes» entre les conditions initiales, relations, qui nous permettent de décider, si le mouvement aura lieu le long d'une des ∞^8 trajectoires singulières.

Si nous indiquons ces deux relations par $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, il est évident qu'une seconde couple $u_1^{(2)} = 0$, $u_2^{(2)} = 0$, analogue à la première, sera caractéristique pour les chocs P_0P_2, et une troisième $u_3^{(1)} = 0$, $u_3^{(2)} = 0$

[1] *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi.* Annali di Matematica. Tomo IX, serie IIIª. — Une nouvelle rédaction de ce mémoire paraîtra sous peu dans les »Acta».

pour les chocs $P_1 P_2$. En résumé les deux équations

$$u_1^{(1)} u_1^{(2)} u_1^{(3)} = 0, \qquad u_2^{(1)} u_2^{(2)} u_2^{(3)} = 0$$

nous permettrons de caractériser tous les mouvements singuliers du système, dans lesquels deux quelconques des points se choquent.

Nous finirons ce court résumé de notre travail en ajoutant, que dans le dernier paragraphe nous nous sommes occupés de déterminer effectivement la forme analytique des équations $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, en développant les premiers membres en séries de puissances de la distance $P_0 P_1$.

§ 1. *Équations du mouvement.*

I. *Mouvement des trois corps P_0, P_1, P_2 référé à des axes fixes.* — Considérons trois points P_0, P_1, P_2, dont les masses sont m_0, m_1, m_2, et supposons qu'ils s'attirent mutuellement selon la loi de Newton. Rapportons-les à un système d'axes cartésiens ξ, η, ζ, fixes dans l'espace, et appelons ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées d'un point quelconque entre eux, et $\bar{p}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i$ les composantes de sa quantité de mouvement.

Les équations du mouvement du système sont:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, & \frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \bar{q}_i}, & \frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \bar{r}_i}, \\ \frac{d\bar{p}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \frac{d\bar{q}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}, & \frac{d\bar{r}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \end{aligned} \right. \qquad (i = 0, 1, 2)$$

où l'on a posé:

$$(2) \qquad H = T - U = \frac{1}{2} \sum_0^2{}_j \frac{1}{m_j} (\bar{p}_j^2 + \bar{q}_j^2 + \bar{r}_j^2) - \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

et:

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2}.$$

Il va sans dire, que nous avons choisi l'unité de temps, de manière que la constante d'attraction universelle devienne égale à l'unité.

II. *Transformation de Poincaré.* — Envisageons maintenant le système d'axes x, y, z menés par P_0 et dont les directions sont constamment celles des axes ξ, η, ζ. Soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points

P_1, P_2 rapportés à ces axes. Les formules de transformation entre les deux systèmes sont:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_0 = \xi_0, & y_0 = \eta_0, & z_0 = \zeta_0, \\ x_i = \xi_i - \xi_0, & y_i = \eta_i - \eta_0, & z_i = \zeta_i - \zeta_0. \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

Posons ensuite:

$$(3')\qquad \begin{cases} p_0 = \sum_0^2{}_j \bar{p}_j, & q_0 = \sum_0^2{}_j \bar{q}_j, & r_0 = \sum_0^2{}_j \bar{r}_j, \\ p_i = \bar{p}_i, & q_i = \bar{q}_i, & r_i = \bar{r}_i. \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

On aperçoit que, puisque $\sum_0^2{}_j p_j x_j = \sum_0^2{}_j \bar{p}_j \xi_j$, etc., les équations (3) et (3′) donnent entre les variables $x_i, y_i, z_i; p_i, q_i, r_i$ et $\xi_i, \eta_i, \zeta_i; \bar{p}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i$ une transformation, qui conserve la forme canonique au système (1).

Nous pouvons maintenant remarquer que p_0, q_0, r_0 sont des constantes. Elles sont en effet, au multiplicateur $\sum_0^2{}_i m_i$ près, les composantes de la vitesse du centre de gravité des trois points, qui se meut uniformément sur une ligne droite. On pourra donc les supposer égales à zéro, sans rien ôter à la généralité du problème.

Les équations, qui définissent le mouvement relatif de P_1 et P_2 par rapport à P_0, sont donc:

$$(1')\qquad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, & \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial r_i}; \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, & \frac{dr_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

où l'on a posé, en vertu des relations (2) et (3), (3′):

$$(2')\qquad H = T - U =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_1^2{}_i \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_i}\right)(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) + \frac{2}{m_0}(p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2) \right\} - \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

et

$$\Delta_{0i} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$

III. *Remplacement des composantes de la vitesse absolue de P_1 par les composantes de sa vitesse relative.* — Substituons maintenant à la place des composantes de la quantité de mouvement absolue de P_1 les composantes x_1', y_1', z_1' de sa vitesse relative.

Elles sont fournies par le premier groupe des équations (1'), dans lesquelles on doit supposer $i = 1$ et avoir égard à la relation (2').

En posant:

$$\mu_1 = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{m_0 + m_1} + \frac{1}{m_2}, \tag{4}$$

on aura:

$$\left\{\begin{aligned} x_1' &= \mu_1 p_1 + \frac{p_2}{m_0}, \\ y_1' &= \mu_1 q_1 + \frac{q_2}{m_0}, \\ z_1' &= \mu_1 r_1 + \frac{r_2}{m_0}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

et par conséquent:

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_1}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\} - \sum_{0}^{2}{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \tag{2$_a$}$$

Du premier groupe des équations (1'), en vertu des égalités (5), on tire donc:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial p_1} = \mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1'}, \qquad \text{etc.};$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial p_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{x_1'}{m_0 \mu_1}, \quad \text{etc.};$$

c'est-à-dire:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial(\mu_1 H)}{\partial x_1'}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial(\mu_1 H)}{\partial y_1'}, \qquad \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial(\mu_1 H)}{\partial z_1'};$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_2}\left(H + \frac{x_1' p_2}{m_0 \mu_1}\right), \qquad \frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(H + \frac{y_1' q_2}{m_0 \mu_1}\right), \qquad \frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial r_2}\left(H + \frac{z_1' r_2}{m_0 \mu_1}\right).$$

En dérivant les relations (5) par rapport à t on a:

$$\frac{dx_1'}{dt} = \mu_1 \frac{dp_1}{dt} + \frac{1}{m_0}\frac{dp_2}{dt}, \quad \text{etc.},$$

ou bien, en vertu des équations (1′):

$$\frac{dx_1'}{dt} = -\mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{1}{m_0}\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{m_2 x_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_0 \Delta_{12}}\right)$$

$$= -\mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{m_2 x_2}{\Delta_{02}^3} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m_1 m_2}{m_0 \Delta_{12}}\right), \quad \text{etc.}$$

On pourra donc remplacer le deuxième groupe du système (1′) par les équations:

$$\frac{dx_1'}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu_1 H + \frac{m_2 x_1 x_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta_{12}}\right), \quad \text{etc.},$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad \text{etc.}$$

Posons enfin:

$$(2'') \quad \begin{cases} H_1 = \frac{1}{2}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) - \mu_1 \sum_0^2 \frac{m_1 m_j}{\Delta_{1j}} + m_2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta_{12}}, \\ H_2 = \frac{\mu_2}{2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) - \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} + \frac{1}{m_0 \mu_1}(x_1' p_2 + y_1' q_2 + z_1' r_2). \end{cases}$$

D'après les équations (5) le système (1′) sera équivalant au système:

$$(1'') \quad \begin{cases} \mathrm{I} \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial x_1'}, & \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_1'}, & \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial z_1'}, \\ \frac{dx_1'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_1}, & \frac{dy_1'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial y_1}, & \frac{dz_1'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial z_1}; \end{cases} \\ \mathrm{II} \begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, & \frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial q_2}, & \frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial r_2}, \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_2}, & \frac{dq_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial y_2}, & \frac{dr_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial z_2}. \end{cases} \end{cases}$$

La transformation, que nous avons employée a fait donc perdre à notre système la forme canonique originaire, mais elle lui a donné une forme demi-canonique. De cette propriété nous allons profiter tout de suite.

IV. *Forme semi-canonique polaire pour les équations du premier groupe.* — Soient $\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1$ les coordonnées polaires du point P_1, et P_1, Θ_1, Φ_1 leurs variables conjuguées. Nous entendons par cela, que, si l'on substitue

dans le premier groupe du système (1″) aux deux séries de variables x_1, y_1, z_1 ; x'_1, y'_1, z'_1, les deux nouvelles séries, que nous venons d'indiquer, ce groupe doit maintenir la forme canonique.

Puisque on a:

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = \rho_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, \\ y_1 = \rho_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, \\ z_1 = \rho_1 \cos \vartheta_1, \end{cases}$$

il faut poser:

$$(7)\begin{cases} P_1 = x'_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \rho_1} + y'_1 \dfrac{\partial y_1}{\partial \rho_1} + z'_1 \dfrac{\partial z_1}{\partial \rho_1} = \qquad x'_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + y'_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + z'_1 \cos \vartheta_1, \\ \Theta_1 = x'_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} + y'_1 \dfrac{\partial y_1}{\partial \vartheta_1} + z'_1 \dfrac{\partial z_1}{\partial \vartheta_1} = \rho_1 (x'_1 \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 + y'_1 \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 - z'_1 \sin \vartheta_1), \\ \Phi_1 = x'_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + y'_1 \dfrac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + z'_1 \dfrac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} = \rho_1 (- x'_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + y'_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1). \end{cases}$$

On tirera identiquement:

$$P_1 d\rho_1 + \Theta_1 d\vartheta_1 + \Phi_1 d\varphi_1 = x'_1 dx_1 + y'_1 dy_1 + z'_1 dz_1 .$$

Cela nous suffit pour conclure, qu'il s'agit d'une transformation de contact. Par conséquent la forme canonique du premier groupe sera conservée.

Les relations (7) résolues par rapport à x'_1, y'_1, z'_1 nous donnent en outre:

$$(7')\qquad \begin{cases} x'_1 = P_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \dfrac{\Theta_1}{\rho_1} \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 - \dfrac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1} \sin \varphi_1, \\ y'_1 = P_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \dfrac{\Theta_1}{\rho_1} \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \dfrac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1} \cos \varphi_1, \\ z'_1 = P_1 \cos \vartheta_1 \qquad - \dfrac{\Theta_1}{\rho_1} \sin \vartheta_1 . \end{cases}$$

Les fonctions H_1 et H_2 pourront donc être mises sous la forme:

$$(2''')\qquad \begin{cases} H_1 = \dfrac{1}{2}\left(P_1^2 + \dfrac{\Theta_1^2}{\rho_1^2} + \dfrac{\Phi_1^2}{\rho_1^2 \sin^2 \vartheta_1}\right) - \mu_1 \left(\dfrac{m_0 m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2} + \dfrac{m_1 m_2}{\Delta}\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{m_2 \rho_1 \nabla_1}{\rho_2^3} + \dfrac{m_1 m_2}{m_0} \dfrac{1}{\Delta}, \\ H_2 = \dfrac{\mu_2}{2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) - \left(\dfrac{m_0 m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2} + \dfrac{m_1 m_2}{\Delta}\right) + \dfrac{\nabla_2}{m_0 \mu_1} . \end{cases}$$

Dans ces relations les symboles introduits ont, comme il est aisé de voir, les significations suivantes:

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\rho_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},\\
&\Delta = \sqrt{(\rho_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 - x_2)^2 + (\rho_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 - y_2)^2 + (\rho_1 \cos\vartheta_1 - z_2)^2},\\
&\nabla_1 = x_2 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 + y_2 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 + z_2 \cos\vartheta_1,\\
&\nabla_2 = p_2\left(P_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 + \frac{\Theta_1}{\rho_1}\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 - \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin\vartheta_1}\sin\varphi_1\right)\\
&\qquad + q_2\left(P_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 + \frac{\Theta_1}{\rho_1}\cos\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin\vartheta_1}\cos\varphi_1\right)\\
&\qquad + r_2\left(P_1 \cos\vartheta_1 - \frac{\Theta_1}{\rho_1}\sin\vartheta_1\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations du mouvement relatif sont donc évidemment:

$$
(1''')\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{I}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial P_1}, \quad \frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \Theta_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \Phi_1},\\
&\frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1}, \quad \frac{d\Theta_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1}, \quad \frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1};
\end{aligned}
\right.\\
&\mathrm{II}\qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, \quad \text{etc.}, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_2}, \quad \text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

Il est aisé et en même temps intéressant, de mettre en évidence la signification cinématique des variables conjuguées aux coordonnées polaires du point P_1. Les égalités (7) nous montrent, que $P_1, \frac{\Theta_1}{\rho_1}, \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin\vartheta_1}$ se tirent de x_1', y_1', z_1' en ajoutant ces dernières, après les avoir multipliées par les cosinus de direction des tangentes aux lignes coordonnées polaires, qui passent par P_1. Les quantités $P_1, \frac{\Theta_1}{\rho_1}, \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin\vartheta_1}$ sont donc les projections sur ces lignes de la vitesse relative du point P_1.

§ 2. *Quelques conséquences, que l'on tire des équations du mouvement, dans l'hypothèse que* $\lim_{t=t_1} P_0P_1 = 0$.

La forme, que nous avons donnée aux équations du mouvement, nous permettra d'étudier le comportement des variables du problème, lorsque $\rho_1 \equiv P_0P_1$ tend vers zéro pour une certaine valeur finie du temps. Cette hypothèse analytique entraîne l'hypothèse physique, que les deux points P_0P_1 se choquent au bout du temps t_1. L'intuition nous fait voir, que s'il y aura, à cause de ce choc, des singularités dans les caractéristiques du mouvement relatif des deux points P_1, P_2, elles pourront se trouver seulement dans celles du point P_1. En effet on comprend que ce choc ne pourra exercer qu'une influence très petite sur le mouvement de P_2. En d'autres termes les coordonnées et les composantes de la *vitesse absolue* (ou, ce qui revient au même, les composantes de sa quantité de mouvement absolue), que nous devons supposer finies avant le choc, devront rester telles pour $t = t_1$.

Cela justifie la transformation, que nous avons employée au n° 3 du paragraphe précédent, qui pouvait sembler d'abord sinon illogique au moins peu symétrique. Il est évident, que si nous n'avions pas opéré comme cela, toute singularité dans la vitesse de P_0 aurait amené une singularité analogue dans celle de P_2. Nous trouverons tout à l'heure une confirmation rigoureuse de cela.

I. *Comportement de la vitesse absolue de* P_2. — Proposons-nous de démontrer d'abord que:

Si ρ_1, *pour* $t = t_1$, *tend vers zéro, les fonctions* p_2, q_2, r_2 *restent toujours finies* (*même pour* $\rho_1 = 0$).

Cette propriété ressort tout de suite de la forme analytique particulière des équations (1'''). Considérons en effet, parmi les équations du second groupe, celles qui fournissent les dérivées de p_2, q_2, r_2 par rapport à t, et substituons H_2 par son expression (2''').

Il vient ainsi, en nous bornant à la première:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{m_0m_2}{\rho_2^3}x_2 + \frac{m_1m_2}{\Delta^3}(\rho_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 - x_2),$$

ou bien:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{m_0 m_2}{\rho_2^2} \cos \rho_2 x - \frac{m_1 m_2}{\Delta^3} x_2 + \rho_1 \frac{m_1 m_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1}{\Delta^3}.$$

Faisons maintenant l'hypothèse que $\lim\limits_{t=t_1} \rho_1 = 0$, et que la limite inférieure de ρ_2 soit plus grande que zéro. Ayant égard à la deuxième des relations (8), on conclut que $\lim\limits_{t=t_1} \Delta = \rho_2$, et que les deux fractions $\frac{x_2}{\Delta^3}$, $\frac{m_1 m_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1}{\Delta^3}$ restent finies. Nous aurons donc

$$\lim_{t=t_1} \rho_1 \frac{m_1 m_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1}{\Delta^3} = 0$$

et nous pourrons conclure qu'il y aura un intervalle (t', t_1) assez petit, dans lequel la fonction $\frac{dp_2}{dt}$ restera toujours finie.

Puisque nous avons identiquement:

$$p_2(t_1) - p_2(t') = \int_{t'}^{t_1} \frac{dp_2}{dt} dt,$$

nous pourrons écrire:

$$p_2(t_1) = p_2(t') + (t_1 - t') \left[\frac{dp_2}{dt}\right]_{t_1 + \varepsilon(t_1 - t')}. \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Il suffira donc d'admettre, que dans le point t' la fonction p_2 ait une valeur finie[1] pour en tirer qu'elle restera finie même au moment du choc.

Un raisonnement identique peut être fait pour q_2 et r_2, par conséquent notre lemme reste démontré.

II. *Comportement de la vitesse relative de P_1.* — Nous sommes à même maintenant de déduire de l'intégrale des forces vives du système (1''') d'autres propriétés pour les caractéristiques de P_1.

Si h est la valeur de l'énergie totale des trois points, l'intégrale de Jacobi, exprimée par les variables $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2)$; x'_1, y'_1, z'_1 ; p_2, q_2, r_2,

[1] Cela se vérifie, si nous supposons, que le mouvement soit régulier pour toute valeur du temps, qui ne correspond pas à un choc. Cette hypothèse est justifiée par le théorème de Painlevé (v. la préface).

sera, d'après l'égalité (2_a):

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_1}(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)+\mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right\}-\sum_{1}^{2}{}_{ij}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}=h.$$

Si l'on emploie la transformation fournie par les relations (6) et (7), on a:

$$(2_b)\qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_1}\left(P_1^2+\frac{\Theta_1^2}{\rho_1^2}+\frac{\Phi_1^2}{\rho_1^2\sin^2\vartheta_1}\right)+\mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right\}$$

$$-\frac{m_0 m_1}{\rho_1}-\frac{m_0 m_2}{\rho_2}-\frac{m_1 m_2}{\Delta}=h,$$

et de suite:

$$\rho_1 P_1^2+\frac{\Theta_1^2}{\rho_1}+\frac{\Phi_1^2}{\rho_1\sin^2\vartheta_1}=$$

$$=2m_0m_1\mu_1+\rho_1\mu_1\left\{2\left(h+\frac{m_0m_2}{\rho_2}+\frac{m_1m_2}{\Delta}\right)-\mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right\}.$$

En posant enfin:

$$(9)\qquad \mathsf{P}=\mu_1\left\{2\left(h+\frac{m_0m_2}{\rho_2}+\frac{m_1m_2}{\Delta}\right)-\mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right\},$$

et en remarquant, que $m_0m_1\mu_1=m_0+m_1$, on arrivera à l'égalité:

$$(10)\qquad \rho_1 P_1^2+\frac{\Theta_1^2}{\rho_1}+\frac{\Phi_1^2}{\rho_1\sin^2\vartheta_1}=2(m_0+m_1)+\rho_1\mathsf{P}.$$

Si ρ_1 tend vers zéro, la fonction P ne peut pas croître indéfiniment, car ρ_2 ne s'annule pas, par hypothèse, et p_2, q_2, r_2 restent finies à cause du lemme démontré.

Le second membre de l'égalité précédente aura donc, pour ρ_1 aussi petite que l'on veut, une valeur très voisine à $2(m_0+m_1)$. Mais, comme le premier membre est une somme de quantités essentiellement positives, chacune d'elles sera finie dans le voisinage de $\rho_1=0$.

Nous pouvons donc énoncer ce nouveau lemme:

Si ρ_1, pour $t=t_1$, tend vers zéro les fonctions $\sqrt{\rho_1}\,P_1$, $\frac{\Theta_1}{\sqrt{\rho_1}}$, $\frac{\Phi_1}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\vartheta_1}$ définies par les équations (1'''), ne peuvent pas croître indéfiniment, lorsque t s'approche à t_1.

Si nous envisageons maintenant l'identité:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} \equiv P_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \frac{dP_1}{dt},$$

nous pouvons écrire, en vertu des équations différentielles:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = P_1 \frac{\partial H_1}{\partial P_1} - \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial \rho_1}.$$

Ayant égard à l'expression analytique de H_1, donnée par la première des relations (2'''), nous avons donc:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = P_1^2 - \rho_1 \left\{ -\frac{\Theta_1^2}{\rho_1^3} - \frac{\Phi_1^2}{\rho_1^3 \sin^2 \vartheta_1} \right.$$
$$\left. + \mu_1 \left(\frac{m_0 m_1}{\rho_1^2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} \right) + \frac{m_2 \nabla_1}{\rho_2^3} - \frac{m_1 m_2}{m_0 \Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} \right\}.$$

Mais, comme on a:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\Delta} \{ (\rho_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - x_2) \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1$$
$$+ (\rho_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - y_2) \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + (\rho_1 \cos \vartheta_1 - z_2) \cos \vartheta_1 \}$$
$$= \frac{1}{\Delta} (\rho_1 - x_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - y_2 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - z_2 \cos \vartheta_1) = \frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta},$$

la dernière relation s'écrira:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1^2} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1^2 \sin^2 \vartheta_1} - \frac{m_0 + m_1}{\rho_1}$$
$$- \rho_1 \left(\frac{\mu_1 m_1 m_2 (\rho_1 - \nabla_1)}{\Delta^3} + \frac{m_2 \nabla_1}{\rho_2^3} - \frac{m_1 m_2 (\rho_1 - \nabla_1)}{m_0 \Delta^3} \right).$$

En se servant en outre de l'égalité (10) et en faisant quelques réductions on aura:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = \frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathsf{P} - m_2 \rho_1 \left(\frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta^3} + \frac{\nabla_1}{\rho_2^3} \right).$$

Enfin, en posant:

$$\mathfrak{Q} = \mathsf{P} - m_2 \rho_1 \left(\frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta^3} + \frac{\nabla_1}{\rho_2^3} \right),$$

il viendra:

$$(11)\qquad \frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = \frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q}.$$

Rappelons-nous maintenant, que la fonction $\mathbf{P}$ reste finie pour toute valeur de t dans le domaine de t_1, et remarquons, que l'expression $m_2\rho_1\left(\frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta^3} + \frac{\nabla_1}{\rho_2^3}\right)$ tend vers zéro en même temps que $t_1 - t$. Nous en tirons que $\mathbf{Q}$ reste finie dans le domaine de t_1.

Il sera donc possible d'envisager une certaine valeur t' de t, telle que, dans l'intervalle (t', t), on ait $\frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q} > 0$. Dans cet intervalle $\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt}$ restera positive et la fonction $\rho_1 P_1$ sera par conséquent toujours croissante. Comme elle ne peut pas donc s'annuler pour ces valeurs du temps (t_1 au plus exceptée), ni l'un ni l'autre de ses facteurs pourra être égal à zéro.

Mais, puisqu'on a déjà vu que $P_1 = \frac{\partial H_1}{\partial P_1} = \frac{d\rho_1}{dt}$, on peut conclure, que la fonction $\rho_1(t)$ tendra vers zéro toujours de la même manière, c'est-à-dire en décroissant.

En résumé on a:

Si ρ_1, pour $t = t_1$, tend vers zéro, la fonction $P_1 = \frac{d\rho_1}{dt}$ ne peut pas s'annuler dans le voisinage de t_1.

Nous démontrerons enfin que:

Dans le voisinage de t_1 la limite inférieure des valeurs de $\rho_1 P_1^2$ ne peut pas être zéro.

Remarquons, à ce but, que la relation (11) nous donne:

$$\rho_1 \frac{dP_1}{dt} = - P_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \frac{m_0 m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q}.$$

L'identité:

$$\frac{d(\rho_1 P_1^2)}{dt} \equiv 2\rho_1 P_1 \frac{dP_1}{dt} + P_1^2 \frac{d\rho_1}{dt}$$

pourra donc être écrite:

$$\frac{d(\rho_1 P_1^2)}{dt} = 2 P_1\left(\frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q}\right) - P_1^2 \frac{d\rho_1}{dt}.$$

Ou bien, puisque $P_1 = \frac{d\rho_1}{dt}$:

$$\frac{d(\rho_1 P_1^2)}{dt} = \frac{2}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}\left(m_0 + m_1 - \frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 + \rho_1 \mathbf{\Omega}\right). \tag{12}$$

Si nous admettons, que dans le voisinage de t_1 la limite inférieure des valeurs de $\rho_1 P_1^2$ soit zéro, nous pourrons conclure qu'il y aura une valeur t', suffisamment près de t_1, pour laquelle $\rho_1 P_1^2$ deviendra aussi petite que l'on veut. En particulier nous pourrons supposer, que, pour $t = t'$, soit $\rho_1 P_1^2 < \frac{m_0 + m_1}{2}$. Nous pouvons encore supposer que, pour $t = t'$, on ait $\rho_1 \mathbf{\Omega} < \frac{m_0 + m_1}{4}$, car nous avons vu dans la démontration du lemme précédent, que $\rho_1 \mathbf{\Omega}$ tend vers zéro en même temps que $t_1 - t$. On tire de tout cela, que la valeur de $\frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 - \rho_1 \mathbf{\Omega}$, pour $t = t_1$, sera moindre que $\frac{m_0 + m_1}{2}$ et, par conséquent, que l'inégalité

$$m_0 + m_1 - \frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 + \rho_1 \mathbf{\Omega} > \frac{m_0 + m_1}{2} \tag{13}$$

sera verifiée.

Le premier membre de la relation (12) aura donc le même signe que $\frac{d\rho_1}{dt}$, c'est-à-dire qu'il sera négatif.

En d'autres termes la fonction $\rho_1 P_1^2$ sera décroissante dans le point t_1.

Envisageons alors une valeur t'' comprise dans l'intervalle (t', t_1) et qui soit suffisamment voisine à t'.

Puisque l'inégalité (13) reste *a fortiori* satisfaite, nous en tirons, que même à l'instant t'' la fonction $\rho_1 P_1^2$ sera décroissante.

Comme nous pouvons répéter ce raisonnement pour chaque point de (t', t_1), il faudra que l'on ait:

$$\lim_{t=t_1} \rho_1 P_1^2 = 0. \tag{14}$$

Il est cependant aisé de montrer, que cette conclusion est absurde. Ecrivons en effet d'après (12):

$$d(\rho_1 P_1^2) = -2\frac{d\rho_1}{\rho_1}\left(m_0 + m_1 - \frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 + \rho_1 \mathbf{\Omega}\right).$$

Puisque $-d(\rho_1 P_1^2)$ et $-d\rho_1$ sont des quantités positives, cette égalité donne lieu, en vertu de (13), à l'inégalité:

$$-d(\rho_1 P_1^2) > -(m_0 + m_1) d \log \rho_1 .$$

De celle-ci on tire, en intégrant tous les deux membres entre deux limites t', t'', qui vérifient l'inégalité (13):

$$(\rho_1 P_1^2)_{t'} - (\rho_1 P_1^2)_{t''} > (m_0 + m_1) \{ (\log \rho_1)_{t'} - (\log \rho_1)_{t''} \} .$$

Faisons maintenant tendre t'' vers t_1. Le premier membre, en vertu de l'égalité (14), aura la limite finie $(\rho_1 P_1^2)_{t'}$, tandis que le second croîtra indéfiniment. Ce résultat nous montre, que l'hypothèse, d'où nous sommes partis, est fausse.

§ 3. *Changement de la variable indépendante.*

I. *Remplacement de t par ρ_1.* — Dans une remarque au commencement du paragraphe précédent nous avons employé implicitement une propriété, qui à été enoncée par M. Painlevé (v. aussi la préface). Ce théorème dit, au fond, que le mouvement de trois points matériaux, qui s'attirent selon la loi de Newton se poursuit régulièrement et les équations se laissent intégrer par une approximation aussi grande que l'on veut, pourvu qu'il n'y ait pas un choc au bout d'un temps fini. A partir de cet instant on ne peut rien affirmer.

Les cas, qui peuvent se présenter sont évidemment deux: *a*) une seule des trois distances tend pour $t = t_1$ vers zéro, tandis que les deux autres restent supérieures à zéro, *b*) tous les trois corps tendent en même temps vers une position déterminée de l'espace.

Nous étudierons seulement le premier et nous supposerons, que ce soit la distance $P_0 P_1$ qui s'annule pour la valeur t_1 du temps.

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse à l'égard des masses des trois corps, il est bien évident, que nous pourrons donner aux résultats, que nous atteindrons, une interprétation plus générale. Il suffira que l'on change convenablement la signification donnée aux symboles, pour avoir des propriétés identiques relatives à un choc entre deux autres points.

Faisons donc l'hypothèse: $\lim_{t=t_1} \rho_1 = 0$. D'après le théorème de Painlevé, pour toute valeur de t près de t_1 les fonctions $\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1 ; P_1, \Theta_1, \Phi_1 ;$ $x_2, y_2, z_2 ; p_2, q_2, r_2$ dépendent régulièrement de t_1. Nous avons de plus démontré (v. § 2, n° 2, II lemme) que $\left(\frac{d\rho_1}{dt_1}\right)_{t=t_1}$ est négative. On tire par conséquent, que t pourra être considérée une fonction de ρ_1 régulière dans le domaine $\rho_1 = 0$. Nous avons donc:

Si ρ_1, pour $t = t_1$, tend vers zéro, les fonctions $\vartheta_1, \ldots, \Phi_1 ; x_2,$ $y_2, \ldots, r_2$ dépendent régulièrement de ρ_1 dans le voisinage de t_1 (cette valeur au plus exceptée).

Pour avoir les équations, qui définissent ces fonctions au moyen de ρ_1, il faudra évidemment éliminer dt entre les équations (1‴). A ce but écrivons la première sous la forme

$$\frac{dt}{d\rho_1} = \frac{1}{\frac{\partial H_1}{\partial P_1}}.$$

La quatrième du premier groupe nous donne par conséquent:

$$\frac{dP_1}{d\rho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}.$$

Cependant, comme il est possible de tirer de l'intégrale $H = h$ la fonction P_1, nous pourrons remplacer l'équation précédente par $H = h$, et envisager, dans toutes les autres, P_1 comme une fonction connue.

En résumé le système auquel doivent satisfaire $\vartheta_1(\rho_1), \varphi_1(\rho_1) ; \ldots ;$ $q_2(\rho_1), r_2(\rho_1)$ sera:

$$(1^{IV}) \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{I} & \left| \begin{array}{ll} \dfrac{d\vartheta_1}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \Theta_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{d\varphi_1}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \Phi_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}; \\[2ex] \dfrac{d\Theta_1}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{d\Phi_1}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}; \end{array} \right. \\[4ex] \mathrm{II} & \left| \begin{array}{lll} \dfrac{dx_2}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial p_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dy_2}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial q_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dz_2}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial r_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}; \\[2ex] \dfrac{dp_2}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dq_2}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial y_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dr_2}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial z_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

II. *Remarques générales à l'égard des équations obtenues.* — Après avoir intégré ces équations, on pourra, d'après l'intégrale $H = h$, exprimer P_1 par ρ_1. Enfin, en remplaçant toutes les fonctions, dont dépend le second membre de l'équation $\frac{dt}{d\rho_1} = 1 : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}$, par leurs valeurs obtenues, nous pourrons avoir, par une seule quadrature, la fonction ρ_1 et toutes les autres caractéristiques du mouvement exprimées au moyen de t.

Ce qui nous importe le plus c'est de mettre en évidence le caractère analytique des intégrales dans le voisinage de $\rho_1 = 0$.

D'après le théorème de M. PAINLEVÉ on est assuré, que le long de toute trajectoire (où $\frac{d\rho_1}{dt}$ ne soit pas identiquement nulle) le mouvement ne cesse pas d'être régulier, c'est-à-dire, les intégrales sont toujours des fonctions holomorphes. Au contraire, on ne sait rien, si les points se meuvent le long des trajectoires singulières. Dans le paragraphe suivant nous verrons, qu'elles sont caractérisées univoquement par les intégrales du système (1^{IV}), qui sont holomorphes dans le domaine de $\rho_1 = 0$ (bien entendu, ce point au plus excepté).

§ 4. *Forme définitive des équations.*

I. *Nouvelle transformation de variables.* — Dans le système (1^{IV}) remplaçons les variables ρ_1, P_1, θ_1, Φ_1 par des nouvelles r, R, ϑ_1', φ_1', liées aux premières par les relations:

$$(15) \qquad r = \sqrt{\rho_1}, \qquad R = -rP_1, \qquad \vartheta_1' = \frac{\theta_1}{r^4}, \qquad \varphi_1' = \frac{\Phi_1}{r^4 \sin^2 \vartheta_1}.$$

La signification des variables ϑ_1', φ_1' est bien simple.

Écrivons à cet effet:

$$\vartheta_1' = \frac{\theta_1}{\rho_1} : \rho_1, \qquad \varphi_1' = \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1} : \rho_1 \sin \vartheta_1,$$

et rappelons-nous que $\frac{\theta_1}{\rho_1}$ et $\frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1}$ sont les composantes de la vitesse relative de P_1 selon les lignes polaires ϑ_1, φ_1 (v. § 1, n° 4).

Nous tirerons tout court, que ϑ_1' et φ_1' sont respectivement les vitesses angulaires des projections de P_0P_1 sur les plans $\varphi_1 = \text{const.}$, $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$.

La première des (15) nous donne:

$$(16)\qquad d\rho_1 = 2r\,dr.$$

En outre, ayant égard aux expressions (2''') de H_1 et H_2:

$$(17_a)\qquad \frac{\partial H_1}{\partial P_1} = P_1 = -\frac{R}{r},$$

$$(17_b)\qquad \frac{\partial H_1}{\partial \Theta_1} = \frac{\Theta_1}{\rho_1^2} = \frac{\Theta_1}{r^4} = \vartheta_1',$$

$$(17_c)\qquad \frac{\partial H_1}{\partial \Phi_1} = \frac{\Phi_1}{\rho_1^2 \sin^2\vartheta_1} = \frac{\Phi_1}{r^4 \sin^2\vartheta_1} = \varphi_1'.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} = -\frac{\Phi_1^2 \cos\vartheta_1}{\rho_1^2 \sin^3\vartheta_1} + \mu_1 m_1 m_2 \frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1} + \frac{m_2 \rho_1}{\rho_2^3}\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1} - \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1}.$$

Si nous calculons $\dfrac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1}$, en nous servant des (8), nous trouvons:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1} = \frac{1}{\Delta}\Big\{(\rho_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 - x_2)\rho_1 \cos\vartheta_1 \cos\varphi_1 + (\rho_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 - y_2)\rho_1 \cos\vartheta_1 \sin\varphi_1 - (\rho_1 \cos\vartheta_1 - z_2)\sin\vartheta_1\Big\}$$

$$= -\frac{1}{\Delta}\rho_1\big\{x_2 \cos\vartheta_1 \cos\varphi_1 + y_2 \cos\vartheta_1 \sin\varphi_1 - z_2 \sin\vartheta_1\big\} = -\frac{\rho_1}{\Delta}\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}.$$

Par conséquent:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} = -\frac{\Phi_1^2 \cos\vartheta_1}{\rho_1^2 \sin^3\vartheta_1} + m_2 \frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2^3} - \frac{\rho_1}{\Delta^3}\right),$$

ou même, d'après (15):

$$(17_d)\qquad \frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} = r^4\left\{-\varphi_1'^2 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1 + \frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}\right\}.$$

Par un calcul analogue on pourrait obtenir:

$$(17_e)\qquad \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1} = m_2 r^2\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial \nabla_1}{\partial \varphi_1}.$$

En envisageant les dérivées de H_2 par rapport aux variables du second point, on a:

$$\frac{\partial H_2}{\partial p_2} = \mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0 \mu_1} \frac{\partial \nabla_2}{\partial p_2}$$

$$= \mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0 \mu_1} \left(P_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \frac{\Theta_1}{\rho_1} \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 - \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1} \sin \varphi_1 \right).$$

$$(17_f) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_2}{\partial p_2} = \dfrac{1}{r} \Big\{ r\mu_2 p_2 + \dfrac{1}{m_0 \mu_1} (- R \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + r^3 \vartheta_1' \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 \\ \qquad\qquad - r^3 \varphi_1' \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1) \Big\}, \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial q_2} = \dfrac{1}{r} \Big\{ r\mu_2 q_2 + \dfrac{1}{m_0 \mu_1} (- R \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + r^3 \vartheta_1' \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 \\ \qquad\qquad + r^3 \varphi_1' \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1) \Big\}, \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial r_2} = \dfrac{1}{r} \Big\{ r\mu_2 r_2 + \dfrac{1}{m_0 \mu_1} (- R \cos \vartheta_1 - r^3 \vartheta_1' \sin \vartheta_1) \Big\}; \end{cases}$$

$$(17_g) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_2}{\partial x_2} = \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3} x_2 - \dfrac{m_1 m_2 (r^2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - x_2)}{\Delta^3}, \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial y_2} = \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3} y_2 - \dfrac{m_1 m_2 (r^2 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - y_2)}{\Delta^3}, \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial z_2} = \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3} z_2 - \dfrac{m_1 m_2 (r^2 \cos \vartheta_1 - z_2)}{\Delta^3}. \end{cases}$$

En vertu de l'égalité (16) et des relations (17_a), (17_b), la première des équations du mouvement peut s'écrire:

$$\frac{d\vartheta_1}{2r\,dr} = \frac{\vartheta_1'}{-\dfrac{R}{r}},$$

ou bien:

$$(18_a) \qquad \frac{d\vartheta_1}{dr} = -2r^2 \frac{\vartheta_1'}{R}.$$

D'une manière analogue la deuxième s'écrit:

$$(18_b) \qquad \frac{d\varphi_1}{dr} = -2r^2 \frac{\varphi_1'}{R}.$$

En dérivant la quatrième des (15) par rapport à r, et en se servant de (16), on a:

$$\frac{d\vartheta_1'}{dr} = -\frac{4\Theta_1}{r^5} + \frac{1}{r^4}\frac{d\Theta_1}{dr} = -\frac{4}{r}\vartheta_1' + \frac{2}{r^3}\frac{d\Theta_1}{d\rho_1}.$$

Si nous avons égard à l'équation $\frac{d\Theta_1}{d\rho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}$ du système (1^{IV}) et aux (17_a), (17_d), l'égalité précédente nous donne:

$$(18_c)\qquad r\frac{d\vartheta_1'}{dr} = -4\vartheta_1' + \frac{2r^3}{R}\left\{-\varphi_1'^2 \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\vartheta_1}\right\}.$$

De la même manière on a:

$$\frac{d\varphi_1'}{dr} = -\frac{4\Phi_1}{r^5\sin^2\vartheta_1} - \frac{2\Phi_1}{r^4\sin^3\vartheta_1}\cos\vartheta_1\frac{d\vartheta_1}{dr} + \frac{1}{r^4\sin^2\vartheta_1}\frac{d\Phi_1}{dr}$$

$$= -\frac{4\varphi_1'}{r} - \frac{2\varphi_1'\cos\vartheta_1}{\sin\vartheta_1}\frac{d\vartheta_1}{dr} + \frac{2}{r^3\sin^2\vartheta_1}\frac{d\Phi_1}{d\rho_1}.$$

En éliminant $\frac{d\vartheta_1}{dr}$, au moyen de (18_a), et en remplaçant $\frac{d\Phi_1}{d\rho_1}$ par l'expression, qui est fournie par la quatrième des ((1^{IV}), I) et par les (17_a), (17_e), on a:

$$(18_d)\qquad r\frac{d\varphi_1'}{dr} = -4\varphi_1' + \frac{2r^3}{R}\left\{\frac{1}{\sin^2\vartheta_1}\left[-\varphi_1'\vartheta_1'\frac{\sin 2\vartheta_1}{2} + \frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\vartheta_1}\right]\right\}.$$

Pour les équations du second groupe la transformation est immédiate, de sorte que nous n'insisterons pas.

Elles deviennent:

$$(18_e)\qquad \frac{dx_2}{dr} = -\frac{2r}{R}\left\{r\mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\cos\varphi_1\right.$$

$$\left.-r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1)\right\},\quad \text{etc.};$$

$$(18_f)\qquad \frac{dp_2}{dr} = -\frac{2r^2}{R}\left\{\frac{m_0 m_2}{\rho_2^3}x_2 - \frac{m_1 m_2(r^2\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - x_2)}{\Delta^3}\right\},\quad \text{etc.}$$

Posons maintenant:

$$(19)\left\{\begin{aligned}
\beta_1 &= -\varphi_1'^2\frac{\sin 2\vartheta_1}{2}+\frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3}-\frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\vartheta_1},\\
\beta_2 &= \frac{1}{\sin^2\vartheta_1}\left[-\varphi_1'\vartheta_1'\frac{\sin 2\vartheta_1}{2}+\frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3}-\frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\varphi_1}\right],\\
\alpha_1 &= r\vartheta_1',\\
\alpha_2 &= r\varphi_1',\\
\alpha_3 &= r\mu_2 p_2+\frac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\cos\varphi_1+r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\cos\varphi_1-r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1),\\
\alpha_4 &= r\mu_2 q_2+\frac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\sin\varphi_1+r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\sin\varphi_1+r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\cos\varphi_1),\\
\alpha_5 &= r\mu_2 r_2+\frac{1}{m_0\mu_1}(-R\cos\vartheta_1\qquad\quad -r^3\vartheta_1'\sin\vartheta_1),\\
\alpha_6 &= r\left\{\frac{m_0m_2}{\rho_2^3}x_2-\frac{m_1m_2(r^2\sin\vartheta_1\cos\varphi_1-x_2)}{\Delta^3}\right\},\\
\alpha_7 &= r\left\{\frac{m_0m_2}{\rho_2^3}y_2-\frac{m_1m_2(r^2\sin\vartheta_1\sin\varphi_1-y_2)}{\Delta^3}\right\},\\
\alpha_8 &= r\left\{\frac{m_0m_2}{\rho_2^3}z_2-\frac{m_1m_2(r^2\cos\vartheta_1-z_2)}{\Delta^3}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Écrivons, à la place de $\vartheta_1(r)$, $\varphi_1(r)$, $x_2(r)$, $y_2(r)$, $z_2(r)$, $p_2(r)$, $q_2(r)$, $r_2(r)$, respectivement $\lambda_1(r)$, $\lambda_2(r)$, ..., $\lambda_8(r)$. Alors, puisque $\vartheta_1'(r)=\frac{d\vartheta_1(r)}{dt}$ et $\varphi_1'(r)=\frac{d\varphi_1(r)}{dt}$, nous pourrons encore remplacer $\vartheta_1'(r)$ et $\varphi_1'(r)$ par $\lambda_1'(r)$ et $\lambda_2'(r)$.

D'après (18_a), ..., (18_f) et (19) le système transformé de (1^{IV}) sera enfin:

$$(S)\quad\left|\begin{aligned}
\frac{d\lambda_i}{dr} &= -2r\frac{\alpha_i}{R}, &&(i=1,2,\ldots,8)\\
r\frac{d\lambda_j'}{dr} &= -4\lambda_j'+2r^3\frac{\beta_j}{R}. &&(j=1,2)
\end{aligned}\right.$$

II. *Comportement des seconds membres des équations* (S) *au voisinage d'une position de choc.* — Il est intéressant de mettre en évidence le comportement, dans le voisinage de $r = 0$, des fonctions α, β introduites par les positions (19).

En vertu de l'identité:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right) = \frac{\Delta - \rho_2}{\rho_1} \, \frac{\Delta^2 + \rho_2 \Delta + \rho_2^2}{\rho_2^3 \Delta^3}$$

on voit, que, pour $r = 0$, le produit $\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)$ reste fini. De plus, pour des valeurs finies des variables, $\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}$ et $\frac{\partial \nabla_1}{\partial \varphi_1}$ gardent, dans le même domaine, des valeurs finies.

Enfin la fonction:

$$R = -rP_1 = \pm \sqrt{\left\{ 2(m_0 + m_1) + r^2 \mu_1 \left[2\left(h + \frac{m_0 m_1}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) - \mu(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) \right] \right.}$$
$$\left. - r^6(\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 \sin^2 \vartheta_1) \right\},$$

dont l'expression se tire de (10) et de (9), (15), reste différente de zéro, pour r suffisamment petite (v. § 2, n° 1, lemme I). On tire, que les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_8, \beta_1$ sont régulières pour des valeurs finies des arguments et dans le domaine de $r = 0$. Mais on ne peut rien dire, *a priori*, à l'égard de β_2, car elle est affectée par le diviseur $\sin \vartheta_1$, qui peut s'annuler.

Si l'on pouvait démontrer, que, pour $t = t_1$, la fonction $\vartheta_1' = \frac{d\vartheta_1}{dt}$ reste finie, on pourrait conclure, que ϑ_1 tendrait, pour cette valeur du temps, vers une valeur déterminée et finie.[1] Si, par hasard, cette valeur annulait $\sin \vartheta_1$, il suffirait de changer l'orientation des axes x, y, z pour éviter ce cas exceptionnel.

Mais, répétons-le, à cette conclusion on arriverait seulement après avoir démontré, que ϑ_1' reste finie.

En nous servant des hypothèses: $\lim_{t=t_1} r = 0$, et limite inférieure de ρ_2 (dans le domaine de $t = t_1$) plus grande que zéro, nous avons tâché de

[1] Il suffirait d'appliquer la méthode suivie dans le § 2, n° 1.

donner cette démonstration. Nous devons cependant avouer que nos efforts ont été sans résultat.

C'est notre conviction, que la propriété ci-dessus soit vraie. Les raisons, qui nous engagent dans cette opinion, sont principalement deux: I. Dans le cas du problème restreint la propriété est vérifiée. II. L'intuition physique du phénomène du choc des deux points $P_0 P_1$ nous fait voir que, lorsque la distance $P_0 P_1$ sera réduite suffisamment petite (par rapport à la distance $P_0 P_2$), le troisième point aura une influence presque nulle sur le mouvement relatif des deux premiers. C'est-à-dire, P_0, P_1 se mouvront, l'un par rapport à l'autre, selon les lois du mouvement newtonien de deux points. Si l'on admet donc, qu'ils doivent se choquer au bout du temps t_1, on est entraîné à penser, que P_1, dans le voisinage de P_0, suit, par une grande approximation, une des trajectoires de choc dans le mouvement non-troublé. Mais ces trajectoires sont des droites sortant de P_0, par conséquent les fonctions ϑ_1, φ_1 et leurs dérivées ϑ_1', φ_1' tendront vers des limites finies.[1]

En résumé nous pouvons donc retenir, que la fonction β_2, comme toutes les autres, sera régulière, dans le voisinage de $r = 0$, pour toutes les valeurs finies de ses arguments.

Nous en tirons, que les seconds membres des équations du système (S) sont réguliers dans ce domaine des variables. La valeur $r = 0$ sera donc singulière, pour les intégrales du problème des trois corps, parce que les premiers membres des deux dernières équations contiennent le facteur r.

§ 5. *Intégrales qui correspondent aux trajectoires singulières.*

I. *Théorème d'existence. — Le système* (S) *admet, dans le domaine de* $r = 0$, ∞^8 *intégrales holomorphes, dont* λ_1' *et* λ_2', *pour* $r = 0$, *se réduisent égales à zéro, tandis que les autres prennent des valeurs constantes arbitraires.*

Remarquons tout de suite, qu'un système d'intégrales holomorphes de (S) doit satisfaire à ces équations même pour la valeur zéro de la

[1] Nous aurions pu admettre que $\lim\limits_{t=t_1} \vartheta_1' = \lim\limits_{t=t_1} \varphi_1' = 0$, mais nous nous contentons d'une hypothèse moins restrictive, car nous verrons, qu'elle nous suffit pour pouvoir en tirer, que les deux dérivées tendent vers zéro.

variable indépendante. Mais, comme les deux dernières équations s'écrivent tout simplement, pour cette valeur: $\lambda'_1 = 0$, $\lambda'_2 = 0$, il faudra qu'on ait précisément $\lambda'_1(0) = 0$, $\lambda'_2(0) = 0$. Après cela nous pouvons encore remarquer, que la forme particulière de nos équations nous permet de déterminer, au moyen d'elles, les successifs coefficients des séries, qui donnent les développements des fonctions au voisinage de $r = 0$.

Nous pourrons affirmer en outre, que ces coefficients seront des fonctions périodiques par rapport aux valeurs initiales $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$ des λ_1, λ_2. En effet les seconds membres des équations peuvent évidemment être envisagés comme des fonctions régulières de r, λ_i, $\lambda_i^{(0)}$, λ'_1, λ'_2 et, par conséquent, périodiques par rapport à $\lambda_1^{(0)}$ et $\lambda_2^{(0)}$, car λ_1 et λ_2 entrent au moyen de fonctions trigonométriques.

Comme nous aurons construit les séries, il faudra s'assurer, pour la démonstration du théorème, qu'elles sont convergentes.

A ce but écrivons le système (S) sous la forme:

$$(S')\quad \begin{cases} \dfrac{d(\lambda_i - \lambda_i^{(0)})}{dr} = -2r\dfrac{\alpha_i}{R}, & (i=1,2,\ldots,8) \\[2ex] r\dfrac{d\lambda'_j}{dr} = -4\lambda'_j + 2r^3\dfrac{\beta_j}{R}. & (j=1,2) \end{cases}$$

Posons en outre:

$$\lambda_i - \lambda_i^{(0)} = \nu_i, \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

et envisageons des fonctions

$$\mathfrak{L}_j(r, \nu_1, \ldots, \nu_8, \lambda'_1, \lambda'_2), \qquad (j=1,2)$$

$$\mathfrak{N}_i(r, \nu_1, \ldots, \nu_8, \lambda'_1, \lambda'_2), \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

qui soient *majorants* des fonctions $2r^2\dfrac{\beta_j}{R}$, $-2r\dfrac{\alpha_i}{R}$.

Il viendra que le système:

$$(S'')\quad \begin{cases} r\dfrac{d\lambda'_j}{dr} = -4\lambda'_j + r\mathfrak{L}_j, & (j=1,2) \\[2ex] \dfrac{d\nu_i}{dr} = \mathfrak{N}_i & (i=1,2,\ldots,8) \end{cases}$$

sera *majorant* de (S'). Pour démontrer notre théorème, il faudra donc que nous fassions voir, que (S'') admet une solution régulière $\lambda'_j(r), \nu_i(r)$, qui pour $r = 0$ devient: $\lambda'_j(0) = 0, \nu_i(0) = 0$.

Si nous nous proposons de construire les séries de TAYLOR correspondantes aux fonctions λ'_j, ν_i, nous trouvons, que leurs coefficients sont donnés par les relations:

$$(\mathrm{S}''') \quad \begin{cases} \dfrac{d^n \lambda'_j}{dr^n} = \dfrac{n}{n+4} \dfrac{d^{n-1} \mathfrak{L}_j}{dr^{n-1}}, & (j=1,2) \\ & (i=1,2,\ldots,8) \\ \dfrac{d^n \nu_i}{dr^n} = \dfrac{d^{n-1} \mathfrak{N}_i}{dr^{n-1}}. & (n=1,2,\ldots) \end{cases}$$

Elles ont été deduites par les équations (S'') en dérivant le premier groupe n fois par rapport à r, le second $n-1$ fois, et en posant $r = 0$.

Si l'on remarque, que les fonctions $\mathfrak{L}_j$ sont majorantes des fonctions $\dfrac{n}{n+4}\mathfrak{L}_j$, on tire que le système:

$$(\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}) \quad \begin{cases} \dfrac{d^n \lambda'_j}{dr^n} = \dfrac{d^{n-1} \mathfrak{L}_j}{dr^{n-1}}, & (j=1,2) \\ & (i=1,2,\ldots,8) \\ \dfrac{d^n \nu_i}{dr^n} = \dfrac{d^{n-1} \mathfrak{N}_i}{dr^{n-1}} & (n=1,2,\ldots) \end{cases}$$

est majorant de (S'''). De la sorte le système

$$(\mathrm{S}^{\mathrm{V}}) \quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_j}{dr} = \mathfrak{L}_j, & (j=1,2) \\ \dfrac{d\nu_i}{dr} = \mathfrak{N}_i, & (i=1,2,\ldots,8) \end{cases}$$

qui correspond à (S^{IV}) sera, *a fortiori*, majorant de (S). Mais les équations de (S^{V}) sont toutes régulières dans le voisinage de $r = 0$, par conséquent ce dernier système admettra certainement une solution holomorphe s'annulant pour $r = 0$.[1] Le théorème est donc démontré.

II. *Toutes les solutions du système* (S) *sont holomorphes.* — Nous pouvons maintenant nous faire la question: Le système (S) admet-il d'autres solutions hors de celles, dont nous venons de démontrer l'existence?

[1] V. PICARD. *Traité d'analyse*, a. 1892. T. II, Ch. XI, p. 308.

Pour y repondre il faut démontrer le théorème:

Hors des solutions holomorphes, il n'y a pas d'autres solutions, pour lesquelles on ait $\lambda_1'(0) = \lambda_2'(0) = 0$.

Nous employerons pour la démonstration un procédé, qui est une généralisation d'un procédé analogue, donné, dans son mémoire, par M. Levi-Civita (loc. c., p. 17).

Il faudra, à ce but, que nous donnions auparavant aux équations de (S) une forme convenante.

Le comportement des solutions holomorphes du système (S), dans le domaine de $r = 0$, nous permet de mettre celles-ci sous la forme:

$$(20)\qquad \begin{cases} \lambda_i - \lambda_i^{(0)} = rA_i\,(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}), & (i=1,2,\ldots,8) \\ \lambda_j' = rA_j^{(1)}(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}). & (j=1,2) \end{cases}$$

Il va sans dire, que $A_i(r\,|\,\lambda_i^{(0)})$ et $A_j^{(1)}(r\,|\,\lambda_i^{(0)})$ sont des fonctions régulières, par rapport à leurs arguments, au voisinage de $r = 0$. Elles sont de plus périodiques par rapport à $\lambda_1^{(0)}$ et $\lambda_2^{(0)}$.

Si nous posons maintenant:

$$(21)\qquad \begin{cases} \lambda_i = \lambda_i^{(0)} + rA_i\,(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}), & (i=1,2,\ldots,8) \\ \lambda_j' = u_j + rA_j^{(1)}(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}), & (j=1,2) \end{cases}$$

nous obtenons un système d'équations, qui peut nous fournir, dans le voisinage de $r = 0$, les quantités $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}, u_1, u_2$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8, \lambda_1', \lambda_2'$.[1]

[1] Pour s'en assurer il suffit de remarquer que:

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial \lambda_s^{(0)}} = \varepsilon_{rs} + r\frac{\partial A_r}{\partial \lambda_s^{(0)}}, \qquad \frac{\partial \lambda_r}{\partial u_j} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda_l'}{\partial \lambda_s^{(0)}} = r\frac{\partial A_l^{(1)}}{\partial \lambda_s^{(0)}}, \qquad \frac{\partial \lambda_l'}{\partial u_j} = \varepsilon_{lj},$$

$$(r, s = 1, 2, \ldots, 8;\ l, j = 1, 2)$$

où le symbole ε_{rs} dénote l'unité ou le zéro, selon que les deux indices r, s sont égaux ou différents. On peut de plus observer, que les dérivées des fonctions A_r, $A_l^{(1)}$ (régulières, comme nous l'avons vu tout à l'heure) sont finies dans le domaine de $r = 0$. On a de la sorte, que le déterminant jacobien $\dfrac{d(\lambda_1, \ldots, \lambda_8, \lambda_1', \lambda_2')}{d(\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}, u_1, u_2)}$ reste, dans ce domaine, différent de zéro, car tous ses élements principaux se réduissent, pour $r = 0$, à l'unité, tandis que les autres s'annulent.

A ce propos remarquons, que les huit équations du premier groupe dépendent seulement des deux séries de variables λ_i, $\lambda_i^{(0)}$ et elles envisagent une vraie substitution entre les deux séries mêmes. Pour résoudre le système (21), on peut donc tirer du premier groupe $\lambda_i^{(0)}$ en fonction de λ_i, et substituer ces valeurs dans les deux autres. Ces dernières peuvent être envisagées comme déjà résolues par rapport à u_1 et u_2.

Il vient ainsi:

$$(22)\qquad \begin{cases} \lambda_i^{(0)} = \lambda_i + r\overline{A}_i\,(r\,,\,\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\ldots\,,\,\lambda_8), & (i=1,2,\ldots,8) \\ u_j = \lambda_j' - r\overline{A}_j^{(1)}(r\,,\,\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\ldots\,,\,\lambda_8). & (j=1,2) \end{cases}$$

Il est important de remarquer, que $\overline{A}_i$, $\overline{A}_j^{(1)}$ doivent être des fonctions régulières par rapport à leurs arguments, et périodiques par rapport à λ_1 et λ_2 avec la période 2π.

En effet, d'après les équations (20) et (22), on a:

$$(23)\qquad -A_i(r\,|\,\lambda_i^{(0)}) = \overline{A}_i(r\,\,\lambda_i). \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

Ayant égard à la périodicité des A_i par rapport a $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$, on peut écrire:

$$A_i(r\,,\,\lambda_1^{(0)} + 2\pi\,,\,\lambda_2^{(0)} + 2\pi\,,\,\lambda_3^{(0)}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_8^{(0)}) = A_i(r\,|\,\lambda_i^{(0)}), \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

et, en vertu de (23):

$$-A_i(r\,,\,\lambda_1^{(0)} + 2\pi\,,\,\lambda_2^{(0)} + 2\pi\,,\,\lambda_3^{(0)}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_8^{(0)}) = \overline{A}_i(r\,,\,\lambda_1 + 2\pi\,,\,\lambda_2 + 2\pi\,,\,\lambda_3\,,\,\ldots\,,\,\lambda_8), \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

de sorte que l'on tirera enfin:

$$\overline{A}_i(r\,,\,\lambda_1 + 2\pi\,,\,\lambda_2 + 2\pi\,,\,\lambda_3\,,\,\ldots\,,\,\lambda_8) = \overline{A}_i(r\,|\,\lambda_i). \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

Ces relations nous confirment, que les fonctions $\overline{A}_i$ sont périodiques par rapport à λ_1 et λ_2. Alors, d'après la méthode suivie pour la résolution des équations (21), on est autorisé de conclure que $\overline{A}_1^{(1)}$ et $\overline{A}_2^{(1)}$ jouissent de la même propriété.

Écrivons maintenant le système différentiel, qui définit les nouvelles fonctions.

En dérivant les équations (22) par rapport à r, on a:

$$\frac{d\lambda_i^{(0)}}{dr} = \frac{d\lambda_i}{dr} + \frac{d(r\bar{\Lambda}_i)}{dr} = \frac{d\lambda_i}{dr} + \frac{\partial(r\bar{\Lambda}_i)}{\partial r} + r\sum_1^8{}_s \frac{\partial\bar{\Lambda}_i}{\partial\lambda_s}\frac{d\lambda_s}{dr}, \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

$$\frac{du_j}{dr} = \frac{d\lambda_j'}{dr} - \frac{d(r\bar{\Lambda}_j^{(1)})}{dr} = \frac{d\lambda_j'}{dr} - \frac{\partial(r\bar{\Lambda}_j^{(1)})}{\partial r} - r\sum_1^8{}_s \frac{\partial\bar{\Lambda}_j^{(1)}}{\partial\lambda_s}\frac{d\lambda_s}{dr}. \qquad (j=1,2)$$

Aux derivées de λ_i, λ_j' on doit substituer leurs valeurs données par les équations de (S) et, ensuite, remplacer partout les anciennes par les nouvelles variables.

On trouve ainsi:

$$\frac{d\lambda_i^{(0)}}{dr} = -2r\frac{\alpha_i}{R} + \frac{\partial(r\bar{\Lambda}_i)}{\partial r} - \frac{2r^2}{R}\sum_1^8{}_s \frac{\partial\bar{\Lambda}_i}{\partial\lambda_s}\alpha_s, \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

$$\frac{du_j}{dr} = -\frac{4}{r}(u_j + r\Lambda_j^{(1)}) + 2r^2\frac{\beta_j}{R} - \frac{\partial(r\bar{\Lambda}_j^{(1)})}{\partial r} - \frac{2r^2}{R}\sum_1^8{}_s \frac{\partial\bar{\Lambda}_j^{(1)}}{\partial\lambda_s}\alpha_s. \qquad (j=1,2)$$

Le système transformé du système (S) peut s'écrire par conséquent:

$$(24) \qquad \left|\begin{aligned} &\frac{d\lambda_i^{(0)}}{dr} = A_i, && (i=1,2,\ldots,8) \\ &r\frac{du_j}{dr} = -4u_j + rB_j. && (j=1,2) \end{aligned}\right.$$

A_i et B_j sont évidemment des fonctions régulières des arguments r, $\lambda_i^{(0)}$, u_j dans le domaine de $r=0$ et périodiques par rapport à $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$.

Il faut ajouter encore une remarque. Pour intégrer le système (S) on peut d'abord intégrer les équations (24) et substituer, ensuite, à la place de $\lambda_i^{(0)}$ et u_j dans les (21) les intégrales trouvées. Si, parmi les solutions de (S), nous voulons celles, qui pour $r=0$ fournissent $\lambda_1'=0$, $\lambda_2'=0$, il suffit, d'après (21), de déterminer les intégrales de (24), qui satisfont aux deux conditions $u_1(0)=0$, $u_2(0)=0$. En particulier, si l'on veut les intégrales de (S) holomorphes dans le domaine de $r=0$, il faut déterminer de telles intégrales de (24), en vertu desquelles les relations (21) coïncident avec les (20) identiquement, c'est-à-dire pour quelque valeur de r que ce soit. Mais cette identité a lieu seulement, si, pour toute valeur de r, $\lambda_i^{(0)} = \text{const.}$, $u_j = 0$, par conséquent on conclut que

$$(25) \qquad \lambda_i^{(0)} = \text{const.}, \qquad u_j = 0$$

constituent un système d'intégrales particulières des (24). Si nous remplaçons dans ces équations les fonctions inconnues par les valeurs (25), nous trouvons:

$$(A_i) = 0, \qquad r(B_j) = 0, \qquad (i=1,2,\ldots,8;\, j=1,2)$$

ayant designé par les symboles (A_i), (B_j) les fonctions A_i, B_j après cette substitution.

Pour que ces deux conditions soient verifiées quel que soit r, il faut et il suffit que l'on ait:

$$A_i = u_1 A_i^{(1)} + u_2 A_i^{(2)}, \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

$$B_j = u_1 B_j^{(1)} + u_2 B_j^{(2)}. \qquad (j=1,2)$$

Le système (24) s'écrira donc enfin:

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\lambda_i^{(0)}}{dr} = u_1 A_i^{(1)} + u_2 A_i^{(2)}, && (i=1,2,\ldots,8) \\ &r\frac{du_j}{dr} = -4u_j + r(u_1 B_j^{(1)} + u_2 B_j^{(2)}). && (j=1,2) \end{aligned} \right.$$

Il est aisé de se convaincre, que les fonctions $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$, $B_j^{(1)}$, $B_j^{(2)}$ sont elles mêmes régulières pour r assez petite et périodiques par rapports aux $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$.

D'après la remarque faite tout à l'heure à propos de la relation entre les solutions de (S), telles que $\lambda_1'(0) = \lambda_2'(0) = 0$, et les intégrales de (Σ), qui peuvent les engendrer, il est évident, que notre théorème sera démontré, si nous prouverons que le système (Σ) ne peut pas avoir des solutions réelles, qui pour $r = 0$ fournissent $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.

Plus précisément il faudra prouver, que, si cela se vérifie, u_1 et u_2 doivent s'annuler identiquement, c'est-à-dire, que nous devons retrouver les solutions holomorphes de (S).

Puisque les fonctions $B_j^{(1)}$, $B_j^{(2)}$ sont régulières dans le domaine des valeurs $u_1 = u_2 = r = 0$, nous pourrons déterminer un nombre positif ε, tel que pour

$$r \leqq \varepsilon, \qquad |u_1| \leqq \varepsilon, \qquad |u_2| \leqq \varepsilon,$$

elles soient développables en séries de puissances de u_1, u_2, r.

En particulier on pourra écrire:

$$(26)\qquad B_j^{(k)} = b_j^{(k)} + \sum_1^2{}_s b_{j,s}^{(k)} u_s + \sum_1^2{}_{st} b_{j,st}^{(k)} u_s u_t + \ldots \qquad (j,k=1,2)$$

En substituant ces valeurs dans les deux équations du second groupe de (Σ) on obtient:

$$r\frac{du_j}{dr} = -4u_j + r\sum_1^2{}_k \{u_k b_j^{(k)} + \mathbf{2}\}. \qquad (j=1,2)$$

Le symbole $\mathbf{n}$ remplace, comme d'habitude, l'ensemble des termes de $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux u_j.

En multipliant les deux membres de ces équations par u_j, et en ajoutant, on a:

$$r\sum_1^2{}_j u_j \frac{du_j}{dr} = -4\sum_1^2{}_j u_j^2 + \sum_1^2{}_j u_j \sum_1^2{}_k \{u_k b_j^k + \mathbf{2}\}.$$

Et, en posant

$$U^2 = u_1^2 + u_2^2,$$

nous pouvons écrire enfin:

$$(27)\qquad \frac{r}{2}\frac{dU}{dr} = -4U^2 + r\left\{\sum_1^2{}_{jk} b_j^k u_j u_k + \mathbf{3}\right\}.$$

Supposons maintenant que les fonctions u_j ne soient pas, au voisinage de $r=0$, identiquement nulles. Il y aura alors des valeurs r_0, aussi petites que l'on veut, pour lesquelles:

$$U^2(r_0) = u_1^2(r_0) + u_2^2(r_0) > 0.$$

Par hypothèse les fonctions u_j tendent vers zéro en même temps que r. Nous pourrons donc choisir une valeur r_0, telle que u_1, u_2 soient régulières dans l'intervalle $(0, r_0)$, et en outre les développements (26) soient valables. Il va sans dire, que l'on doit excepter au plus la limite inférieure de cet intervalle.

Puisque la fonction U est régulière pour $r>0$, et elle ne s'annule pas pour $r=r_0$, on pourra déterminer une valeur $r'<r_0$, telle que dans l'intervalle (r', r_0) on ait toujours $U \neq 0$. Pour toute valeur de r, à l'in-

térieur de cet intervalle, on pourra déduire de l'équation (27):

$$d\log U^2 = -8d\log r + 2\left\{\sum_{1}^{2}{}_{jk} b_j^{(k)}\frac{u_j u_k}{U^2} + \frac{3}{U^2}\right\}dr,$$

ou bien:

$$d\log Ur^4 = \left\{\sum_{1}^{2}{}_{jk} b_j^{(k)}\frac{u_j u_k}{U^2} + \frac{3}{U^2}\right\}dr.$$

Les fonctions $b_j^{(k)}$ sont régulières pour toutes valeurs finies de leurs arguments, et pour r suffisamment petite. On a de la sorte, que la fonction, qui multiplie dr dans l'équation précédente, est intégrable dans notre intervalle. On pourra tirer donc la relation:

$$\log\frac{U(r')r'^4}{U(r_0)r_0^4} = \int_{r_0}^{r'}\left\{\sum_{1}^{2}{}_{jk} b_j^{(k)}\frac{u_j u_k}{U^2} + \frac{3}{U^2}\right\}dr.$$

Comme dans l'intervalle d'intégration $u_1^2 + u_2^2 > 0$, il sera justifié de poser

$$u_1 = U\cos\omega, \qquad u_2 = U\sin\omega.$$

L'égalité précédente pourra donc être écrite:

$$\log\frac{U(r')r'^4}{U(r_0)r_0^4} = \int_{r_0}^{r'}\{b_1^{(1)}\cos^2\omega + (b_1^{(2)} + b_2^{(1)})\sin\omega\cos\omega + b_2^{(2)}\sin^2\omega + Ug(r, U, \omega)\}dr,$$

où g dénote une fonction régulière dans le domaine des valeurs considérées. Dans le second membre de notre égalité il y a donc une fonction, qui reste finie dans ce domaine. Le premier membre, au contraire, tend vers l'infini, si r, en décroissant, passe par une valeur qui annule U; en particulier si r tend vers zéro. C'est là une contradiction évidente, qui nous prouve l'exactitude de notre théorème.

Nous voulons établir maintenant, que:

Dans toute solution de (S), *holomorphe ou non, on doit avoir* $\lim_{t=t_1}\lambda_1' = \lim_{t=t_1}\lambda_2' = 0.$[1]

[1] V. la remarque faite au § 4, n° 2

La démonstration est identique pour toutes les deux fonctions. Nous nous bornerons donc à la donner seulement pour λ_1'. Considérons parmi les équations de (S):

$$r\frac{d\lambda_1'}{dr} = -4\lambda_1' + 2r^3\frac{\beta_1}{R},$$

qui peut s'écrire:

$$r^4\frac{d\lambda_1'}{dr} + 4r^3\lambda_1' = 2r^6\frac{\beta_1}{R},$$

ou bien:

$$\frac{d}{dr}(r^4\lambda_1') = r^4\frac{2r^2\beta_1}{R}.$$

Le rapport $\frac{2r^2\beta_1}{R}$ reste fini pour des valeurs de r suffisamment près de zéro et pour des valeurs finies des autres variables. Pour s'en convaincre, il suffit de ce rappeler que β_1 reste finie (v. § 4, n° 2) et R ne peut pas s'annuler (v. § 2, n° 1, lemme I). En choisissant une valeur r_0 assez petite, pour que la fonction $\frac{2r^2\beta_1}{R}$ soit intégrable entre r_0 et 0, on tirera de l'égalité précédente:

$$[r^4\lambda_1']_{r=0} - [r^4\lambda_1']_{r=r_0} = \int_{r_0}^{0} r^4\frac{2r^2\beta_1}{R}\,dr.$$

Mais le produit $r^4\lambda_1'$ s'annule pour $r = 0$, car la fonction

$$r^3\lambda_1'\left(= r^3\vartheta_1' = \rho_1^{\frac{3}{2}}\frac{\theta_1}{\rho^2} - \frac{\theta_1}{\sqrt{\rho_1}}\right)$$

reste finie (v. § 2, n° 1, lemme I); par conséquent nous pourrons écrire:

$$r_0^4\lambda_1'(r_0) = \int_0^{r_0} r^4\frac{2r^2\beta_1}{R}\,dr,$$

ou même

$$\lambda_1'(r_0) = \int_0^{r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\frac{2r^2\beta_1}{R}\,dr.$$

Si nous remarquons que dans tout l'intervalle d'intégration $\frac{r}{r_0} \leqq 1$, et que de la sorte la fonction à intégrer reste toujours finie, nous déduisons, que le second membre est une fonction régulière de la limite supérieure. Si cette limite tend vers zéro, le premier membre y tendra donc lui même.

Voilà ce que nous devions prouver.

En réunissant les résultats de ce théorème et ceux du précédent, nous pouvons énoncer la propriété:

Dans le domaine de $r = 0$ le système (S) *ne peut admettre que des solutions holomorphes.*

III. *Correspondence univoque entre les trajectoires de choc et les intégrales holomorphes dans le voisinage de $r = 0$.* — Arrivés à ce point il est naturel de se demander, si chacune de ces ∞^8 solutions correspond à un choc.

En d'autres mots nous pouvons nous proposer la question: Pourvu que le mouvement ait lieu le long d'une des trajectoires (S), y aura-t-il une valeur t_1 du temps, telle que $\lim\limits_{t=t_1} r = 0$? Voici la réponse.

Nous avons déjà observé, que, après avoir intégré le système (S) (ou même (1^{IV})), on peut avoir la loi du mouvement en intégrant l'équation:

$$\frac{dt}{d\rho_1} = 1 : \frac{\partial H_1}{\partial P_1},$$

dont le second membre doit être exprimé par les intégrales trouvées. Cette équation (en rappelant que $\frac{\partial H_1}{\partial P_1} = P_1 = -\frac{R}{r}$ et $d\rho_1 = 2r dr$) équivaut à:

$$dt = -\frac{2r^2}{R} dr.$$

D'après le comportement de R dans le domaine de $r = 0$, on tire que $-\frac{2r^2}{R}$ est une fonction intégrable dans un intervalle $(0, r)$ suffisamment petit. On pourra donc écrire:

$$t_1 - t = \int_0^r \frac{2r^2}{R} dr, \tag{28}$$

t_1 étant la valeur de t correspondente à $r = 0$. Puisque le second membre est fini, nous pouvons répondre affirmativement à la demande, que nous nous étions faite.

Les résultats, que nous avons obtenus, peuvent être résumés par le théorème:

Toutes et seulement les solutions du système (S), *qui sont holomorphes pour* $r = 0$, *correspondent aux trajectoires le long desquelles a lieu, au bout d'un temps fini, un choc entre les deux points* $P_0 P_1$.

IV. *Chocs passés et chocs futurs.* — Jusqu'ici nous n'avons jamais fait aucune distinction entre les chocs qui peuvent arriver et ceux qui ont eu déjà lieu. Ce dernier pas peut être fait en considérant l'équation (28).

Elle nous dit, que, puisque le facteur dr est toujours négatif, le signe de dt est le même que celui de R. Mais nous avons vu que:

$$(29)\quad R = -rP_1 = \pm\sqrt{\Big\{2(m_0+m_1) + r^2\mu_1\Big[2\Big(\frac{m_0 m_2}{\rho_2}+\frac{m_1 m_2}{\Delta}\Big) - \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\Big] - r^6(\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 \sin^2\vartheta_1\Big\}}$$

(v. § 4, n° 2), par conséquent le système (S) nous fournit des trajectoires correspondantes aux chocs futurs ou passés, selon que nous prenons le radical avec le signé $+$ ou $-$.

§ 6. *Conditions de choc.*

I. *Déterminations de ces conditions.* — Pour accomplir la récherche, que nous avons entreprise nous nous proposons maintenant de caractériser les conditions de choc. C'est-à-dire que nous voulons chercher des équations auxquelles doivent satisfaire les valeurs initiales des variables, dont dépend le mouvement des trois points (ou, si l'on veut, le mouvement relatif de deux entre eux), pour qu'à partir de ces valeurs il y ait un choc au bout d'un temps fini.

Nous avons vu que, pour avoir toutes les trajectoires singulières, il faut remplacer par des valeurs arbitraires les constantes d'intégration, qui entrent dans les équations (20). On a de la sorte, que les relations cherchées s'obtiendront en éliminant les paramètres arbitraires entre les

équations susdites.[1] Il a été déjà montré, dans le paragraphe précédent, que cette opération est possible. Pour l'effectuer il suffit de se rappeler, que le second groupe des équations (22) a été obtenu par l'élimination des paramètres $\lambda_i^{(0)}$ entre les équations (21). Mais, comme celles-ci coïncident avec les (20), pourvu que l'on pose $u_1 = u_2 = 0$, on atteindra le résultat que l'on cherche, en posant $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ dans le deuxième groupe des (22). On trouve ainsi:

$$\lambda_j' - r^2 A_j^{(1)}(r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8) = 0. \qquad (j=1,2) \tag{30}$$

Nous avons déjà remarqué que ces relations peuvent nous représenter les conditions de choc entre deux autres points de notre système, pourvu que la signification des lettres soit changée cycliquement.

En indiquant tout court par $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$ les premiers membres de (30), nous pouvons donc conclure que deux relations du type:

$$u_1^{(1)} u_1^{(2)} u_1^{(3)} = 0, \qquad u_2^{(1)} u_2^{(2)} u_2^{(3)} = 0$$

sont caractéristiques pour le choc entre deux quelconques de nos points. Si, au contraire, les conditions initiales vérifient l'une ou l'autre des inégalités:

$$u_1^{(1)} u_1^{(2)} u_1^{(3)} \neq 0, \qquad u_2^{(1)} u_2^{(2)} u_2^{(3)} \neq 0,$$

nous pourrons être surs que le mouvement se poursuivra régulièrement.[2]

---

[1] Nous pouvons même dire, en empoyant un language géométrique, que les équations (20) définissent dans l'espace à dix dimentions un hyperspace à huit dimentions, dont les équations s'obtiennent en éliminant les paramètres $\lambda_i^{(0)}$.

[2] Je ne crois pas inutile à ce propos de rappeler que nous sommes arrivés aux conditions $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$ (qui caractérisent un choc P_0P_1) en admettant: I° $\lim\limits_{t=t_1} P_0P_1 = 0$, II° dans le voisinage de t_1 la limite inférieure de P_0P_2 ne soit pas nulle, III° ϑ_1 et φ_1 tendent vers des valeurs déterminées et finies.

Si les deux conditions trouvées sont verifiées par les conditions initiales il y aura, au bout du temps t_1, un choc P_0P_1 qui vérifiera les trois hypothèses. S'il n'est pas en même temps $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, nous pouvons affirmer, que l'une ou l'autre des hypothèses faites n'aura pas lieu. Nous pouvons évidemment admettre que la II° soit toujours vraie, car nous étudions seulement les chocs de deux corps, mais non ceux de tous les trois. Si la I° n'est pas satisfaite, le mouvement, d'après le théorème de M. Painlevé n'a pas de singularités. Mais il n'est pas exclu que seulement la III° ne soit pas verifiée. Ce choc exceptionel, qui n'a aucun point de repère dans l'intuition, n'est pas compris dans les conditions $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, et il échappe effectivement à notre discussion.

Voilà ce que nous voulions mettre en évidence.

Il ne faut pas cependant se tromper sur la portée de ce résultat. Nous ne pouvons pas assurer la régularité indéfinie du mouvement, mais seulement la régularité jusqu'à une valeur t' du temps pas trop éloignée de l'instant initial, car la biunivocité entre les trajectoires de choc et les solutions holomorphes du système (S) a été démontrée seulement pour r suffisamment petit. Si les conditions du mouvement pour $t = t'$ sont telles que les inégalités précédentes soient encore vérifiées, le mouvement sera encore régulier pendant un autre intervalle (t', t''); et ainsi de suite.

II. *Comportement analytique des deux conditions trouvées au voisinage d'un choc.* — Ayant égard aux équations différentielles les premiers membres des égalités (30) peuvent se développer en séries de puissances de r. Nous verrons tout à l'heure que les coefficients de ces séries pourront être déterminés de proche en proche par de simples opérations en termes finis et différentiations.

Il faudra que nous établissions à ce but des équations différentielles, auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\Lambda_j^{(1)}$. Les relations (30) sont valables pour toute valeur de r, tant que l'on reste sur une trajectoire singulière. Si nous dérivons ces équations par rapport à r et nous remplaçons les dérivées de λ_i, λ_j' par leurs expressions (S), nous parviendrons à des relations, qui seront valables identiquement, pourvu que nous ayons égard aux équations (30) mêmes. Nous aurons donc, en remplaçant en outre le symbole $\Lambda_j^{(1)}$ par F_j:

$$\frac{d\lambda_j'}{dr} - \frac{\partial (rF_j)}{\partial r} - r\sum_1^8{}_i \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}\frac{d\lambda_i}{dr} = 0, \qquad (j=1,2)$$

ou même, d'après (S):

$$-4\frac{\lambda_j'}{r} + 2r^2\frac{\beta_j}{R} - r\frac{\partial F_j}{\partial r} - F_j + \frac{2r^2}{R}\sum{}_i \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}\alpha_i = 0 \qquad (i=1,2)$$

et enfin, en vertu de (30):

$$(31) \qquad 5F_j + r\frac{\partial F_j}{\partial r} = \frac{2r^2}{R}\left(\beta_j + \sum_1^8{}_i \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}\alpha_i\right). \qquad (j=1,2)$$

Substituons maintenant à la place des fonctions λ_j' (qui entrent dans les expressions de α_i, β_j, R) leurs valeurs rF_j. Les seconds membres de (31) pourront alors être envisagés comme des fonctions des produits $rF_j, r\frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}$. On tire de la sorte deux équations simultanées aux dérivées partielles, qui sont à même de nous donner les coefficients des séries que l'on cherche.

Posons à ce but

$$F_j = \sum_0^\infty {}_m f_j^{(m)} r^m. \qquad (32) \qquad (j=1,2)$$

Les équations (31) s'écriront donc:

$$\sum_0^\infty {}_m (5+m) f_j^{(m)} r^m = \Omega_j\left(r, \lambda_i; \sum_0^\infty {}_m f_j^{(m)} r^{m+1}; \sum_0^\infty {}_m \frac{\partial f_j^{(m)}}{\partial \lambda_i} r^{m+1}\right). \qquad (j=1,2)$$

Dérivons maintenant les deux membres n fois par rapport a r et posons ensuite $r=0$. Il est aisé de voir, que dans les premiers membres il nous reste seulement les deux coefficients $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$ multipliés par $(5+n)\underline{|n}$, tandis que dans les seconds membres nous aurons des fonctions des coefficients $f_j^{(0)}, \ldots, f_j^{(n-1)}$ et de leurs dérivées par rapport aux λ_i.

Une couple quelconque de coefficients des mêmes puissances de r dans les séries (32) pourra donc être déterminée lorsque les coefficients des puissances inférieures soient connus. Les deux premiers $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}$ se tirent des équations (31) (combinées avec les (32)) en posant $r=0$, par conséquent tous les autres s'obtiendront de proche en proche.

III. *Développement approximatif suivant les puissances de r.* — Maintenant que nous avons démontré la possibilité d'effectuer ces développements, nous donnerons, pour les réaliser, une méthode, qui est essentiellement différente de celle, que nous avons indiquée tout à l'heure, mais qui est bien plus commode. Nous développerons les deux membres de (31) en séries de puissances et nous égalerons ensuite les coefficients des mêmes puissances. Il nous convient d'abord de remarquer que les seconds membres sont multipliés par le facteur r^2 et que par conséquent les coefficients $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_1^{(1)}, f_2^{(1)}$ des F_j seront nuls. Il sera donc permis de partir des développements:

$$F_j = r^2 \sum_0^\infty {}_m \omega_j^{(m)} r^m. \qquad (33) \qquad (j=1,2)$$

Les premiers membres des égalités (31) deviennent:

$$5F_j + r\frac{\partial F_j}{\partial r} = 5r^2 \sum_0^\infty {}_m \omega_j^{(m)} r^m + r\left\{2r\sum_0^\infty {}_m \omega_j^{(m)} r^m + r^2 \sum_0^\infty {}_m m\omega_j^{(m)} r^{m-1}\right\}$$

$$= r^2 \sum_0^\infty {}_m (7+m)\omega_j^{(m)} r^m,$$

et les égalités mêmes pourront être remplacées par les:

$$(34)\qquad \sum_{0}^{\infty}{}_m (7+m)\,\omega_j^{(m)} r^m = \frac{2}{R}\left\{\beta_j + r^2 \sum_{1}^{8}{}_i \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{\partial \omega_j^{(m)}}{\partial \lambda_i}\,\alpha_i r^m\right\}. \qquad (j=1,2)$$

Il faut maintenant que nous nous procurions les éléments, qui nous sont nécessaires pour les développements des seconds membres.

En vertu des positions (8) et (15) nous pouvons écrire:

$$\Delta^2 = r^4 - 2r^2\nabla_1 + \rho_2^2 = \rho_2^2\left\{1 - 2\frac{r^2}{\rho_2^2}\nabla_1 + \left(\frac{r^2}{\rho_2}\right)^2\right\}.$$

Par conséquent:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho_2}\left\{1 - \frac{r^2}{\rho_2^2}(2\nabla_1 - r^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho_2}\left\{1 + r^2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2} + r^4\frac{3\nabla_1^2 - \rho_2^2}{2\rho_2^4} + \mathbf{6}\right\}.$$

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{\rho_2^3}\left\{1 + r^2\frac{3\nabla_1}{\rho_2^2} + r^4\frac{3(5\nabla^2 - \rho_2^2)}{2\rho_2^4} + \mathbf{6}\right\}.$$

Le symbole $\mathbf{n}$ remplace l'ensemble des termes de $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport à r.

L'expression (29) de R peut s'écrire aussi:

$$R = \pm\left\{2(m_0 + m_1) + r^2\mu_1\left[2\left(h + \frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right]\right.$$
$$\left. - r^6(\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 \sin^2\vartheta_1)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, ayant égard aux relations (30) et au développement de $\frac{1}{\Delta}$, nous aurons:

$$R = \pm\left\{2(m_0 + m_1) + 2\mu_1 r^2\left[h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right] + \mathbf{4}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

ou même:

$$R = \pm\sqrt{2(m_0 + m_1)}\left\{1 + \frac{r^2}{2m_0 m_1}\left[h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right] + \mathbf{4}\right\}.$$

On tire par suite:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pm\sqrt{2(m_0 + m_1)}}\left\{1 - \frac{r^2}{2m_0 m_1}\left[h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right] + \mathbf{4}\right\}.$$

D'après les positions (19) nous avons:

$$\beta_2 = -r^2 F_2^2 \frac{\sin 2\vartheta_1}{2} - m_2\left(\frac{3\nabla_1}{\rho_2^2} + r^2\frac{3(5\nabla^2 - \rho_2^2)}{2\rho_2^4} + 4\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\vartheta_1}.$$

ou bien, en vertu de (33):

$$\beta_1 = -\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\vartheta_1} - r^2\frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2) + 4.$$

D'une manière analogue:

$$\beta_2 = \frac{1}{\sin^2\vartheta_1}\left\{-\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\varphi_1} - r^2\frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial\varphi}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2) + 4\right\},$$

$$\alpha_1 = r^2 F_1 = 4,$$

$$\alpha_2 = r^2 F_2 = 4,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{m_0\mu_1}\left\{\mp\sqrt{2(m_0+m_1)}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + rm_0\mu_1\mu_2 p_2 \right.$$
$$\left. \mp r^2\frac{\sqrt{2(m_0+m_1)}}{2m_0m_1}\left[h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right]\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + 4\right\},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{m_0\mu_1}\left\{\mp\sqrt{2(m_0+m_1)}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + rm_0\mu_1\mu_2 q_2 \right.$$
$$\left. \mp r^2\frac{\sqrt{2(m_0+m_1)}}{2m_0m_1}\left[h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right]\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + 4\right\},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{m_0\mu_1}\left\{\mp\sqrt{2(m_0+m_1)}\cos\vartheta_1 + rm_0\mu_1\mu_2 r_2 \right.$$
$$\left. \mp r^2\frac{\sqrt{2(m_0+m_1)}}{2m_0m_1}\left[h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2} + \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right]\cos\vartheta_1 + 4\right\},$$

$$\alpha_6 = \frac{r}{\rho_2^3}\left\{(m_0+m_1)m_2x_2 - r^2m_1m_2\left(\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - 3x_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + 4\right\},$$

$$\alpha_7 = \frac{r}{\rho_2^3}\left\{(m_0+m_1)m_2y_2 - r^2m_1m_2\left(\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 - 3y_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + 4\right\},$$

$$\alpha_8 = \frac{r}{\rho_2^3}\left\{(m_0+m_1)m_2z_2 - r^2m_1m_2\left(\cos\vartheta_1 - 3z_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + 4\right\}.$$

D'après les positions (34), en faisant $j = 1$ et en substituant les développements trouvés, nous avons alors:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_m (7 + m)\,\omega_1^{(m)} r^m =$$

$$+\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\,(1 \quad r^2 A + 4)\Bigg[\Bigg\{-\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1} - r^2\frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2) + 4\Bigg\}$$

$$+\frac{r^2}{m_1\mu_1}\Bigg\{\left(\sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial x_2} r^m\right)\left(\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + r m_0 \mu_1 \mu_2 p_2\right.$$

$$\left.\mp r^2\sqrt{2(m_0 + m_1)}\,A\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + 4\right)$$

$$+\left(\sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial y_2} r^m\right)\left(\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + r m_0 \mu_1 \mu_2 q_2\right.$$

$$\left.\mp r^2\sqrt{2(m_0 + m_1)}\,A\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + 4\right)$$

$$+\left(\sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial z_2} r^m\right)\left(\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\cos\vartheta_1 + r m_0 \mu_1 \mu_2 r_2\right.$$

$$\left.\mp r^2\sqrt{2(m_0 + m_1)}\,A\cos\vartheta_1 + 4\right)\Bigg\}$$

$$+\frac{r^3}{\rho_2^3}\Bigg\{\left(\sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial p_2} r^m\right)\Bigg((m_0 + m_1) m_2 x_2$$

$$- r^2 m_1 m_2\left(\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - 3x_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + 4\Bigg)$$

$$+\left(\sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial q_2} r^m\right)\Bigg((m_0 + m_1) m_2 y_2$$

$$- r^2 m_1 m_2\left(\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 - 3y_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + 4\Bigg)$$

$$+\left(\sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial r_2} r^m\right)\Bigg((m_0 + m_1) m_2 z_2$$

$$- r^2 m_1 m_2\left(\cos\vartheta_1 - 3z_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + 4\Bigg)\Bigg\}\Bigg].$$

où nous avons posé:

$$A = \frac{1}{2m_0 m_1}\left(h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right).$$

En ordonnant selon les puissances croissantes de r, il viendra:

$$\sum_0^{\prime}{}_m (7 + m)\omega_1^{(m)} r^m =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\Bigg[-\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1} + r^2\left\{\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1}A - \frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2)\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{m_0\mu_1}\left(\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1\right)\right\}$$

$$+ r^3\left\{\mu_2\left(p_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2} + q_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2} + r_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\right)\right.$$

$$+ \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2^3}\left(x_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial p_2} + y_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial q_2} + z_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial r_2}\right)$$

$$\left.\mp \frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{m_0\mu_1}\left(\frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1\right)\right\} + 4\Bigg].$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de r, nous parviendrons aux égalités:

$$\omega_1^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\frac{3m_2}{14\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1},$$

$$\omega_1^{(1)} = 0,$$

$$\omega_1^{(2)} = \pm\frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\left\{\frac{3m_2}{4m_0 m_1\rho_2^2}\left(h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right)\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1}\right.$$

$$- \frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2)$$

$$\left.\mp \frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{m_0\mu_1}\left(\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1\right)\right\},$$

$$\omega_1^{(3)} = \pm\frac{1}{10}\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\left\{\mu_2\left(p_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_3} + q_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2} + r_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2^3}\left(x_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial p_2} + y_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial q_2} + z_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial r_2}\right)\right\}.$$

Si nous remarquons, en vertu des positions (8), que:

$$\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1=$$

$$=\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\frac{\partial\nabla_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\frac{\partial\nabla_1}{\partial y_2}+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\frac{\partial\nabla_1}{\partial z_2}$$

$$=\mp\frac{3m_2}{14}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\,\overset{2}{\nabla}\left\{\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\vartheta_1},\nabla_1\right\}.$$

$$\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial x_2}p_2+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial y_2}q_2+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial z_2}r_2=\pm\frac{3m_2}{14}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\overset{2}{\nabla}\left(V_2,\frac{\nabla_1^2}{\rho_2^2}\right)^{[1]}$$

$$\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial p_2}x_2+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial q_2}y_2+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial r_2}z_2=0,$$

où:

$$V_2=p_2x_2+q_2y_2+r_2z_2,$$

nous aurons enfin:

$$\omega_1^{(0)}=\mp\frac{3m_2}{14\rho_2^2}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\vartheta_1},$$

$$\omega_1^{(1)}$$

$$\omega_1^{(2)}=\pm\frac{m_2}{9}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\left|\frac{3m_1}{7(m_0+m_1)}\overset{2}{\nabla}\left\{\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\vartheta_1},\nabla_1\right\}\right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\left\{\frac{3\nabla_1^2}{4m_0m_1\rho_2^2}\left(h+\frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{m_0+m_1+m_2}{(m_0+m_1)m_2}(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right)+\frac{3}{2}\frac{\nabla_1}{\rho_2^3}\quad\frac{5\nabla_1}{2\rho_2}\right\}\right|.$$

$$\omega_1^{(3)}=-\frac{3(m_0+m_1+m_2)}{70(m_0+m_1)^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\overset{2}{\nabla}\left(V_2,\frac{\nabla_1^2}{\rho_2^2}\right).$$

[1] Nous avons posé évidemment:

$$\overset{2}{\nabla}(f,\varphi)=\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial\varphi}{\partial z_2},$$

D'une manière parfaitement identique on pourrait déduire:

$$\omega_2^{(0)} = \mp \frac{3m_2}{14\rho_2^2}\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \varphi_1},$$

$$\omega_2^{(1)} = 0,$$

$$\begin{aligned}\omega_2^{(2)} = \pm \frac{m_3}{9 \sin^2 \vartheta_1}\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\Bigg[&\frac{3m_1}{7(m_0 + m_1)}\overset{2}{\nabla}\left\{\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \varphi_1}, \nabla_1\right\} \\ &- \frac{\partial}{\partial \varphi_1}\left\{\frac{3\nabla_1^2}{4 m_0 m_1 \rho_2^2}\left(h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2}\right.\right. \\ &\left.\left.- \frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1)m_2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right) + \frac{3}{2}\frac{\nabla_1}{\rho_2^3} - \frac{5\nabla_1^3}{2\rho_2^4}\right\}\Bigg],\end{aligned}$$

$$\omega_2^{(3)} = \mp \frac{3(m_0 + m_1 + m_2)}{70(m_0 + m_1)^2 \sin^2 \vartheta_1}\frac{\partial}{\partial \varphi_1}\overset{2}{\nabla}\left(V_2, \frac{\nabla_1^2}{\rho_2^2}\right).$$

Ayant égard à ces formules nous pouvons conclure que, *lorsque* P_1 *est suffisamment près de* P_0, les deux équations:

$$(35) \qquad \begin{cases} \vartheta_1' - r^3(\omega_1^{(0)} + \omega_1^{(2)} r^2 + \omega_1^{(3)} r^3) = 0, \\ \varphi_1' - r^3(\omega_2^{(0)} + \omega_2^{(2)} r^2 + \omega_2^{(2)} r^3) = 0 \end{cases}$$

nous fournissent les deux conditions cherchées entre les valeurs initiales des variables, dont dépend le mouvement des trois points. Ces équations nous permettrons de décider, avec une certitude suffisante, sur la régularité du mouvement avant ou après l'instant initial.

Les équations (30) sont valables, et leurs premiers membres peuvent être regardés comme des fonctions analytiques de r, pourvu que celle-ci soit assez petite.

En effet nous ne savons rien par rapport à la grandeur du rayon de convergence des séries (32), car nous avons démontré seulement, qu'il n'est pas nul. *A fortiori* nous ne pourrons rien conclure, si nous remplaçons les conditions (30) par les (35) (qui équivalent à celles-là seulement par approximation) si nous ne partons pas d'une position de P_1 assez près de P_0.

Rome, mai 1904.

TABLE DES MATIÈRES.

EINE AUF UNENDLICHE PRODUKTE SICH BEZIEHENDE FEHLERABSCHÄTZUNGSREGEL

VON

W. FR. MEYER
in KÖNIGSBERG i/P

(Auszug eines Briefes an den Herausgeber.)

Ich gestatte mir, Ihnen eine allgemeinere, sich auf unendliche Produkte beziehende Fehlerabschätzungsregel mitzuteilen.

Ich schicke einen einfachen Hülfssatz über natürliche Logarithmen voraus. Sei g eine reelle positive Grösse, und es sei bekannt, dass $|lg|$ unterhalb der positiven Grösse γ liege, so soll der Unterschied zwischen g und 1 nach einer für positive und negative Werte von $g-1$ gemeinsamen Regel abgeschätzt werden.

Ist erstens $g > 1$, so hat man nach Voraussetzung:

$$(1) \qquad lg < \gamma, \qquad g < e^{\gamma},$$

also:

$$(2) \qquad g - 1 < e^{\gamma} - 1,$$

oder, wenn man e^{γ} in die Exponentialreihe entwickelt und hinter dem zweiten Gliede abbricht — so dass $\gamma < 2$ vorauszusetzen ist —

$$(3) \qquad g - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Ist zweitens $g < 1$, so wird nach Voraussetzung:

$$(1') \qquad |lg| = l\frac{1}{g} < \gamma, \qquad \frac{1}{g} < e^{\gamma}, \qquad \frac{1}{g} - 1 < e^{\gamma} - 1, \qquad 1 - g < g(e^{\gamma} - 1),$$

also, da $g < 1$, a fortiori:

(2′) $$1 - g < e^{\gamma} - 1,$$

und, um so mehr, wie oben:

(3′) [illegible]

Demnach liefert die Zusammenfassung von (2), (2′); (3), (3′) den fraglichen Hülfssatz:

Ist g reell und positiv, $|lg| < \gamma$, $0 < \gamma < 2$, so ist, gleichgültig ob $g \gtrless 1$:

(I) $$|g - 1| < e^{\gamma} - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Sei jetzt ein unendliches konvergentes Produkt vorgelegt:

(4) $$\Pi = (1 + v_0)(1 + v_1)\ldots(1 + v_\nu)\ldots(1 + v_{\nu+p-1})\ldots,$$

wo die v beliebig positiv und negativ seien; $|v_n|$ sei mit u_n bezeichnet, und von $n > \nu$ an sei $u_n < 1$.

Man betrachte zuvörderst den einfacheren Fall, wo Π *absolut* (und damit unbedingt) konvergiert, wo also die Reihe der u konvergiert.

Es soll der »*Fehler*« des Produktes Π abgeschätzt werden, wenn man hinter dem ν^{ten} Faktor $1 + v_{\nu-1}$ abbricht, d. i. die Differenz $P_{\nu,p} - 1$, wo $P_{\nu,p}$ das *Restprodukt* bedeutet:

(5) $$P_{\nu,p} = (1 + v_\nu)(1 + v_{\nu+1})\ldots(1 + v_{\nu+p-1}).$$

Nach dem Mittelwertsatze wird:

$$l(1 + v_n) = \frac{v_n}{1 + \vartheta_n v_n} \qquad (0 < \vartheta_n < 1).$$

Ist v_n positiv, so hat man $l(1 + v_n) < v_n (= u_n)$. Ist v_n negativ $= -u_n$, so hat man $|l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u_n}$. Mithin ist in beiden Fällen:

(6) $$|l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u_n} \qquad (n \geqq \nu),$$

oder, da mit Rücksicht auf $\lim u_n = 0$ alle u_n $(n > \nu)$ unterhalb einer gewissen Grenze u liegen:

$$(7) \qquad |l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u},$$

folglich:

$$(8) \qquad |lP_{\nu,p}| < \frac{1}{1 - u}(u_\nu + u_{\nu+1} + \ldots + u_{\nu+p-1}).$$

Die Klammer rechterhand ist der Rest $R_{\nu,p}$ der u-Reihe; da die Reihe der u konvergiert, so bleibt auch $R_{\nu,p}$ unter einer gewissen, von p unabhängigen Grenze R_ν (die mit wachsendem ν gegen Null konvergiert). Damit geht (8) über in:

$$(9) \qquad |lP_{\nu,p}| < \frac{1}{1 - u} R_\nu.$$

Wendet man hierauf den Hülfssatz (I) *an, so hat man für die gesuchte Fehlerabschätzung:*

$$(\mathrm{II^a}) \qquad |P_{\nu,p} - 1| < e^{\frac{1}{1-u}R_\nu} - 1 < \frac{\frac{1}{1-u}R_\nu}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u}R_\nu}.$$

Nunmehr gehe man zu dem Falle über, wo das Produkt Π (gegen einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert) *bedingt konvergiert*, wo also auch die Reihe der v nur bedingt, und zugleich die Reihe der v^2 konvergiert. Der einmal erweiterte Mittelwertsatz liefert:

$$l(1 + v_n) = v_n - \frac{v_n^2}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \vartheta_n v_n)^2} \qquad (0 < \vartheta_n < 1),$$

somit:

$$(10) \qquad lP_{\nu,p} = R_{\nu,p} - \frac{1}{2} \sum_{n=\nu}^{n=\nu+p-1} \frac{v_n^2}{(1 + \vartheta_n v_n)^2} \qquad (0 < \vartheta_n < 1),$$

wo

$$R_{\nu,p} = v_\nu + v_{\nu+1} + \ldots + v_{\nu+p-1}$$

der Rest der v-Reihe bedeutet.

Wegen $\lim\limits_{n=\infty} R_{n,p} = 0$ lässt sich bei gegebenem $n = \nu$ eine feste obere (positive) Grenze ρ_ν angeben, sodass $|R_{\nu,p}|$ für jedes p unterhalb ρ_ν bleibt.

Mit Rücksicht auf $\lim v_n = 0$ bleibt wiederum von $|v_\nu| = u_\nu$ ab $u_n < u$. Damit geht aus (10) die Ungleichung hervor:

$$|lP_{\nu,p}| < \rho_\nu + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-u)^2} \sum_{n=\nu}^{n=\nu+p-1} v_n^2. \tag{11}$$

Da aber Σv^2 konvergiert, so bleibt auch $\sum\limits_{n=\nu}^{n=\nu+p-1} v_n^2$ bei gegebenem ν und beliebigem p unterhalb einer festen oberen Grenze V_ν. *Mit Rücksicht auf* (I) *liefert demnach* (11) *die gesuchte Fehlerabschätzung:*

$$|P_{\nu,p} - 1| < e^{\rho_\nu + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-u)^2} V_\nu} - 1 < \frac{\rho_\nu + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2} V_\nu}{1 - \frac{1}{2}\rho_\nu - \frac{1}{4}\frac{1}{(1-u)^2} V_\nu}. \tag{II^b}$$

Auf Grund der Formeln (II^a), (II^b) ist die Fehlerabschätzung für unendliche konvergente Produkte erledigt.

Die in meinem letzten Schreiben mitgeteilten Fehlerabschätzungsregeln für unendliche Produkte lassen sich auf das komplexe Gebiet übertragen. Was zuvörderst den Hülfssatz (I) für den natürlichen Logarithmus angeht, so sei jetzt P eine komplexe Grösse $= 1 + P_1$, $|P_1| < 1$, und

$$|lP| < \gamma \qquad (\gamma \text{ reell, } > 0).$$

Dann wird:

$$e^{|lP|} - 1 < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}},$$

$$e^{|lP|} - 1 = |lP| + \frac{1}{2}|lP|^2 + \dots,$$

$$P - 1 = e^{lP} - 1 = lP + \frac{1}{2}(lP)^2 + \dots,$$

somit:

$$|P - 1| < e^{|lP|} - 1 < e^\gamma - 1;$$

Der auf komplexe Grössen ausgedehnte Hülfssatz (I) lautet demnach:

Bedeutet P eine komplexe Grösse $= 1 + P_1$, $|P_1| < 1$, so folgt aus der Voraussetzung $|lP| < \gamma$, dass:

$$(\mathrm{I}') \qquad |P - 1| < e^{\gamma} - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Es sei jetzt das unendliche Produkt Π vorgelegt:

$$(1) \qquad \Pi = (1 + v_0)(1 + v_1)\ldots(1 + v_\nu)\ldots(1 + v_{\nu+p-1})\ldots,$$

wo die v_i komplexe Grössen seien, deren absolute Beträge $u_i < 1$ vorausgesetzt werden.

Es werde gleich der allgemeine Fall in Betracht gezogen (cf. A. PRINGSHEIM, Math. Annalen, XXII, (1883), p. 480) dass die Reihen der v, $v^2, \ldots, v^{n-1}$ $(n \geqq 1)$ *bedingt* konvergieren, dagegen die Reihe der v^n *unbedingt*.

Bedient man sich also der Bezeichnungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} R_{\nu,p}^{(k)} = v_\nu^k + v_{\nu+1}^k + \ldots + v_{\nu+p-1}^k, & (k=1,2,\ldots,n-1) \\ R_{\nu,p} = u_\nu^n + u_{\nu+1}^n + \ldots + u_{\nu+p-1}^n, \end{cases}$$

so wird ν so gross vorausgesetzt, dass die absoluten Werte der $R_{\nu,p}^{(k)}$ nebst $R_{\nu,p}$ bereits unter gewisse Grenzen $\rho_\nu^{(k)}$, V_ν heruntergedrückt seien, die mit wachsendem ν beliebig klein werden:

$$(3) \qquad |R_{\nu,p}^{(k)}| < \rho_\nu^{(k)}, \qquad R_{\nu,p} < V_\nu.$$

Von u_ν an seien alle $u_i \leqq u$, wo auch u mit wachsendem ν beliebig klein wird.

Dann gilt:

$$(4) \qquad l(1 + v_i) = v_i - \frac{v_i^2}{2} + \frac{v_i^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{v_i^{n-1}}{n-1} + S_i^{(n)},$$

und damit für das Restprodukt $P_{\nu,p}$:

$$(5) \qquad lP_{\nu,p} = \sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} l(1 + v_i) = R_{\nu,p}^{(1)} - \frac{1}{2} R_{\nu,p}^{(2)} + \frac{1}{3} R_{\nu,p}^{(3)} - \ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{R_{\nu,p}^{(n-1)}}{n} + \sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} S_i^{(\nu)}.$$

Nach dem CAUCHY'schen Konvergenzkriterium für die logarithmische Reihe ist aber:

$$(6)\qquad \left|\sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} S_i^{(\nu)}\right| < \frac{1}{n}\frac{u_i^n}{1-u_i} < \frac{1}{n}\frac{u_i^n}{1-u},$$

somit folgt für den absoluten Wert von $lP_{\nu,p}$ gemäss (3):

$$(7)\qquad |lP_{\nu,p}| < \rho_\nu^{(1)} + \frac{1}{2}\rho_\nu^{(2)} + \frac{1}{3}\rho_\nu^{(3)} + \ldots + \frac{1}{n-1}\rho_\nu^{(n-1)} + \frac{1}{n}\frac{V_\nu}{1-u}.$$

Bezeichnet man die rechte Seite dieser Ungleichung mit γ, (die für $\lim n = \infty$ den Grenzwert Null hat) so entsteht auf Grund von (I') *die gewünschte Fehlerabschätzungsregel:* [1]

$$(\mathrm{II})\qquad |P_{\nu,p} - 1| < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1-\frac{\gamma}{2}}.$$

Für $n = 1$ tritt der einfachste Fall ein, dass das Produkt Π unbedingt konvergiert.

[1] Im Falle reeller v, $n = 2$, ist die Regel noch etwas schärfer, als die im ersten Schreiben angegebene, da $\frac{1}{1-u} < \frac{1}{(1-u)^2}$.

RECHERCHE SUR LES CHAMPS DE FORCE HYDRODYNAMIQUES

PAR

V. BJERKNES
à STOCKHOLM.

I. *Introduction.*

1. Les recherches théoriques et expérimentales de C. A. Bjerknes ont fait ressortir une analogie profonde entre certains phénomènes hydrodynamiques et les phénomènes électriques ou magnétiques.[1] Mais cette analogie n'est démontrée jusqu'ici que dans une étendue très limitée. Car les développements théoriques se restreignent au cas spécial, où les corps, qui produisent les champs, affectent la forme sphérique.

Je me propose de développer ici la théorie sans aucune restriction de cette nature.

2. Pour y arriver, j'ai changé légèrement la manière de poser le problème. Au lieu de considérer le mouvement de corps rigides, ou de corps solides élastiques, je considère le mouvement de *corps fluides* dans le fluide.

Une modification de ce genre est nécessaire au point de vue physique. Car si, dans le problème des sphères, on pousse les approximations au delà d'une certaine limite, on rencontre un défaut dans l'analogie.[2] Ce défaut est la conséquence évidente de la rigidité que possèdent les corps de forme sphérique. Car la rigidité introduit entre le corps et le fluide ambiant

---

[1] Voir V. Bjerknes: *Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie*, vol. I et II, Leipzig 1900—02.

[2] l. c. T. II, p. 175.

un contraste qui n'a rien de correspondant dans la théorie des phénomènes électriques ou magnétiques. En effet, dans la théorie de ces phénomènes on représente à l'aide d'un même système d'équations les champs à l'intérieur des corps et les champs dans le milieu ambiant, avec cette seule différence que dans le milieu extérieur le système d'équations se réduit à une forme spécialisée. Je prends donc, dans le problème hydrodynamique, un point de départ tout-à-fait analogue: je suppose que le mouvement du système hydrodynamique est déterminé, dans toute son étendue, par les équations les plus générales des fluides parfaits; et je suppose qu'en vertu de certaines propriétés spéciales ces équations se simplifient d'une manière déterminée dans le fluide qui est extérieur aux corps fluides.

3. Le problème, étant posé de cette manière, se simplifie en même temps au point de vue mathématique. Car la recherche d'une analogie possible se réduit donc évidemment à une comparaison directe des équations hydrodynamiques avec les équations des champs électriques ou magnétiques. On serait tenté, il est vrai, de conclure de suite qu'une analogie générale n'existe pas, les équations hydrodynamiques étant totalement différentes des équations des champs électromagnétiques. Mais cette conclusion est trompeuse: on peut en transformant les équations des fluides parfaits les ramener à une forme, qui se rapproche singulièrement des équations de Maxwell pour le cas de l'électromagnétisme stationnaire.

Je suis arrivé à cette transformation en essayant de discuter le mouvement d'un élément du fluide en m'appuyant sur les mêmes principes qui ont permis à C. A. Bjerknes de discuter le mouvement d'un corps sphérique dans le fluide. Voici l'idée qui préside à cette discussion.[1] On considère le mouvement actuel du fluide comme le résultat de la superposition de deux mouvements particls, appelés dans la terminologie de C. A. Bjerknes, le mouvement *induit* et le mouvement *d'énergie*. C'est le mouvement induit qui constitue le *champ*, proprement dit. Le mouvement d'énergie joue un double rôle. D'un côté il correspond à l'état de *polarisation intrinsèque* des aimants permanents ou des corps à polarisation électrique intrinsèque, tels que les cristaux pyroélectriques. D'un autre coté il correspond au mouvement *visible* que prennent les corps sous l'action des

[1] l. c. T. I, p. 133—210, T. II, p. 238—274.

forces pondéromotrices du champ. Si on passe ensuite au cas où l'analogie se présente sous la forme la plus complète, c'est à dire au cas des mouvements vibratoires, la vitesse d'énergie se divise en deux parties, une partie rigoureusement périodique, qui correspond au champ intrinsèque, et une partie progressive, qui correspond au mouvement visible.

C'est en appliquant ces mêmes principes dans des conditions plus générales, qu'on arrive à la solution complète du problème des analogies entre les champs hydrodynamiques et les champs électriques ou magnétiques.

II. *Hypothèses générales.*

4. Les quantités scalaires ou vectorielles, dont on se sert dans la mécanique des milieux continus, peuvent se diviser en deux groupes distincts, que j'appellerai le groupe *cinématique* et le groupe *dynamique*. Les quantités du premier groupe dépendent seulement, comme l'indique leur nom, des notions de longueur et de temps, celles du second dépendent aussi de la notion de *densité*. J'appellerai correspondantes par rapport aux dimensions, ou simplement correspondantes, deux quantités, dont les dimensions sont les mêmes à un facteur près des dimensions de la densité, ML^{-3}.

Il est important de faire attention simultanément aux correspondances et aux différences que présentent entre elles ces quantités. C'est pourquoi je désignerai par les même lettres des quantités correspondantes, mais en marquant d'une barre la quantité appartenant au groupe dynamique.

La correspondance que je définis ainsi n'est pas uniforme au point de vue mathématique. A une quantité de l'un des groupes on peut adjoindre un nombre quelconque de quantités correspondantes qui appartiennent à l'autre groupe. Mais l'intérêt, qui s'attache à la correspondance, augmente d'autant plus que se distinguent davantage les quantités correspondantes par des analogies ou des contrastes caractéristiques dans leurs propriétés mathématiques ou physiques.

Citons un premier exemple de quantités correspondantes. La force par unité de masse, ou la force accéleratrice, dont je désigne les composantes par X, Y, Z, appartient au groupe cinématique, les dimensions étant simplement celles d'une accélération. La force par unité de volume,

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, appartient au contraire au groupe dynamique. Désignant la densité par q, ou bien le volume spécifique par k,

$$\text{(a)} \qquad k = \frac{1}{q},$$

les relations entre les composantes de ces deux forces s'écriront

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \overline{X} &= qX \quad \text{ou bien} \quad & X &= k\overline{X}, \\ \overline{Y} &= qY & Y &= k\overline{Y}, \\ \overline{Z} &= qZ & Z &= k\overline{Z}. \end{aligned}$$

Ces quantités correspondantes sont liées par les relations les plus simples possibles. Nous rencontrerons plus tard des quantités correspondantes qui ont entre elles des relations plus compliquées.

5. Soient maintenant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque géométrique, u, v, w les composantes de la vitesse d'un point physique quelconque appartenant au fluide, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ les composantes de la force par unité de volume, qui agit sur ce point fluide, p la pression et k le volume spécifique du fluide. Les équations de mouvement du fluide s'écriront alors

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{k}\frac{du}{dt} &= \overline{X} - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{1}{k}\frac{dv}{dt} &= \overline{Y} - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{1}{k}\frac{dw}{dt} &= \overline{Z} - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

A ces équations dynamiques il faut ajouter l'équation de continuité, qu'on peut écrire sous la forme

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Remarquons que chacun des membres de cette équation représente la vitesse d'expansion d'un élément mobile du fluide, rapportée à l'unité de volume de cet élément.

On doit se rappeler que dans ces équations la différentiation par rapport au temps $\frac{d}{dt}$ se rapporte aux changements qui s'achèvent au point physique mobile. Si l'on veut passer aux changements qui s'achèvent au point géométrique immobile, on emploie le développement eulerien

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{c}$$

où $\frac{\partial}{\partial t}$ se rapporte aux changements qui s'achèvent au point géométrique immobile.

III. *Transformation des équations hydrodynamiques.*

6. Les équations que je viens d'écrire servent à calculer le mouvement *actuel* du fluide. Je décomposerai ce mouvement en deux mouvements partiels, qui se distingueront l'un de l'autre par certaines propriétés caractéristiques.

En écrivant

$$\begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e \\ v &= k\bar{v} + v_e \\ w &= k\bar{w} + w_e \end{aligned} \tag{a}$$

je sépare la vitesse actuelle u, v, w en deux vitesses partielles, $k\bar{u}, k\bar{v}, k\bar{w}$ et u_e, v_e, w_e, que j'appellerai plus tard, après les avoir complètement determinées, la *vitesse induite* et la *vitesse d'énergie*. J'ai écrit les composantes de la première sous la forme $k\bar{u}, k\bar{v}, k\bar{w}$, par ce qu'il est préférable, ainsi qu'on le verra par la suite, de représenter le mouvement induit non pas par sa vitesse, mais par le vecteur $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, quantité de mouvement par unité de volume. J'appellerai ce vecteur *l'intensité de champ*[1] du mouvement induit.

La vitesse u, v, w du mouvement actuel, et l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ du mouvement induit, sont des quantités, dont la correspondance (4) joue pour nous le rôle le plus important. Cette correspondance se

[1] l. c. I, p. 139.

réduit à une simple proportionalité dans le cas spécial, où la vitesse u_e, v_e, w_e du mouvement énergetique est égale à zéro.

7. Je considère maintenant le membre de gauche de la première équation de mouvement (5, a). La substitution de la valeur de u (6, a) donne pour ce membre

$$\frac{1}{k}\frac{du}{dt} = \frac{1}{k}\frac{d(k\bar{u})}{dt} + \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt}.$$

En effectuant la différentiation du premier terme du second membre et tenant compte de (5, b) on trouve

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{k}\frac{du}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} + \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt}.$$

Le premier terme du 2ème membre de cette équation s'écrit en vertu du développement eulerien (5, c)

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

ou ensuite

$$\text{(b)} \qquad \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

Dans le trinome du second membre j'exprime, en vertu de (6, a), la vitesse actuelle u, v, w à l'aide des deux vitesses partielles. Ce trinome peut donc s'écrire

$$u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) + u_e\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_e\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w_e\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}$$

ou bien, si on sépare un terme qui a la forme d'une dérivée par rapport à x

$$u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) + \bar{u}u_e + \bar{v}v_e + \bar{w}w_e\right\}$$

$$-\left\{\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x} + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}\right\}.$$

Si, dans la première parenthèse, on élimine u_e, v_e, w_e à l'aide des équations (6, a), on obtient

$$u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} - \frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\right\}$$

$$- \left\{ \bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x} + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}\right\}.$$

En introduisant ce développement en (b), et ensuite le développement (b) en (a), il vient enfin

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{k}\frac{du}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{ u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} - \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\right\}$$

$$+ \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} - \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)$$

$$- \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} + w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

C'est l'expression plus développée du premier membre de la première équation de mouvement (5, a).

8. J'écris donc sous cette forme le membre de gauche de la première équation de mouvement (5, a). Je soumets ensuite l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ à la condition de satisfaire à l'équation

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{ p + u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} - \frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\right\}.$$

La vitesse u_e, v_e, w_e satisfera donc à l'équation

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt} = \bar{X} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} - w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

Ces deux équations, et les autres qui s'en déduisent par symétrie, déterminent les deux mouvements partiels. Et ces deux mouvements ainsi déterminés apparaissent comme jouissant de propriétés bien différentes.

Les équations (a) du premier mouvement partiel contiennent la pression p. Ce mouvement est donc de nature hydrodynamique proprement dite. Il existe partout où il y a de la pression variable de point à point. Son champ s'étendra donc en général à tout le fluide. C'est le mouvement que j'appellerai *le mouvement induit.*

Les équations (b) du second mouvement partiel contiennent la force extérieure $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, et en outre une force fictive d'origine hydrodynamique, dont la première composante est

$$\text{(c)} \qquad \overline{X}_e = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} - w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

Rien n'exige d'ailleurs, que ces forces soient répandues dans tout l'espace. Ce mouvement partiel peut donc être un mouvement de nature locale, qui n'existe que dans certaines parties limitées du fluide. En conservant la terminologie de C. A. Bjerknes j'appellerai ce mouvement partiel *le mouvement d'énergie* et la force fictive (c) *la force d'énergie hydrodynamique.*[1]

9. Au système des équations originaires, 5, a et b, qui détermine le mouvement actuel du fluide, on peut ainsi substituer un système d'équations plus développé, qui détermine en même temps le mouvement actuel, le mouvement partiel induit et le mouvement partiel énergétique. Voici ce système d'équations.

Le mouvement actuel se détermine en fonction des deux mouvements partiels par les équations de connexion

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e \\ v &= k\bar{v} + v_e \\ w &= k\bar{w} + w_e \end{aligned}$$

Les variations dans le temps du mouvement induit se déterminent par les équations

[1] l. c. T. I, p. 133—136.

$$
\text{(B)}\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar u}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{p + u\bar u + v\bar v + w\bar w - \frac{1}{2}k(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\right\}\\
\frac{\partial \bar v}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left\{p + u\bar u + v\bar v + w\bar w - \frac{1}{2}k(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\right\}\\
\frac{\partial \bar w}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z}\left\{p + u\bar u + v\bar v + w\bar w - \frac{1}{2}k(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\right\}.
\end{aligned}
$$

Les variations dans le temps du mouvement d'énergie se déterminent par les équations

$$
(\mathrm{C}_1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{k}\frac{du_e}{dt} &= X + X_e,\\
\frac{1}{k}\frac{dv_e}{dt} &= \overline{Y} + \overline{Y}_e,\\
\frac{1}{k}\frac{dw_e}{dt} &= \overline{Z} + \overline{Z}_e,
\end{aligned}
$$

dans lesquelles la force d'énergie hydrodynamique $\overline{X}_e, \overline{Y}_e, \overline{Z}_e$ est donnée par les expressions

$$
(\mathrm{C}_2)\qquad
\begin{aligned}
\overline{X}_e = &-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar u + \left(\bar u\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar v\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar w\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)\\
&+ \frac{1}{2}(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\frac{\partial k}{\partial x} - w\left(\frac{\partial \bar u}{\partial z} - \frac{\partial \bar w}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial \bar v}{\partial x} - \frac{\partial \bar u}{\partial y}\right),\\
\overline{Y}_e = &-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar v + \left(\bar u\frac{\partial u_e}{\partial y} + \bar v\frac{\partial v_e}{\partial y} + \bar w\frac{\partial w_e}{\partial y}\right)\\
&+ \frac{1}{2}(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\frac{\partial k}{\partial y} - u\left(\frac{\partial \bar v}{\partial x} - \frac{\partial \bar u}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial \bar w}{\partial y} - \frac{\partial \bar v}{\partial z}\right),\\
\overline{Z}_e = &-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar w + \left(\bar u\frac{\partial u_e}{\partial z} + \bar v\frac{\partial v_e}{\partial z} + \bar w\frac{\partial w_e}{\partial z}\right)\\
&+ \frac{1}{2}(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\frac{\partial k}{\partial z} - v\left(\frac{\partial \bar w}{\partial y} - \frac{\partial \bar v}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial \bar u}{\partial z} - \frac{\partial \bar w}{\partial x}\right).
\end{aligned}
$$

A ces équations il faut ajouter l'équation de continuité

$$
(\mathrm{D})\qquad \frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.
$$

Pour des raisons qu'on trouvera justifiées par les développements ultérieurs de ce mémoire on peut appeler ce système d'équations *la forme électroidique* des équations hydrodynamiques.

IV. *Discussion générale.*

10. On sait que deux quantités dérivées déterminent la nature de la distribution dans l'espace d'un vecteur quelconque u, v, w. Ce sont la quantité scalaire

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e,$$

qu'on appelle *la divergence*, et le vecteur

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= l, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= m, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= n, \end{aligned}$$

qu'on appelle *la rotation* (ou bien le *curl*) du vecteur primaire u, v, w.

Dans le cas où il existe des surfaces de discontinuité, on rencontre comme cas limite de la divergence (a) la différence des composantes normales du vecteur u, v, w de part et d'autre de la surface: c'est la *divergence de surface.* De même on rencontre comme cas limite de la rotation (b) la différence géométrique des composantes tangentielles de part et d'autre de la surface: c'est la *rotation de surface* (ou bien le glissement) à la surface de discontinuité. Nous pouvons donner à nos théorèmes en même temps une généralité et une simplicité très convenables en prenant les notions de divergence et de rotation dans le sens général où elles comprennent la divergence de surface et la rotation de surface. C'est ce que nous ferons toujours.

Si la divergence est nulle, le champ du vecteur s'appelle *solenoidal:* si la rotation est nulle, le champ s'appelle *irrotationel* ou bien *potentiel*, par ce que dans ce cas les composantes du vecteur sont les dérivées d'une fonction potentielle.

On peut considérer la divergence et la rotation en quelque sorte comme les dérivées d'un champ de vecteur. Si on les connait, on peut, par un procédé d'intégration, déterminer le champ du vecteur primaire u, v, w à un champ solenoidal et irrotationel près, qui joue le rôle de constante d'intégration. Ce champ possède un potentiel qui satisfait à l'équation de LAPLACE, et qui se détermine à l'aide des conditions aux surfaces limites du champ. En d'autres termes, la détermination de ce champ revient à la solution du problème de DIRICHLET.

Dans les recherches générales de la mathématique physique on se débarrasse ordinairement de la solution de ce problème. On y arrive en supposant que le champ s'étend à l'infini, mais qu'il a ses divergences et ses rotations dans l'éspace fini. Dans ces conditions on peut supposer, sans contradiction, que le vecteur disparait à l'infini, et le champ de LAPLACE disparait alors identiquement. Dans ce cas la divergence et la rotation déterminent donc uniformément le champ du vecteur primaire.

Si à cette propriété mathématique s'ajoutent des propriétés physiques fondamentales, ces quantités dérivées joueront forcément un grand rôle dans la théorie des phénomènes en question, ainsi que le prouvent un grand nombre d'exemples de la physique mathématique. Examinons donc la divergence et la rotation des deux vecteurs fondamentaux de notre problème, c'est à dire de la vitesse actuelle u, v, w et de l'intensité de champ u, v, w.

11. Quand il s'agit de la vitesse actuelle u, v, w, la divergence e, qu'on calcule par l'équation (10, a), exprime simplement la vitesse d'expansion d'un élément mobile du fluide, rapportée à l'unité de volume de cet élément. L'équation (a) est ainsi équivalente à l'équation de continuité (D), et on est donc amené nécessairement à considérer cette divergence comme une des quantités fondamentales de notre problème. La condition spéciale

$$e = 0 \tag{a}$$

exprime l'incompressibilité de l'élément fluide mobile. Dans la partie du fluide où cette condition est satisfaite la distribution de la vitesse actuelle est solenoidale.

La rotation (b) de la vitesse actuelle est la quantité qu'on appelle aussi quelque fois le tourbillon. Je préfère l'appeler *la densité de tourbillon*, et donner le nom de *tourbillon* à l'intégrale de sa composante normale prise sur une surface. C'est le tourbillon ainsi défini qui, d'après les célèbres théorèmes de v. Helmholtz, se conserve tout le long d'une surface matérielle mobile dans le fluide. Mais dans les conditions que suppose notre problème, les hypothèses sur lesquelles repose la démonstration des théorèmes de v. Helmholtz ne sont pas en général remplies. Pendant le mouvement des tourbillons naissent et disparaissent et le vecteur (b) n'a pas de propriétés générales assez simples pour prendre place parmi les quantités que nous considérons comme fondamentales.

Remarquons enfin que les quantités dérivées de la vitesse actuelle, que nous venons de considérer, appartiennent à la classe des quantités cinématiques. Pour les distinguer de quantités analogues, qui se présenteront tout à l'heure, nous compléterons leur désignation par l'adjonction de l'adjectif *cinématique*.

12. La divergence de l'intensité de champ

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e \tag{a}$$

est la quantité dynamique qui correspond à la vitesse d'éxpansion cinématique e. Elle n'a pas en général de signification ou de propriétés physiques très simples. Elle ne jouera donc pas de rôle absolument fondamental, et cependant, en raison des propriétés remarquables de l'intensité de champ, elle nous rendra de grands services pour la représentation analytique des phénomènes.

La rotation de l'intensité de champ jouit au contraire d'une propriété physique très remarquable. Des deux dernières équations du mouvement induit (B) on tire immédiatement

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

On peut y ajouter deux équations analogues, et l'intégration immédiate de ces équations donne

$$
\text{(b)} \qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \bar{l}\,, \\
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \bar{m}\,, \\
&\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{n}\,.
\end{aligned}
$$

Les composantes de la rotation de l'intensité de champ sont donc des constantes d'intégration. Et l'opération $\frac{\partial}{\partial t}$ se rattachant aux changements qui s'achèvent au point géométrique considéré, on voit que le vecteur $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ possède en chaque point de l'espace une direction et une valeur absolue indépendantes du temps.

Nous appellerons ce vecteur *la densité de tourbillon dynamique*, et son intégrale de surface le *tourbillon dynamique*. Cette intégrale de surface est naturellement indépendante du temps, comme la densité de tourbillon. Le mouvement induit possède donc une propriété extrêmement remarquable que l'on peut énoncer ainsi:

Le mouvement partiel induit est un mouvement à tourbillons dynamiques invariables et stationnaires dans l'espace.

Les quantités $\bar{e}$ et $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ ont ainsi en général des propriétés bien différentes de celles des quantités cinématiques correspondantes e, l, m, n. Mais dans un cas spécial ces propriétés se rapprochent: C'est lorsque la vitesse d'énergie devient identiquement nulle $u_e = v_e = w_e = 0$ et qu'en même temps le fluide est homogène, $k = k_0$. On a donc

$$
\text{(c)} \qquad
\begin{aligned}
u &= k_0 \bar{u} & & & l &= k_0 \bar{l}\,, \\
v &= k_0 \bar{v} & e &= k_0 \bar{e} & m &= k_0 \bar{m}\,, \\
w &= k_0 \bar{w} & & & n &= k_0 \bar{n}\,.
\end{aligned}
$$

Dans ce cas les quantités cinématiques et les quantités correspondantes dynamiques sont simplement proportionnelles entre elles avec le facteur de proportionalité constant k_0.

Du théorème ci-dessus il résulte le corollaire suivant:

Si à une époque quelconque le mouvement induit ne comporte pas de tourbillons dynamique dans un certain espace, il n'en comportera jamais dans cet espace.

En raison de cette propriété le cas où ces tourbillons sont nuls est particulièrement important. Dans un espace où ces tourbillons n'existent pas l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ dépendra à toute époque d'un potentiel

$$\text{(d)} \qquad \bar{u} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \qquad \bar{v} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \qquad \bar{w} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}.$$

Ces expressions rendent immédiatement intégrables les équations (E). Après l'intégration ces équations se réduisent à une seule, savoir

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = P - p - u\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - v\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - w\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{2}k\left\{\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}\right)^2\right\}$$

ou bien, en vertu de (5, c)

$$\text{(e)} \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = P - p + \frac{1}{2}k\left\{\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Ici la constante d'intégration P est indépendante des coordonnées et ne peut dépendre que du temps. La formule permet de calculer la pression p, si l'on connait en même temps le mouvement actuel et le mouvement induit.

13. Nous sommes maintenant en état de démontrer une propriété importante du second mouvement partiel, le mouvement d'énergie.

Des équations (C_1) on conclut que la vitesse d'énergie, que possède un élément mobile du fluide, peut subir des variations par suite de deux causes, l'action d'une force extérieure $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ et l'action d'une force hydrodynamique d'énergie $\overline{X}_e, \overline{Y}_e, \overline{Z}_e$. Supposons qu'aucune force extérieure n'agite l'élément consideré et examinons de plus près la force d'énergie hydrodynamique, (C_2). Le premier terme de cette force disparaîtra, si la vitesse actuelle u, v, w n'a pas de divergence, c'est à dire si l'élément en

question ne possède pas de vitesse d'expansion e. Le troisième terme disparaîtra, si le volume spécifique k n'est pas variable de point à point dans l'élément. Le quatrième et le cinquième termes disparaîtront, si, dans le volume de l'élément, l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ne possède pas de tourbillon. Si nous supposons donc que l'élément considéré appartienne à une partie du fluide homogène et incompressible, et à une partie de l'espace où le mouvement induit ne possède pas de tourbillon dynamique, l'expression de la force d'énergie hydrodynamique se réduira au second terme du deuxième membre des équations (C_2). Le système (C_1) se réduit donc à l'équation

$$\frac{1}{k}\frac{du_e}{dt} = \bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}$$

et aux deux autres qui s'en déduisent par symétrie. Ces équations nous montrent, que dans les conditions que nous avons définies, la vitesse d'énergie ne peut varier que si elle préexiste déjà dans l'élément fluide considéré. Si donc l'élément ne possède pas de vitesse d'énergie dès l'origine, il n'en aura jamais. On trouve donc le résultat suivant:

Une vitesse d'énergie n'existe jamais dans une partie du fluide qui satisfait à la fois aux cinq conditions suivantes: n'etre soumise à l'action d'aucune force extérieure; être homogène; être incompressible; avoir à l'origine une vitesse d'énergie nulle; appartenir à un espace dans lequel à l'origine du temps il n'existe pas de tourbillons dynamiques du mouvement induit.

V. *Suppositions sur la constitution du système fluide.*

14. Nous allons considérer dès maintenant un système fluide d'une constitution spéciale. Le théorème énoncé ci-dessus nous permet de concevoir un système, tel que certaines parties limitées du fluide possèdent seules la vitesse d'énergie, ou la faculté d'en pouvoir acquérir, tandis que l'autre partie, qui est illimitée, n'en possède pas, et n'en peut acquérir. Désignons la partie illimitée du nom de *fluide fondamental*, et appelons *corps* les parties limitées. Ces corps ne doivent exister qu'en nombre fini et dans une région finie de l'espace.

Les conditions qui doivent être satisfaites par le fluide fondamental sont, d'après le théorème ci-dessus, les suivantes: il doit être homogène et

incompressible, être exempt de l'action de toute force extérieure, et dépuis l'origine du temps être dénué de vitesse d'énergie et de tourbillon dynamique. Les corps se distingueront du fluide fondamental par une ou par plusieurs des qualités suivantes:

1. Posséder des vitesses d'énergie u_e, v_e, w_e.

2. Posséder des vitesses d'expansion e.

3. Posséder un volume spécifique k, différent du volume spécifique constant k_0 du fluide fondamental.

4. Posséder des tourbillons dynamiques du mouvement induit, avec la densité de tourbillon $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$.

Le tourbillon dynamique étant stationnaire dans l'espace (12), il en résulte que tout corps qui possède de tels tourbillons est aussi stationnaire dans l'espace. Nous verrons plus tard l'importance de cette remarque. Les corps, au contraire, qui n'ont pas ce mouvement tourbillonnaire, peuvent changer d'une manière quelconque leur forme ou leur position dans l'espace.

15. En traitant la dynamique de ce système on doit se rappeler que la transformation des équations hydrodynamiques, que nous avons effectuée, suppose dès l'origine une continuité complète. En effet les équations transformés contiennent des dérivées de quantités telles que k, u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, u_e, v_e, w_e. On est ainsi amené à admettre qu'il n'y a pas de changement brusque aux surfaces limites des corps: On imagine l'existence de couches de passage, dans lesquelles, avec une vitesse aussi grande que l'on voudra mais toujours d'une manière continue, les propriétés du corps convergent vers celles du fluide fondamental. Dans ces couches la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e, la densité de tourbillon $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$, et la vitesse d'expansion e tendent vers zéro, et le volume spécifique k vers la valeur constante k_0, qu'il garde partout dans le fluide fondamental. Naturellement cette couche de passage appartient au corps, et à la surface limite le corps possède déjà toutes les propriétés du fluide fondamental.

Mais il n'est pas nécessaire d'introduire cette hypothèse de continuité. On sait que les équations hydrodynamiques primitives n'exigent d'autre continuité que celle de la non-existence de vides dans l'intérieur du fluide. Rien n'empêche donc de faire disparaître l'épaisseur des couches de passage et de chercher les limites vers lesquelles convergent alors les équations (9)

pour les points de ces couches. On trouve donc qu'il se sépare de la force $(9, C_2)$ une force qui s'applique aux éléments de la surface de discontinuité, et qu'il faut compter par unité de surface. D'ailleurs on peut opérer *comme si la condition de continuité était toujours remplie,* à la condition de compter les divergences des vecteurs en question comme comprenant aussi les divergences de surface, et de compter les rotations des vecteurs comme comprenant aussi les rotations de surface. C'est ce que nous ferons toujours.

En procédant ainsi, nous considérons donc toujours les intégrales de volume où figurent les divergences ou les rotations, comme contenant implicitement des intégrales de surface dans lesquelles figurent les divergences ou les rotations de surface. Ce sont les intégrales de surface qui proviennent des intégrales de volume dans les couches de passage, quand on fait disparaître l'épaisseur de ces couches.

16. Examinons maintenant le mouvement dans le fluide fondamental.

La vitesse d'énergie étant ici nulle, le mouvement actuel s'identifie avec le mouvement induit, ce qui s'exprime par les équations

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} u &= k_0 \bar{u}, \\ v &= k_0 \bar{v}, \\ w &= k_0 \bar{w}, \end{aligned}$$

k_0 étant le volume spécifique constant du fluide fondamental. Le tourbillon dynamique étant nul, l'intensité de champ dépend d'un potentiel uniforme ou non uniforme $\bar{\varphi}$, et la vitesse actuelle u, v, w, qui est simplement proportionnelle à l'intensité de champ, dépendra aussi d'un potentiel $\varphi = k_0 \bar{\varphi}$. En introduisant l'un ou l'autre de ces potentiels dans l'équation de continuité, on trouve qu'ils satisfont à l'équation de LAPLACE. Le champ de l'un ou de l'autre de ces deux vecteurs est donc le champ solenoidal et irrotationnel bien connu. La valeur numérique des vecteurs disparait donc à l'infini au moins comme des quantités du second ordre, les potentiels au moins comme des quantités du premier ordre. Ces propriétés du champ dans ses parties infiniment éloignées nous permettent d'effectuer ci-dessous, par la manière connue, les intégrations par parties de certaines intégrales cubiques qui sont étendues à tout l'espace.

17. Le mouvement des corps se distingue de celui du fluide fondamental par l'existence d'une quantité scalaire, la vitesse d'expansion e, et de deux quantités vectorielles, la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e et la densité de tourbillon dynamique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

Considérons l'intégrale de volume

$$T = \int \frac{1}{2k}(u^2 + v^2 + w^2)d\tau \tag{a}$$

qui, étendue à tout l'espace, représente l'énergie cinétique du système. Montrons qu'on peut exprimer cette énergie à l'aide d'une intégrale qui s'étend aux corps seulement.

Écrivons la vitesse actuelle u, v, w sous la forme

$$u = k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y},$$

$$v = k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z},$$

$$w = k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}.$$

L'expression de T peut donc s'écrire

$$T = \frac{1}{2}\int\left(u\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + v\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + w\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)d\tau$$

$$+ \int\frac{1}{2k}\left\{u\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau.$$

Dans la seconde intégrale du second membre, exprimons la vitesse induite $k\bar{u}, k\bar{v}, k\bar{w}$ à l'aide de la vitesse actuelle et de la vitesse d'énergie (9, A). Alors

$$T = \frac{1}{2}\int\left(u\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + v\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + w\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)d\tau$$

$$+ \int\frac{1}{2k}\left\{u_e\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + v_e\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + w_e\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau$$

$$+ \frac{1}{2}\int\left\{\bar{u}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + \bar{v}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + \bar{w}\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau.$$

Toutes ces intégrales devraient s'étendre à l'espace entier. Mais la vitesse d'énergie n'existant que dans les corps, il suffit d'étendre la seconde intégrale aux corps seulement. Sur les deux autres on peut effectuer une intégration par parties, qu'on peut ensuite, en vertu des propriétés du champ dans les régions infiniment éloignées (16), étendre à tout l'espace. Les intégrales de surface, qui ressortent de l'intégration par partie, disparaissent donc, et en tenant compte des relations (10, a) et (12, b) on trouve l'expression suivante de l'énergie T

$$
\text{(b)} \qquad T = -\frac{1}{2}\int e\bar{\varphi}\,d\tau
$$

$$
+\int \frac{1}{2k}\left\{u_e\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)+v_e\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\right)+w_e\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau
$$

$$
-\frac{1}{2}\int(\bar{l}L+\bar{m}M+\bar{n}N)\,d\tau
$$

la première et la dernière intégrale contenant implicitement, dans le cas de discontinuités, des intégrales de surface (15).

Dans toutes ces intégrales l'expression sous le signe somme est identiquement nulle en tous les points du fluide fondamental, et nous avons donc réussi à exprimer l'énergie du mouvement induit à l'aide d'intégrales qu'il suffit d'étendre au volume des corps.

18. Nous allons en tirer une conséquence importante.

Supposons la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e, le tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et la vitesse d'expansion e égales à zéro. L'énergie T disparait comme le montre l'expression (17, b). Mais quand T disparait, l'expression (17, a) nous montre que la vitesse actuelle u, v, w disparait aussi dans tous les points de l'espace. La vitesse d'énergie étant déjà nulle par hypothèse, il en résulte que le mouvement induit disparait aussi. Dans ces conditions il n'existe plus de mouvement.

Cela étant, considérons deux champs différents, ayant en chaque point les mêmes valeurs de la vitesse d'énergie, u_e, v_e, w_e, du tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et de la vitesse d'expansion e. La différence de ces deux champs de mouvement est donc un champ dans lequel toutes ces quantités sont identiquement égales à zéro, c'est à dire, d'après ce que nous venons de voir,

un champ qui disparait complètement. Les deux champs ne peuvent donc pas différer l'un de l'autre, et il en résulte le théorème que voici.

La vitesse d'énergie, le tourbillon dynamique du mouvement induit et la vitesse d'expansion du mouvement actuel déterminent le champ de mouvement d'une manière uniforme.

19. Pour nous rendre compte de la généralité du théorème, remarquons que les corps tels que nous les avons définis peuvent avoir un mouvement quelconque. Car les forces extérieures, qui produisent le mouvement, ne sont soumises à aucune restriction. Rien ne nous empèche donc de supposer l'existence de forces qui par exemple donnent à ces corps le mouvement de corps rigides, ou de corps solides élastiques.

On a donc le droit de supposer aussi que les corps, que nous avons définis, sont réellement des corps rigides ou des corps solides élastiques. Si l'on s'imagine ces corps liquéfiés, et que l'on détermine les forces nécessaires pour leur donner, dans ces conditions, le même mouvement qu'ils auraient étant solides, et si l'on détermine ensuite les deux mouvements partiels d'après les équations (9), on peut appliquer le théorème énoncé. Dans ce sens le théorème, ainsi que tous les résultats que nous développerons ci-dessous, s'appliqueront à des corps étrangers quelconques qui se meuvent dans le fluide. Dans ces applications on doit tenir compte des divergences ou des tourbillons de surface qui existent sur les surfaces limites entre le fluide fondamental et les corps. La considération de ces divergences et de ces tourbillons de surface revient à ceci, qu'en calculant les divergences et les tourbillons, on compte la surface adjacente du fluide fondamental comme appartenant au corps.

En tout cas le théorème conduit à ce résultat remarquable que certaines particularités du mouvement, que possèdent les différents éléments des corps, (y compris en cas de discontinuité le mouvement des éléments immédiatement adjacents du fluide ambiant), déterminent le champ de mouvement dans chaque point de l'espace. On peut imaginer ce résultat découvert expérimentalement par un observateur qui ne possède que des méthodes indirectes pour observer les champs et les différentes particularités du mouvement. On comprend facilement qu'un tel observateur, en trouvant le résultat que nous venons d'énoncer, soit tenté d'en donner une

interprétation physique spéciale, en l'attribuant à une action à distance émanant des différents éléments de volume des corps, et se faisant sentir en tout point de l'éspace. Voilà le premier germe des phénomènes d'actions apparentes à distance, que nous étudierons ci-dessous.

VI. *Analogie géométrique directe des champs hydrodynamiques et des champs électromagnétiques stationnaires.*

20. Appliquons le théorème ci-dessus en considérant dès maintenant la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e, le tourbillon dynamique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et la vitesse d'expansion e comme des quantités données. Les équations, qui déterminent uniformément le champ en fonction de ces quantités données, sont donc les suivantes

$$(A) \qquad \begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e, \\ v &= k\bar{v} + v_e, \\ w &= k\bar{w} + w_e, \end{aligned}$$

$$(B) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \bar{l}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= \bar{m}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \bar{n}, \end{aligned}$$

$$(C) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e$$

auxquelles on doit joindre les conditions suivantes, qui s'appliquent au fluide fondamental

$$(D) \qquad \begin{aligned} &u_e = 0, && \bar{l} = 0, && e = 0, \\ &v_e = 0, && \bar{m} = 0, && k = k_0, \\ &w_e = 0, && \bar{n} = 0, && \end{aligned}$$

k_0 étant constant en chaque point du fluide fondamental.

21. Comparons maintenant ce système hydrodynamique à un système électromagnétique, consistant en un certain nombre de corps limités, environnés d'un milieu extérieur, qui s'étend à l'infini. Le milieu extérieur doit être homogène, et en outre dénué de toute polarisation intrinsèque, et de toute distribution de masses magnétiques ou de courants électriques. Les corps doivent se distinguer du milieu extérieur par une ou par plusieurs des propriétés suivantes:

1. Posséder des polarisations magnétiques intrinsèques, u_e, v_e, w_e.

2. Posséder une distribution de masses magnétiques avec la densité e.

3. Posséder une perméabilité magnétique k différente de la perméabilité constante k_0 du milieu extérieur.

4. Posséder une distribution de courants électriques avec la densité $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

Sous ces conditions il existe dans l'espace entier, dans le milieu extérieur ainsi que dans l'intérieur des corps, un champ magnétique stationnaire uniformément déterminé. Définissons ce champ à l'aide de deux vecteurs, savoir *l'intensité de champ magnétique* $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, et *l'induction* (dans la terminologie de Hertz *la polarisation*) *magnétique* u, v, w. Supposons enfin qu'on exprime toutes les quantités dans le système d'unités rationelles de M. Oliver Heaviside.[1] Le système d'équations, qui détermine la distribution des deux vecteurs dans l'espace, est donc justement le système (20, A—D), qui détermine la distribution des vecteurs correspondants, de la vitesse u, v, w et de l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, dans le système hydrodynamique.

En particulier, les équations (A) sont les équations de connection, qui expriment l'induction (la polarisation) en fonction de l'intensité de champ et de la polarisation intrinsèque. (B) sont les équations qui déterminent le courant électrique en fonction de l'intensité de champ magnétique. (C) est l'équation qui détermine la densité magnétique vraie (s'il en existe) en fonction de l'induction magnétique. Les équations (D) donnent enfin les simplifications qu'on admettra par hypothèse dans le milieu extérieur.

Si l'on avait employé les unités magnétiques traditionnelles, les équations du champ magnétique auraient été encore les équations (A—C), avec cette seule différence que le dernier terme à droite de chaque équation

[1] Oliver Heaviside, *Electromagnetic Theory*. London 1893. T. I, p. 116—125.

aurait été affecté du facteur numérique irrationel 4π. En introduisant dans l'hydrodynamique un système d'unitès affectant la même irrationalité, on peut naturellement donner aux formules hydrodynamiques la même forme irrationelle. Mais cette observation n'a d'autre intérêt que de montrer, à l'aide de cette image dynamique des phénomènes électromagnétiques, l'absurdité complète du système d'unités qu'on emploie aujourd'hui dans la science de l'électricité et du magnétisme.[1]

22. Le dualisme bien connu des phénomènes électriques et magnétiques a pour conséquence qu'on peut encore comparer, à un autre point, les phénomènes hydrodynamiques aux phénomènes électromagnétiques. Au lieu de considérer le champ magnétique on peut considérer le champ électrique d'un système de corps, possèdants une distribution de masses électriques vraies de densité e, des polarisations électriques intrinsèques u_e, v_e, w_e, une distribution de »courants magnétiques stationnaires» avec la densité $-\bar{l}$, $-\bar{m}$, $-\bar{n}$, et enfin des constantes diélectriques k variables d'une manière quelconque. Les équations (20, A—D) sont alors les équations qui déterminent la distribution de l'intensité de champ électrique $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ et de l'induction (la polarisation) électrique u, v, w.

Dans la pratique, suivant les circonstances, on adoptera l'une ou l'autre de ces comparaisons. La seconde présente cet avantage qu'une densité électrique vraie existe réellement, tandis qu'on ne connait pas de densité magnétique vraie. C'est donc seulement avec ce dernier mode de comparaison qu'on trouve une quantité physique réelle qui corresponde à la vitesse d'expansion e. En revanche le premier mode de comparaison a l'avantage que le tourbillon dynamique corresponde au courant électrique stationnaire qui existe réellement. Le courant magnétique, au contraire, n'est pas en général stationnaire ou ne peut l'être que momentanément. Néanmoins, pour des raisons de symétrie, il est commode de faire figurer dans les formules des symboles qui représentent ces quantités fictives, les masses magnétiques vraies et les courants magnétiques stationnaires.

23. Nous pouvons donc résumer, dans le tableau synoptique suivant, les résultats que nous venons d'obtenir, relativement à l'analogie des champs

[1] V. Bjerknes, *Hydrodynamische Fernkräfte*, t. II, p. 228.

de mouvement hydrodynamiques avec les champs électriques ou magnétiques. Les notions qui n'ont qu'un sens fictif, et que nous ne gardons que pour conserver toute la généralité du problème, sont mises entre crochets.

	champ hydrodynamique	champ magnétique	champ électrique
u, v, w	Vitesse actuelle	Induction magnétique	Induction électrique
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Intensité de champ hydrodynamique	Intensité de champ magnétique	Intensité de champ électrique
u_e, v_e, w_e	Vitesse d'énergie	Polarisation magnétique intrinsèque	Polarisation électrique intrinsèque
e	Vitesse d'expansion par unité de volume	[Densité des masses magnétiques vraies]	Densité des masses électriques vraies
$\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$	Densité de tourbillon dynamique	Densité de courant électrique stationnaire	[Densité de courant magnétique stationnaire]
k	Volume spécifique	Perméabilite magnétique	Constante diélectrique

L'analogie se restreint au cas des champs électriques ou magnétiques stationnaires. Par la voie que nous avons suivie on n'arrive pas à une analogie hydrodynamique des phénomènes électromagnétiques les plus généraux. L'analogie cesse d'exister justement au point où commence le croisement des phénomènes électriques et magnétiques, et on n'arrive ainsi qu'à définir une analogie d'ordre électrique et à une analogie d'ordre magnétique, ces deux analogies n'ayant entre elles aucune connexion.

La cause pour laquelle l'analogie cesse justement d'exister en ce point est bien claire. Au moment où le courant, qu'il soit électrique ou magnétique, devient variable, l'existence d'un champ magnétique est nécessairement accompagnée d'un champ électrique, et vice versa. Mais, dans l'image hydrodynamique des phénomènes électriques ou magnétiques, ce qui correspond au courant, c'est le tourbillon dynamique du mouvement induit, et ce tourbillon a nécessairement un caractère stationnaire par rapport à l'espace et par rapport au temps. (12).

Si donc l'on veut étendre l'analogie au delà de la limite qui nous arrête ainsi, il faut modifier essentiellement la manière de poser le problème dynamique. Mais n'abordons pas cette question des généralisations possibles de l'analogie. Bornons nous à l'approfondir dans son étendue limitée.

VII. *Analogie dynamique inverse des champs hydrodynamiques et des champs électriques ou magnétiques stationnaires.*

24. Au point de vue géométrique il existe, ainsi que nous l'avons démontré, une identité complète entre les champs hydrodynamiques que nous étudions, et les champs électriques ou magnétiques stationnaires. Occupons nous maintenant de la dynamique des mêmes champs.

Des équations (9, B) nous pouvons déduire la valeur de la force qui produit le mouvement induit, la force d'induction [1] dans la terminologie de C. A. Bjerknes. Mais une discussion ultérieure de cette force n'a pas d'intérêt pour le but que nous poursuivons ici. Car d'un côté, sans nous occuper de l'expression explicite de cette force, nous avons pu déduire toutes les propriétés géométriques des champs, et en démontrer l'analogie avec les champs électriques ou magnétiques. D'un autre côté, la dynamique interne de ces derniers champs nous est complètement inconnue, et la discussion de la dynamique des champs correspondants hydrodynamiques ne peut donc pas, dans l'état actuel de nos connaissances, servir à approfondir l'analogie qui nous occupe.

25. Il reste donc à discuter la dynamique du mouvement énergétique. D'après les équations (9, C), ce mouvement partiel est l'effet de l'action combinée de deux forces, une force extérieure non hydrodynamique $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$,

[1] Remarquons que les seconds membres de ces équations ne représentent pas les composantes de cette force. En effet, les premiers membres n'ont pas la forme du produit d'une densité par une accélération. C'est d'ailleurs un avantage important de la méthode que nous employons ici, que de permettre d'éviter toute considération explicite de la force d'induction avec ses propriétés bizarres. La forme des équations (9, B) nous permettent de déduire les propriétés géométriques du mouvement induit sans nous occuper de ses propriétés dynamiques.

et une force due à la pression du fluide, la force d'énergie hydrodynamique $\overline{X}_e, \overline{Y}_e, \overline{Z}_e$. En tenant compte des équations (10, a) et (12, b) nous pouvons écrire les expressions des composantes de cette seconde force

$$(A) \quad \begin{aligned}
\overline{X}_e &= -e\overline{u} + \left(\overline{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} - (\overline{m}w - \overline{n}v), \\
\overline{Y}_e &= -e\overline{v} + \left(\overline{u}\frac{\partial u_e}{\partial y} + \overline{v}\frac{\partial v_e}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial w_e}{\partial y}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2)\frac{\partial k}{\partial y} - (\overline{n}u - \overline{l}w), \\
\overline{Z}_e &= -e\overline{w} + \left(\overline{u}\frac{\partial u_e}{\partial z} + \overline{v}\frac{\partial v_e}{\partial z} + \overline{w}\frac{\partial w_e}{\partial z}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2)\frac{\partial k}{\partial z} - (\overline{l}v - \overline{m}u).
\end{aligned}$$

Chaque terme dans l'expression de cette force affecte la forme d'un produit de deux facteurs. Dans chaque produit l'un des facteurs, e, $\frac{\partial u_e}{\partial x}$, $\frac{\partial v_e}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u_e}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial k}{\partial x}, \ldots, \overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$, représente un état ou une propriété intrinsèque de l'élément de volume qui subit la force. Ce facteur est identiquement nul dans le fluide fondamental. Il en résulte que ce sont les corps seulement qui sont soumis à l'action de la force (A). L'autre facteur dépend du champ, représenté soit par l'intensité de champ $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$, soit par la vitesse actuelle u, v, w. Mais le champ dépend de son côté de certaines particularités caractéristiques du mouvement des différents éléments de volume des corps, comme le montre le théorème fondamental (18). La force (A) apparaît donc comme une action à distance, que subit chaque élément d'un corps de la part de tous les autres éléments de ce corps et de tous les éléments des corps distants.

Il se manifeste donc, dans notre système hydrodynamique, entre les divers éléments des corps, des forces qui ont le même caractère d'actions apparentes à distance que les forces pondéromotrices dans un système électrique ou magnétique.

26. Avant d'aller plus loin, rappelons nous ce que nous savons, et ce que nous ignorons, concernant les forces pondéromotrices dans les champs électriques ou magnétiques.

Nos expériences directes se rapportent aux *forces résultantes s'appliquant à des corps de dimensions finies.* Ces forces résultent d'une distribution de forces élémentaires, qui s'appliquent aux différentes éléments de volume des corps. Mais la connaissance de la force résultante ne suffit pas pour déterminer uniformément ces forces élémentaires.

On a essayé, il est vrai, de définir, par des voies indirectes, le système des forces élémentaires dans les champs électriques et magnétiques. On a même essayé d'aller encore plus loin, de déterminer les pressions à l'intérieur des champs, pressions dans lesquelles on cherche, d'après FARADAY et MAXWELL, la cause de ces forces. Mais on a le droit de se demander, si ces développements sont à l'abri de tout reproche. Une discussion de ces développements, faite en s'éclairant à la lumière de l'analogie hydrodynamique qui nous occupe ici, présenterait certainement un grand intérêt. Mais bornons nous ici à formuler les conclusions qu'on peut tirer, avec une sûreté absolue, relativement à l'analogie des phénomènes électriques ou magnétiques et des phénomènes hydrodynamiques. Autrement dit, bornons nous à considérer, dans le cas hydrodynamique comme dans le cas électrique ou magnétique, la force résultante appliquée à un corps de dimensions finies, c'est à dire la force dont les composantes sont

$$X = \int \overline{X}_e d\tau,$$

(a)
$$Y = \int \overline{Y}_e d\tau,$$

$$Z = \int \overline{Z}_e d\tau,$$

les intégrales étant étendues à un corps de dimensions finies.

27. En substituant les expressions (25, A) dans (26, a), on obtient les expressions de X, Y et Z, qui sont respectivement les sommes de quatre intégrales, correspondant aux quatre parties principales des formules (25, A). Ecrivons les intégrales qui se rapportent à la composante X. Nous aurons

(a)
$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

ou

$$
\text{(b)}\qquad
\begin{aligned}
X_1 &= -\int e\bar{u}\,d\tau,\\
X_2 &= \quad\int\left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)d\tau,\\
X_3 &= \quad\int\frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}\,d\tau,\\
X_4 &= -\int(\bar{m}w-\bar{n}v)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Toutes ces intégrales sont bien connues dans la théorie de l'électricité ou du magnétisme. Elles représentent la composante X de la force résultante agissant sur un corps, composante qui ressort de quatre causes différentes, X_1 due à la distribution d'électricité ou de magnétisme vrai e, X_2 due aux polarisations intrinsèques u_e, v_e, w_e, X_3 due à l'hétérogénéité (forces dépendant de l'influence électrique ou du magnétisme induit) et enfin X_4 due à la distribution des courants électriques $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ ou du courant magnétique $-\bar{l}$, $-\bar{m}$, $-\bar{n}$. Seulement, chaque intégrale est affectée d'un signe contraire à celui avec lequel elle apparait dans l'électricité ou le magnétisme.

Il faut donc en conclure que les forces résultantes qui apparaissent dans le champ hydrodynamique sont toujours égales, mais de signe opposée, aux forces résultantes qui s'appliquent aux corps dans le champ électrique ou magnétique.

28. On peut faire remarquer que les intégrales (27, b) ne représentent pas sous la forme la plus ordinaire les forces agissant dans le champ électrique ou magnétique. Montrons donc, pour plus d'évidence, la transformation des intégrales (27, b) suivant la forme employée le plus souvant pour calculer ces forces. Cette transformation repose sur l'introduction de la divergence $\bar{\bar{e}}$ (11, a) de l'intensité de champ comme quantité auxiliaire. C'est la quantité qu'on appelle, dans le cas de l'électricité ou du magnétisme, la *densité libre* d'électricité ou de magnétisme, pour la distinguer de *la densité vraie* e, qui est le quantité fondamental, proprement dite, au point de vue physique.

Remarquons que, k_0 étant constant, on peut écrire la troisième intégrale (27, b) sous la forme

$$X_3 = \int \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial(k-k_0)}{\partial x}\,d\tau.$$

Si l'on effectue maintenant une transformation par parties dans tout le volume du corps, l'intégrale de surface disparaîtra, par ce qu'à la surface $k - k_0$ est égale à zéro. Il vient donc

$$X_3 = -\int (k-k_0)\left\{\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right\}d\tau.$$

De même on obtient en transformant par parties l'intégrale X_2

$$X_2 = -\int \left\{u_e\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_e\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w_e\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right\}d\tau.$$

En faisant la somme des intégrales X_2 et X_3 et tenant compte des équations de connection (20, A) on trouve

$$X_2 + X_3 = -\int \left\{(u - k_0\bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (v - k_0\bar{v})\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + (w - k_0\bar{w})\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right\}d\tau$$

ce qu'on peut ensuite écrire, en tenant compte de (20, B)

$$\text{(a)}\quad X_2 + X_3 = -\int \left\{(u - k_0\bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (v - k_0\bar{v})\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + (w - k_0\bar{w})\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right\}d\tau$$
$$- \int \left\{(v - k_0\bar{v})\bar{n} - (w - k_0\bar{w})\bar{m}\right\}d\tau.$$

Transformons par parties la première de ces deux intégrales. L'intégrale de surface disparaîtra par ce qu'à la surface $u - k_0\bar{u} = v - k_0\bar{v} = w - k_0\bar{w} = 0$. Il reste donc seulement l'intégrale de volume. Cette intégrale se sépare en deux, dont l'une contient la divergence e de la vitesse actuelle (20, C) et l'autre la divergence $\bar{e}$ de l'intensité de champ (12, a). La première de ces intégrales est simplement $-X_1$. De même on peut séparer de la seconde intégral (a) l'intégrale $-X_4$. Il vient donc

$$X_2 + X_3 = -X_1 - X_4 - k_0\int \bar{e}\bar{u}\,d\tau - k_0\int (\bar{m}\bar{w} - \bar{l}\bar{v})\,d\tau$$

d'où l'on déduit immédiatement la valeur de X. Les valeurs de Y et Z s'en déduisent par symétrie. On arrive ainsi enfin à l'expression suivante des composantes de la force résultante appliquée à un corps

$$
\text{(b)}\qquad
\begin{aligned}
X &= -k_0\int \bar{e}\bar{u}\,d\tau - k_0\int(\bar{m}\bar{w} - \bar{n}\bar{v})\,d\tau,\\
Y &= -k_0\int \bar{e}\bar{v}\,d\tau - k_0\int(\bar{n}\bar{u} - \bar{l}\bar{w})\,d\tau,\\
Z &= -k_0\int \bar{e}\bar{w}\,d\tau - k_0\int(\bar{l}\bar{v} - \bar{m}\bar{u})\,d\tau.
\end{aligned}
$$

En cas de discontinuité ces intégrales de volume contiennent implicitement des intégrales de surface où figurent les divergences de surface $\bar{e}$ et les tourbillons de surface $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$.

Ce sont bien là les formules à l'aide desquelles on représente le plus souvant la force appliquée à un corps dans le champ électromagnétique, abstraction faite seulement des signes négatifs des seconds membres. La force se compose de deux parties, une première qui est analogue à la force vers la distribution du magnétisme libre $\bar{e}$, et une seconde qui est analogue à la force vers la distribution du courant électrique $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$, les corps se trouvant dans un milieu ayant la perméabilité magnétique k_0.

Nous avons donc bien démontré que ces forces résultantes, qui agissent sur les corps dans le champ hydrodynamique, sont, au signe près, identiques aux forces pondéromotrices résultantes qui agissent sur les corps dans le champ électromagnétique.

VIII. *Actions à distance.*

29. L'analogie que nous venons de découvrir nous montre bien nettement que les forces hydrodynamiques ont le même caractère d'actions réciproques à distance qu'ont les forces pondéromotrices dans le champ électromagnétique. Mettons aussi ce résultat explicitement en évidence, en donnant aux formules, qui expriment les forces, l'apparence extérieur qui correspond à des forces à distance.

Pour y arriver, remarquons que les formules (28, b) expriment la force résultante à l'aide de l'intensité de champ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ en connection avec la divergence $\bar{e}$ et la rotation $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ de ce même vecteur. On peut également exprimer le vecteur lui-même à l'aide de ces divergences et rotations. C'est en introduisant ces expressions du vecteur $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ dans les formules (28, b) qu'on arrive aux formules qui donnent aux forces l'apparence extérieur de forces à distance.

30. Reprenons donc l'expression d'un vecteur à l'aide de ses divergences et de ses rotations. D'abord on peut toujours exprimer un vecteur $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ à l'aide d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur en écrivant

$$
\text{(a)} \qquad
\begin{aligned}
\bar{u} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{N}}{\partial y}, \\
\bar{v} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial z}, \\
\bar{w} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{M}}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

Ensuite on peut, s'il s'agit d'un espace infini, calculer $\bar{\varphi}, \bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ à l'aide des quadratures

$$
\text{(b)} \qquad
\begin{aligned}
\bar{\varphi} &= -\int \frac{\bar{e}_1}{4\pi r}\, d\tau_1, \\
\bar{L} &= -\int \frac{\bar{l}_1}{4\pi r}\, d\tau_1, \\
\bar{M} &= -\int \frac{\bar{m}_1}{4\pi r}\, d\tau_1, \\
\bar{N} &= -\int \frac{\bar{n}_1}{4\pi r}\, d\tau_1.
\end{aligned}
$$

Dans ce cas l'indice 1 signifie que les quantités $\bar{e}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ sont données en fonction des coordonnées x_1, y_1, z_1, qui servent de lettres d'intégration. r est la distance du point x_1, y_1, z_1, mobile pendant l'intégration, au point x, y, z, où l'on cherche la valeur des quantités $\bar{\varphi}, \bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$. Les intégrations s'étendent à toutes les régions de l'espace où existent les quantités $\bar{e}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$. L'intégration effective s'étend donc au volume des corps seulement. Mais, ces quantités étant identiquement nulles dans le fluide fondamental, on peut considérer les intégrations comme étendues à l'espace entier.

31. Substitutions (30, a) dans (28, b). La composante X s'écrit

$$
\text{(a)} \qquad X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4
$$

où

$$X_1 = -k_0 \int \bar{e} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau,$$

(b)

$$X_2 = -k_0 \int \bar{e} \left(\frac{\partial \overline{M}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{N}}{\partial y} \right) d\tau,$$

$$X_3 = -k_0 \int \left\{ \overline{m} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} - \bar{n} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right\} d\tau,$$

$$X_4 = -k_0 \int \left\{ \overline{m} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial \overline{M}}{\partial x} \right) - \bar{n} \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial z} \right) \right\} d\tau.$$

x, y, z sont les lettres d'intégration, et l'intégration s'effectuee dans le volume du corps vers lequel s'exerce la force résultante que l'on cherche à déterminer.

Avant d'effectuer la substitution des valeurs de $\bar{\varphi}$, $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$, transformons la dernière des quatre intégrales. L'addition et la soustraction du terme $\bar{l} \frac{\partial L}{\partial x}$ nous permet d'écrire X sous la forme

$$X_4 = k_0 \int \left(\bar{l} \frac{\partial \overline{L}}{\partial x} + \overline{m} \frac{\partial \overline{M}}{\partial x} + \bar{n} \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right) d\tau - k_0 \int \left(\bar{l} \frac{\partial \overline{L}}{\partial x} + \overline{m} \frac{\partial \overline{L}}{\partial y} + \bar{n} \frac{\partial \overline{L}}{\partial z} \right) d\tau.$$

Or, la dernière de ces deux intégrales disparaît. Car, si nous intégrons par parties dans tout le volume du corps, nous avons une intégrale de surface qui contient les valeurs de $\bar{l}$, $\overline{m}$, $\bar{n}$ à la surface, et une intégral de volume qui contient la divergence

$$\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}$$

du tourbillon $\bar{l}$, $\overline{m}$, $\bar{n}$. Or ces deux intégrales disparaissent, parce qu'à la surface du corps le tourbillon est nul (15), et parce que la divergence d'un tourbillon est toujours identiquement nulle, comme on le voit de suite en formant la divergence des expressions (20, B). L'expression de X_4 s'écrit donc simplement

$$\text{(b')} \qquad X_4 = k_0 \int \left(\bar{l} \frac{\partial \overline{L}}{\partial x} + \overline{m} \frac{\partial \overline{M}}{\partial x} + \bar{n} \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right) d\tau.$$

En substituant maintenant d'après (30, b) les valeurs de $\bar{\varphi}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ on peut effectuer sous le second signe somme les différentiations par rapport aux variables x, y, z. Il vient donc

$$
\text{(c)} \quad
\begin{aligned}
X_1 &= \quad k_0 \iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}\, d\tau d\tau_1, \\
X_2 &= \quad k_0 \iint \bar{e}\left(\bar{m}_1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r} - \bar{n}_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}\right) d\tau d\tau_1, \\
X_3 &= \quad k_0 \iint \bar{e}_1 \left(\bar{m}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r} - \bar{n}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}\right) d\tau d\tau_1, \\
X_4 &= -k_0 \iint (\bar{l}\,\bar{l}_1 + \bar{m}\bar{m}_1 + \bar{n}\bar{n}_1)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}\, d\tau d\tau_1.
\end{aligned}
$$

On en déduit par symétrie des expressions analogues relatives aux axes y et z.

32. Ces formules donnent bien à la force considerée l'apparence d'une force à distance, se composant de quatre forces partielles.

La première de ces forces partielles parait provenir d'une force agissant entre les masses magnétoïdiques libres $\bar{e}d\tau$ et $\bar{e}_1 d\tau_1$, que portent les éléments $d\tau$ et $d\tau_1$. Elle agit conformément à la loi de Coulomb, mais avec inversion de signe, les masses magnétoïdiques de même signe s'attirant et celles de signes contraires se repoussant.

La seconde force parait provenir d'une action à distance que subirait l'élément $d\tau$ de masse magnétoïdique $ed\tau$ de la part de l'élément $d\tau_1$ siège d'un courant électroïdiques de densité de courant $\bar{l}_1, \bar{m}_1, \bar{n}_1$. Pour mieux se rendre compte de la nature de cette force on peut choisir des éléments de volume particuliers. On peut diviser le corps en tubes infiniment minces engendrés par des lignes de courant électroïdique. On trouve ainsi sans difficulté que chaque élément linéaire ds_1 d'un tel tube agit sur la masse magnétoïdique $ed\tau$ suivant la loi de Biot et Savart et suivant la règle d'Ampère, mais cette dernière règle étant inversée de signe.

La troisième force représente la force que subit l'élément de volume $d\tau$, siège du courant électroïdique $\bar{l}, \bar{m}, n$, de la part de l'élément de volume

$d\tau_1$ de masse magnétoïdique $\bar{e}_1 d\tau_1$. C'est la réaction correspondant à l'action envisagée dans le cas précédent.

La quatrième force parait provenir d'une action à distance apparente qui s'éffectuerait entre deux éléments de volume $d\tau$ et $d\tau_1$, sièges de courants électroïdiques de densités respectives $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et $\bar{l}_1, \bar{m}_1, \bar{n}_1$. En considérant les mêmes éléments de volume spéciaux que ci-dessus, on déduit facilement que deux filets de courant agissent l'un sur l'autre suivant la force qu'on deduit du potentiel de Neumann, mais avec inversion de signe.

IX. *Analogie analytique et analogie physique.*

33. Ainsi que nous l'avons trouvé, le mouvement de notre système hydrodynamique s'effectue conformément à des formules qui sont en même temps les formules fondamentales de l'électromagnétisme stationnaire. Au point de vue analytique l'analogie est complète, abstraction faite de l'inversion de signe des formules qui se rapportent aux forces pondéromotrices.

Mais bien que l'analogie analytique soit à tel point complète, un observateur qui regarde des mouvement fluides ne découvrira guère la moindre trace de cette analogie. Elle se dissimule par suite de diverses causes. D'abord le système hydrodynamique est un système en mouvement, tandis que le système électromagnétique est, au moins extérieurement, un système en repos. En général le système hydrodynamique change incessament de configuration, et l'analogie avec un système électromagnétique déterminé ne subsiste que pendant un instant, l'instant pendant lequel le système mobile passe par la configuration que possède constamment l'autre système. L'instant d'après le système hydrodynamique sera à comparer à un autre système électromagnétique, et ainsi de suite.

Il faudra donc que l'observateur se borne à faire ses observations au moment où existe l'analogie avec un système électromagnétique déterminé. Et pour pouvoir découvrir l'analogie qui existe pendant cet instant, il faudrait encore que l'observateur sût décomposer le mouvement actuel, qu'il observe, en deux mouvements partiels, et c'est là une opération qui s'éffectuera en général plus facilement dans les calculs mathématiques que dans les observations physiques.

Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que l'on n'ait pas depuis longtemps découvert cette analogie, uniquement en observant les mouvements des fluides.

34. La première condition, qui doit être satisfaite pour que l'analogie puisse ressortir visiblement aux yeux, est donc celle-ci, que le mouvement du système fluide soit d'une telle nature spéciale qu'il ne soit pas accompagné de changement de configuration essentielle. Nous verrons que cette condition nécessaire sera aussi suffisante pour que l'analogie puisse ressortir comme une réalite physique, apparente aux yeux.

Il existe deux formes de mouvements qui ne sont pas accompagnés de changements de configuration visibles. La première est celle du mouvement permanent. Dans ce cas l'invariabilité extérieure du système est assurée par la condition que le volume qu'occupe une masse quelconque du fluide sera, pendant le mouvement, toujours remplacé par une masse absolument semblable, possédant absolument le même mouvement. Un tel mouvement ne changera évidemment ni la forme extérieure des corps, ni les positions de ces corps dans l'espace.

La seconde forme est celle d'un mouvement vibratoire, qui se limite à des amplitudes très petites autour d'une configuration invariable. Dans ce cas la condition de la configuration invariable n'est remplie que d'une manière approximative. Mais l'approximation est d'autant plus grande qu'on choisit des amplitudes plus petites. On peut donc réaliser ainsi facilement dans la pratique le cas où la constatation des changements de configuration échappe à un observateur doué de sens grossiers.

35. Mais il y a une remarque importante à faire relativement à ce passage de l'analogie analytique à une analogie physique concrète. Déjà l'analogie analytique est de nature restreinte. Les formules hydrodynamiques que nous venons de développer correspondent à celles de l'électrodynamique stationnaire seulement, et non pas à celles de l'électrodynamique la plus générale. Si maintenant on passe de l'analogie analytique à une analogie physique, en introduisant l'une ou l'autre des hypothèses mentionnées ci-dessus, le domaine de l'analogie se restreint encore d'avantage. Et ce domaine se restreint de deux manières différentes suivant la nature du mouvement spécialisé.

Dans le cas du mouvement permanent on arrive à une analogie qui ressortit des traveaux de v. Helmholtz et de Lord Kelvin. Dans le cas du mouvement vibratoire on arrive à l'analogie qu'a trouvée C. A. Bjerknes pour le cas de corps sphériques, mais que nous allons démontrer ainsi d'une manière générale.

X. *État de mouvement permanent. Analogies de v. Helmholtz et de Lord Kelvin.*

36. Dans le régime permanent les corps paraîtront limités par des surfaces géométriques fixes dans l'éspace. Le mouvement du fluide extérieur sera donc complètement indépendant du mouvement que possède le fluide à l'intérieur des corps. Quelles que soient les hypothèses que l'on fasse relativement aux corps, le mouvement dans l'espace extérieur sera le mouvement irrotationnel d'un fluide homogène et incompressible, compris entre des surfaces limites fixes. Or on sait que ce mouvement ne peut exister qu'à la condition que l'espace soit à connections multiples. Il faut donc qu'un ou plusieurs des corps soient percés de canaux, à travers desquels le fluide peut circuler: c'est le mouvement de circulation à potentiel non uniforme, dont les propriétés sont bien connues. Les corps qui ne sont pas percés de canaux ne forment que des obstacles aux courants, qui existent, grâce aux canaux dans les autres corps. Partout les lignes de courant s'infléchissent tangentiellement aux surfaces des corps.

37. La constitution et le mouvement intérieur des corps étant indifférent vis-à-vis du mouvement du fluide fondamental, supposons d'abord un cas limite très simple. Supposons que les corps ont une densité infinie, et par conséquent un volume spécifique nul. Dans le cas magnétique correspondant les corps auront donc une perméabilité magnétique nulle: c'est le cas idéal d'une diamagnétisme extrême.

Poursuivons l'analogie dans ce cas idéal. Dans les corps infiniment diamagnétiques il peut exister une intensité de champ finie. Mais la perméabilité magnétique étant nulle, une induction nulle correspondra à l'intensité de champ finie. De même, dans les corps infiniment lourds il peut exister une intensité de champ, c'est à dire une quantité de mouvement,

finie. Mais la vitesse qui y correspond est nulle. On peut donc donner à ces corps une distribution intérieure quelconque de l'intensité de champ. La condition de leur immobilité dans l'espace reste remplie, sans qu'il soit nécessaire de spécialiser la distribution de cette intensité de champ, ou bien d'introduire une vitesse d'énergie produite par des forces extérieures.

On peut donc se donner une distribution de l'intensité de champ qui correspond à une distribution quelconque des tourbillons dynamiques. Ou bien, on peut se donner dans les corps infiniment lourds une distribution quelconque de tourbillons dynamiques, et dans les corps infiniment diamagnétiques une distribution quelconque de courants électriques. Ces deux systèmes sont donc analogues entre eux dans le sens que nous avons développé. Au point de vue géométrique il y a une identité complète entre les champs des deux systèmes. Et à cette analogie géométrique directe s'ajoute l'analogie dynamique inverse. Il s'exerce dans le champ hydrodynamique entre les corps infiniment lourds des forces apparentes à distance, qui sont au signe près identiques aux forces qui agissent entre les corps infiniment diamagnétiques dans le champ électromagnétique. Ainsi les corps infiniment lourds dans le système hydrodynamique agissent les uns sur les autres à l'inverse des corps infiniment diamagnétiques qui sont le siège d'un système quelconque de courants électriques.

Dans des corps infiniment diamagnétiques qui sont percés d'un nombre suffisant de canaux d'une forme convenable, on peut distribuer des courants électriques de manière à obtenir dans l'espace extérieur un champ magnétostatique quelconque. En ce qui concerne ses actions extérieures ce corps peut donc représenter un aimant permanent quelconque, mais avec cette particularité que cet aimant serait construit en une matière infiniment diamagnétique. L'effet visible extérieur du diamagnétisme diminuera indéfiniment si l'espace occupé par les pores devient infiniment grand comparé à l'espace occupé par la matière du corps. Dans ce sens nos corps poreux infiniment lourds donnent l'image hydrodynamique des aimants permanents.

Ajoutons enfin qu'aux corps fluides infiniments lourds et immobiles nous pouvons, sans changer en rien l'effet extérieur, substituer des corps rigides immobiles. Nous retombons donc sur le résultat suivant:

Si dans un fluide homogène et incompressible il se trouve des corps poreux, immobiles dans l'espace, et si à travers les pores de ces corps le fluide exécute le mouvement de circulation irrotationnelle, ces corps poreux

agiront les uns sur les autres comme des aimants permanents dont l'action apparente à distance serait changée de signe.

La première idée d'une analogie de ce genre est due à Euler, qui n'a pas soupçonné pourtant la nature inverse de la force à distance.[1] L'énoncé précis et la démonstration rigoureuse sont dus à Lord Kelvin.[2]

38. Les développements de Lord Kelvin s'appuyaient sur l'analogie géométrique qu'avait énoncée v. Helmholtz dans son mémoire célèbre sur les mouvements tourbillonnaires. Montrons la connection de l'analogie que nous avons développée ici avec celle de v. Helmholtz.

Pour y arriver remarquons qu'au lieu de considérer des corps infiniment lourds, nous pouvons considérer des corps d'une densité quelconque. Mais pour assurer leur immobilité dans l'éspace il faut ou bien ajouter la vitesse d'énergie nécessaire, ou bien se donner une distribution de tourbillons tout à fait particulière. Dans le cas de l'électromagnétisme cela veut dire que si l'on donne aux corps des perméabilités magnétiques quelconques, il faut par des polarisations magnétiques intrinsèques particulières, ou par des distributions particulières de courants électriques, s'arranger pour que le champ extérieur reste le même que dans le cas de corps infiniment diamagnétiques. Ces magnétisations ou ces courants ont donc pour but de donner aux corps l'aspect extérieur de corps infiniment diamagnétiques.

Cela étant, supposons que le fluide qui constitue les corps ait la même densité que le fluide extérieur. Supposons la vitesse d'énergie nulle et supposons donnée une distribution de tourbillons dynamiques, assujettie à la condition de laisser les corps stationnaires dans l'espace. Nous retombons donc au cas des équations (12, c), et l'analogie se transfère immédiatement de l'intensité de champ et du tourbillon dynamique à la vitesse actuelle et au tourbillon cinématique. On peut donc, dans ce cas, comparer aussi la vitesse actuelle à l'intensité de champ magnétique, et le tourbillon cinématique au courant électrique: c'est la comparaison de v. Helmholtz.

Mais v. Helmholtz énonce son résultat sous une forme moins spécialisée. Car pour lui la distribution de tourbillons est quelconque, et il n'est pas

[1] Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne*, T. III, lettres CLXXVI—CLXXVIII.

[2] Sir W. Thomson, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Feb. 1870. *Papers on Electrostatics and Magnetism*, London 1872, p. 567—571. Philosophical Magazine, 4:th. Series, T. 45, p. 337—38. 1873.

nécessaire que les masses fluides, possédant le mouvement tourbillonnaire, forment des corps stationaires dans l'éspace. Ces corps peuvent avoir des mouvements quelconques. Mais on ne gagne cette généralisation de l'analogie géométrique qu'aux dépens de l'analogie dynamique qui disparaît totalement. Ce fait est mis en pleine évidence par les exemples qu'on calcule ordinairement dans les cours d'hydrodynamique. On trouve par exemple que deux filets de tourbillons de même intensité exécutent un mouvement de rotation l'un autour de l'autre, s'ils sont de même signe, et un mouvement de translation l'un auprès de l'autre s'ils sont de signes contraires. Mais on ne trouve pas la moindre trace d'une attraction ou une répulsion entre les filets comme entre des courants électriques parallèles. Du moment, au contraire, qu'on introduit la condition que les filets de tourbillons garderont leur situation dans l'espace, on trouvera une répulsion en cas de rotations de même sens, et une attraction en cas de rotations de sens contraire. Ce résultat peut être vérifié expérimentellement à l'aide de corps solides cylindriques auxquels on donne un mouvement de rotation dans l'eau.

Comme le prouve ce cas particulier, et comme le montrent les développements de Lord Kelvin, ainsi que les développements tout différents que nous venons de donner ici, c'est seulement dans le cas des tourbillons stationnaire dans l'espace que s'approfondit l'analogie de v. Helmholtz, en s'étendant aux forces apparentes à distance entre les tourbillons.

XI. *État de mouvements vibratoires. Analogie de C. A. Bjerknes.*

39. Considérons maintenant l'état de mouvement vibratoire. Dans un tel mouvement, le tourbillon dynamique, s'il existe, doit être aussi nécessairement vibratoire, et par conséquent fonction du temps. Mais nous avons démontré que la valeur de ce tourbillon est indépendante du temps (12). Pour éviter cette contradiction il faut donc nécessairement supposer que ce tourbillon est partout identiquement nul

$$\bar{l} = \bar{m} = \bar{n} = 0.$$

C'est par cette condition que se restreint le domaine de l'analogie physique dans le cas des mouvements vibratoires.

Dans ce cas les équations (20, A—D), qui démontrent l'analogi géométrique, se réduisent à

$$
\text{(A)} \qquad
\begin{aligned}
u &= k\bar{u} + u_e\,, \\
v &= k\bar{v} + v_e\,, \\
w &= k\bar{w} + w_e\,,
\end{aligned}
$$

$$
\text{(B)} \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\text{(C)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e
$$

jointes aux conditions que dans le fluide fondamental on a

$$
\text{(D)} \qquad
\begin{aligned}
u_e &= 0, \qquad & e &= 0, \\
v_e &= 0, \qquad & k &= k_0. \\
w_e &= 0,
\end{aligned}
$$

De même les équations (25, A), qui démontrent l'analogie dynamique inverse, se réduisent à

$$
\text{(E)} \qquad
\begin{aligned}
\bar{X}_e &= -e\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}, \\
\bar{Y}_e &= -e\bar{v} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial y}, \\
\bar{Z}_e &= -e\bar{w} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial z} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial z} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Ces équations sont satisfaites à chaque instant pendant le mouvement. Il faut en déduire ce que constatera un observateur, ayant des sens trop grossiers pour voir les petites oscillations, mais observant seulement ce qui en résulte en moyenne.

40. Soit $f(t)$ une fonction périodique du temps de période τ,

$$f(t+\tau)=f(t). \tag{a}$$

La fonction doit avoir des valeurs toujours finies, mais la période τ doit être une petite quantité du premier ordre. Je suppose de plus que cette fonction périodique ait pour une période une valeur moyenne linéaire nulle, et une valeur moyenne quadratique égale à 1,

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} f(t)dt = 0, \tag{b}$$

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} [f(t)]^2 dt = 1. \tag{c}$$

Évidemment ces conditions ne restreignent pas essentiellement la forme de la fonction $f(t)$. Citons comme un exemple d'une fonction qui jouit de ces propriétés

$$f(t)=\sqrt{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\alpha\right). \tag{d}$$

Des hypothèses faites il résulte que nous pouvons toujours écrire

$$\int_t^{t'} f(t)dt = \varepsilon \tag{e}$$

t' étant un temps quelconque et ε une petite quantité du premier ordre.

41. Remarquons maintenant que la vitesse d'expansion jointe à la vitesse d'énergie suffisent pour déterminer uniformément le champ de mouvement (18). Supposons donc ces quantités données comme des fonctions périodiques du temps par les équations

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} e &= e_m\ f(t),\\ u_e &= u_{e,m}f(t),\\ v_e &= v_{e,m}f(t),\\ w_e &= w_{e,m}f(t). \end{aligned}$$

Ici e_m, $u_{e,m}$, $v_{e,m}$, $w_{e,m}$ sont des quantités indépendantes du temps qui don-

nent des mesures convenables de l'intensité moyenne des mouvements vibratoires considérés. Car en vertu de (40, c) nous avons par exemple

$$e_m^2 = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} e^2 d\tau.$$

Remarquons en outre que les quantités e_m, $u_{e,m}$, $v_{e,m}$, $w_{e,m}$ ont les unes par rapport aux autres les mêmes signes qu'ont à une époque quelconque les quantités dépendantes du temps e, u_e, v_e, w_e. D'autre part, en vertu de la propriété (40, e), les déplacements qui résultent des vitesses u_e, v_e, w_e, ou les changements de volume qui résultent de la vitesse d'expansion e, seront toujours des petites quantités du premier ordre. Il en résulte comme un corollaire, qu'à une petite quantité du premier ordre près on peut considérer le volume spécifique k d'une particule quelconque du fluide comme constante.

Cela étant on voit de suite qu'à des petites quantités du premier ordre près on peut satisfaire aux équations (39, A—D) en écrivant

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} u &= u_m f(t), & \bar{u} &= \bar{u}_m f(t), \\ v &= v_m f(t), & \bar{v} &= \bar{v}_m f(t), \\ w &= w_m f(t), & \bar{w} &= \bar{w}_m f(t). \end{aligned}$$

Car la substitution de (a) et (b) en (39, A—C) donne

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} u_m &= k\bar{u}_m + u_{e,m}, \\ v_m &= k\bar{v}_m + v_{e,m}, \\ w_m &= k\bar{w}_m + w_{e,m}, \end{aligned}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} + \frac{\partial w_m}{\partial z} = e_m$$

relations auxquelles il faut joindre les conditions qui proviennent de la substitution en (39, D), savoir

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} &u_{e,m} = 0, \qquad && e_m = 0, \\ &v_{e,m} = 0, \qquad && k = k_0. \\ &w_{e,m} = 0, \end{aligned}$$

Si les quantités indépendantes du temps u_m, v_m, w_m, $\bar{u}_m$, $\bar{v}_m$, $\bar{w}_m$, $u_{e,m}$, $v_{e,m}$, $w_{e,m}$, e_m, k, satisfont aux équations (A—D), les formules (b) donnent la solution cherchée, qui est déterminée uniformément par les quantités données (a).

Dans ce champ de mouvement vibratoire s'exercent des forces $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, dont les valeurs momentanées sont données par les formules (39, E). Calculons les valeurs moyennes. Pour la composante X cette valeur sera

$$\bar{X}_{e,m} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} X d\tau.$$

En utilisant la propriété (40, c) de la fonction $f(t)$, nous trouvons donc sans difficulté

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} \bar{X}_m &= -e_m\bar{u}_m + \left(\bar{u}_m\frac{\partial u_{e,m}}{\partial x} + \bar{v}_m\frac{\partial v_{e,m}}{\partial x} + \bar{w}_m\frac{\partial w_{e,m}}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}_m^2 + \bar{v}_m^2 + \bar{w}_m^2)\frac{\partial k}{\partial x}, \\ \bar{Y}_m &= -e_m\bar{v}_m + \left(\bar{u}_m\frac{\partial u_{e,m}}{\partial y} + \bar{v}_m\frac{\partial v_{e,m}}{\partial y} + \bar{w}_m\frac{\partial w_{e,m}}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}_m^2 + \bar{v}_m^2 + \bar{w}_m^2)\frac{\partial k}{\partial y}, \\ \bar{Z}_m &= -e_m\bar{w}_m + \left(\bar{u}_m\frac{\partial u_{e,m}}{\partial z} + \bar{v}_m\frac{\partial v_{e,m}}{\partial z} + \bar{w}_m\frac{\partial w_{e,m}}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}_m^2 + \bar{v}_m^2 + \bar{w}_m^2)\frac{\partial k}{\partial z}. \end{aligned}$$

Comparons maintenant ces équations (A—E) aux équations primaires (39, A—E). On voit qu'elles ont exactement la même forme. Dans le cas des vibrations synchrones il n'est donc pas nécessaire d'écrire des formules différentes pour l'état de mouvement vrai, et pour l'état de mouvement moyen. On arrive aux équations qui décrivent l'état moyen simplement en changeant l'interprétation des symboles qui figurent dans les équations du mouvement vrai: on interprète les quantités u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, u_e, v_e, w_e, e non plus comme les valeurs actuelles, mais comme les moyennes quadratiques des quantités en question, et on considère en même temps k comme indépendant du temps.

42. Quand on a ainsi changé l'interprétation des symboles qui figurent dans les équations (39, A—E), il n'y figure plus que des paramètres indépendants du temps. Pour l'état de mouvement moyen l'analogie aux phénomènes électriques ou magnétiques subsiste donc indépendamment du temps. Dans cette interprétation des symboles, les équations (39, A—E) se distinguent des équations des champs électrostatiques ou magnétiques uniquement par le signe inverse des forces pondéromotrices (39, E). Pour un expérimentateur qui n'observe pas les petits mouvements, mais seulement les forces moyennes que subissent les corps, le système hydrodynamique semblerait donc être un système électrostatique ou magnétique, mais avec cette particularité singulière, que les masses de même nom s'attirent et les masses de nom contraire se repoussent.

Le courant électroïdique étant nul, $\bar{l} = \bar{m} = \bar{n} = 0$, on voit que les formules (28, b) de la force résultante vers un corps se réduisent à

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} X &= -k_0\int \bar{e}\bar{u}\,d\tau, \\ Y &= -k_0\int \bar{e}\bar{v}\,d\tau, \\ Z &= -k_0\int \bar{e}\bar{w}\,d\tau, \end{aligned}$$

formules dans lesquelles on interprète maintenant $\bar{e}$ comme étant la moyenne quadratique de la quantité $\bar{e}$ primitive. Les formules

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} X &= k_0\iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}\,d\tau d\tau_1, \\ Y &= k_0\iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}\,d\tau d\tau_1, \\ Z &= k\iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r}\,d\tau d\tau_1 \end{aligned}$$

donnent aux forces l'apparence extérieure de forces à distance entre les masses électroïdiques ou magnétoïdiques libres $\bar{e}d\tau$ et $\bar{e}_1 d\tau_1$. Ce sont, avec le signe changé, les formules qui permettent de calculer toutes les actions à distance de l'électrostatique ou du magnétisme, soit que les masses libres dépendent d'électrisations vraies, de polarisations électriques ou magnétiques intrinsèques, ou enfin du phénomène de l'influence.

Les formules (a) et (b) sont indépendantes de la forme des corps. Elles renferment donc comme des cas particuliers tous les résultats de C. A. Bjerknes relatifs aux actions apparentes à distance entre des corps sphériques qui effectuent des mouvements de vibrations dans un liquide parfait. Remarquons enfin que les expériences, à l'aide desquelles C. A. Bjerknes a vérifié dans une étendue si vaste ses résultats analytiques, réussissent aussi bien avec des corps d'autres formes que la forme sphérique. Les résultats généraux analytiques, que nous venons de développer, sont donc déjà vérifiés dans une étendue considérable par des expériences concrètes.

UNE MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE POUR L'ÉTUDE DE CERTAINES QUESTIONS DE LA THÉORIE DES COURBES PLANES[1]

PAR

HELGE VON KOCH

À STOCKHOLM.

Jusqu'à l'époque où WEIERSTRASS inventa une fonction continue ne possédant, pour aucune valeur de la variable, une dérivée déterminée,[2] c'était une opinion bien répandue dans le monde scientifique que toute courbe continue possède une tangente déterminée (du moins en exceptant certains points singuliers); et l'on sait que, de temps en temps, plusieurs géomètres éminents ont essayé de consolider cette opinion, fondée sans doute sur la représentation graphique des courbes, par des raisonnements logiques.[3]

Bien que l'exemple dû à WEIERSTRASS ait pour toujours corrigé cette erreur, cet exemple ne satisfait pas l'esprit au point de vue géométrique;

[1] Une partie du présent travail est la reproduction d'un article paru dans Arkiv för mathematik, astronomi och fysik (utg. af K. Sv. Vet.-Akademien, Stockholm), Bd. 1, p. 681.

[2] Voir Journ. f. Math., t. 79 (1875).

[3] Parmi ces tentatives nous citerons celles d'AMPÈRE (J. éc. pol. cah. 13) de BERTRAND (Traité de C. diff. et intégr.; t. 1) et de GILBERT (Brux. mém. 8°, t. 23 (1872)). — On trouve des notices historiques et bibliographiques dans l'ouvrage de M. E. PASCAL: Esercisi e note crit. di calcole infinitesimale p. 85—128. Milano 1895. — Voir aussi Encyklopädie der Math. Wiss. II. A. 2, p. 63 et l'ouvrage de M. DINI (traduction LÜROTH-SCHEPP): Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse, p. 88 suiv., p. 205—229.

car la fonction dont il s'agit est définie par une expression analytique qui cache la nature géométrique de la courbe correspondante de sorte qu'on ne voit pas, en se plaçant à ce point de vue, pourquoi la courbe n'a pas de tangente; on dirait plutôt que l'apparence est ici en *contradiction* avec la réalité du fait, établi par WEIERSTRASS d'une manière purement analytique.[1]

C'est pourquoi je me suis demandé — et je crois que cette question est d'importance surtout au point de vue de l'enseignement des principes fondamentaux de l'analyse et de la géométrie — si l'on pouvait trouver une courbe sans tangente où l'apparence géométrique fût *en accord* avec le fait dont il s'agit. La courbe que j'ai trouvée et qui fait l'objet principal de l'étude suivante est définie par une construction géométrique, suffisamment simple, je crois, pour que tout le monde puisse pressentir, déjà par «l'intuition naïve»,[2] l'impossibilité d'une tangente déterminée.

Cette construction n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une méthode qui peut servir dans l'étude de plusieurs questions concernant les courbes planes. On en trouvera des indications dans les deux derniers paragraphes.

Introduction.

Nous commençons par rappeler quelques notions dont nous aurons besoin dans la suite.

Un ensemble de points C dans un plan s'appelle un arc de *courbe* si on peut lui faire correspondre un segment rectiligne AB de telle manière qu'à tous les points de AB correspondent des points déterminés constituant l'ensemble C.

[1] Parmi les nombreux exemples analogues qui ont été publiés après celui de WEIERSTRASS, il n'y a aucun, à ma connaissance, auquel ne s'applique la même remarque. Un essai de C. WIENER (Journ. f. Math., t. 90, p. 221; Cf. WEIERSTRASS, *Functionenlehre*, p. 100) d'élucider géométriquement la courbe définie par la fonction de WEIERSTRASS ne suffit pas, semble-t-il, pour lever la difficulté dont il s'agit.

[2] J'emprunte cette expression à une conférence de M. Klein sur le caractère mathématique de l'intuition de l'espace (1893).

Considérons un tel ensemble et désignons par $K(X)$ le point de C qui correspond au point X du segment AB. Soit X' un point quelconque de AB, $K(X')$ le point correspondant de C; on dit que la courbe est *continue* au point $K(X)$ si le point $K(X')$ s'approche indéfiniment du point $K(X)$ quand X' tend vers X d'une manière quelconque; si cette condition est vérifiée pour tout point de l'arc considéré, on appelle celui-ci un arc de *courbe continue* ou un *arc continu.* [1]

Soit C un tel arc, $K(X)$ un point de C correspondant au point X de AB; s'il y a sur AB un point X' distinct de X (et distinct de B si X coïncide avec A, distinct de A si X coïncide avec B) tel que le point correspondant $K(X')$ coïncide avec $K(X)$, ce point s'appelle un point *multiple* de la courbe; dans le cas contraire, $K(X)$ s'appelle un point *simple.* Si tous les points de l'arc C sont simples, celui-ci s'appelle un arc continu *simple* ou encore, d'après la terminologie de M. Hilbert, une *courbe de M. Jordan.* Enfin, un tel arc s'appelle *fermé* ou *ouvert* selon que les points $K(A)$ et $K(B)$ coïncident ou non.

Considérons un tel arc ouvert C. Soient X_1, X_2 deux points du segment AB et désignons par x_1, x_2 leurs distances respectives du point A. On dit que le point $K(X_1)$ de C *précède* ou *succède* le point $K(X_2)$ selon que $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$. Si l'on prend sur AB trois points X_1, X_2, X_3 on dit que le point $K(X_2)$ de la courbe est *intermédiaire* aux points $K(X_1)$, $K(X_3)$ ou que ce point est situé *entre* les deux autres, si le point X_2 est situé entre les points X_1, X_3. Les points $K(A)$, $K(B)$ de la courbe qui correspondent aux extrémités du segment AB s'appellent les *extrémités* de l'arc considéré. Si l'on fait parcourir à X le segment AB dans le sens convenu comme positif, on dit que le point correspondant K parcourt l'arc de courbe C dans le sens positif.

Si l'on joint deux points K, K' de la courbe par une droite, celle-ci s'appelle une *sécante* de la courbe et la partie de cette sécante comprise entre K et K' s'appelle une *corde* de la courbe.

Fixons le point K et faisons tendre K' d'une manière quelconque vers K; si la sécante KK' tend alors vers une direction limite T bien déterminée,

[1] Analytiquement, la dernière condition revient à supposer les coordonnées cartésiennes u, v d'un point de la courbe exprimables en fonctions continues par rapport à un paramètre.

on dit que la courbe a en K une tangente et la droite T s'appelle *la tangente* de C au point K;[1] dans le cas contraire on dit que la courbe n'a pas au point K une tangente déterminée ou, d'une manière plus brève, que la courbe est *sans tangente* en K.

Supposons que la courbe considérée ait au point K une tangente déterminée T. Soient L et M deux points voisins sur la courbe tels que K se trouve *entre* L et M. Alors la sécante LM tend nécessairement vers T comme position limite quand L et M tendent vers K tout en restant sur la courbe à des côtés opposés par rapport à K.[2]

Rappelons enfin la définition de la *longueur* d'un arc de courbe KK'. Intercalons sur cet arc, entre K et K', un certain nombre de points K_1, $K_2, \ldots, K_n$ et considérons la ligne polygonale formée par les cordes KK_1, $K_1K_2, \ldots, K_nK'$. Faisons augmenter indéfiniment le nombre de ces points intermédiaires de telle manière que la longueur de chacune de ces cordes tende vers zéro. Si la longueur de la ligne polygonale ainsi définie tend vers une valeur finie et déterminée L, on dit que l'arc de courbe KK' est *rectifiable* et a pour *longueur* L.

Dans le cas contraire on dit que l'arc n'est pas rectifiable. On prouve dans ce cas que la longueur de la ligne polygonale tend vers l'infini, et l'on convient de dire que la longueur de l'arc est infinie.

I.

Définition de la courbe P et de la fonction $f(x)$. — Continuité. — Non-existence de la tangente.

1. Joignons par une droite deux points A et B d'un plan (fig. 1). Partageons le segment AB en trois parties égales AC, CE, EB, et con-

[1] Nous considérons la direction de K vers K' comme la direction positive de la sécante KK' si K' *succède* K sur la courbe, ce qui détermine la direction positive de la tangente T.

[2] Ce théorème simple, que nous n'avons pas rencontré ailleurs, est d'une grande utilité dans la suite. La démonstration est immédiate. En effet, si K est précédé par L et succédé par M, LK et KM coïncident, à la limite, avec la direction positive de T, donc l'angle formé par ces directions tend vers zéro; or, cet angle étant supérieur à l'angle KLM, ce dernier tend aussi vers zéro, ce qui prouve que LM coïncide, à la limite, avec la direction positive de T.

struisons sur CE comme base un triangle équilatéral CDE. Nous aurons une ligne brisée $ACDEB$ formée par 4 segments égaux. Pour fixer le côté vers lequel doit être tourné le triangle, nous conviendrons de regarder une direction (par exemple celle de A vers B) comme positive et de considérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abréger, nous désignons par Ω cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne AB à la ligne polygonale $ACDEB$ déviant de AB vers le côté positif.

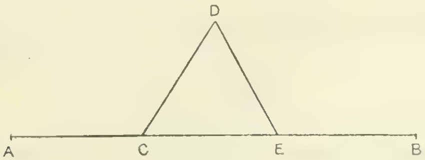


Fig. 1.

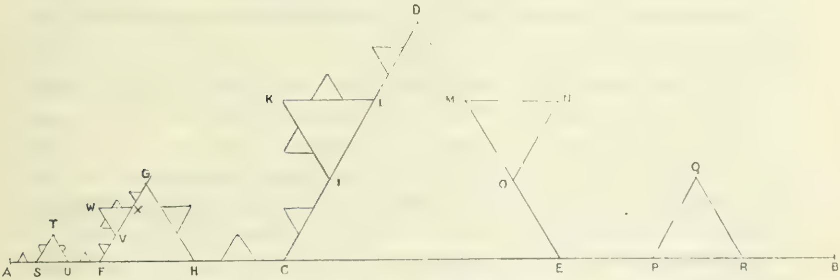


Fig. 2.

2. Partons maintenant d'une ligne droite déterminée AB, le sens de A vers B étant considéré comme positif (fig. 2). Par l'opération Ω, AB est remplacée par la ligne brisée $ACDEB$, les segments AC, CD, DE, EB étant égaux entre eux et leur sens positif étant respectivement celui de A vers C, de C vers D, de D vers E, de E vers B.

Effectuons l'opération Ω sur chacun de ces segments; la ligne $ACDEB$ sera remplacée par la ligne brisée $AFGHCIKLDMNOEPQRB$ composée de 16 segments égaux AF, FG etc.

Sur chacun de ces derniers segments nous effectuons encore l'opération Ω; nous aurons une ligne brisée $ASTUF\ldots$ composée par $4^3 = 64$ segments égaux entre eux AS, ST etc.

Effectuant l'opération Ω sur chacun de ces nouveaux segments et continuant ainsi indéfiniment, nous obtenons une suite indéfinie de lignes polygonales que nous désignerons par

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots \tag{1}$$

et qui se composent respectivement de

$$1, 4, 4^2, \ldots, 4^{n-1}, \ldots$$

côtés. P_1 désigne la droite primitive AB, P_2 la ligne $ACDEB$ et ainsi de suite.

Nous allons voir que, quand n croît indéfiniment, P_n tend vers une courbe continue P qui ne possède, en aucun point, de tangente déterminée.

3. Nous nommerons *sommets* de P_1 les deux points A et B, *sommets* de P_2 les $4 + 1$ points A, C, D, E, B, *sommets* de P_3 les $4^2 + 1$ points $A, F, G, \ldots, B$ et ainsi de suite. On voit que P_n aura $4^{n-1} + 1$ sommets, que tous les $4^{n-2} + 1$ sommets de P_{n-1} sont aussi des sommets de P_n et que, par suite, le nombre de sommets nouveaux introduits par le passage de P_{n-1} à P_n est égal à $3 \cdot 4^{n-2}$.

Désignons par S l'ensemble des sommets de toutes les lignes (1). De la construction résulte que si l'on considère un côté quelconque KL d'une ligne quelconque P_α il y aura, dans chaque voisinage de K, une infinité de points S situés sur KL; désignant par IK le côté de P_α qui précède KL il y a par la même raison, dans chaque voisinage de K, une infinité de points S situés sur IK. Les côtés IK et KL formant entre eux un angle IKL égal, selon les cas, à $60°$ ou à $120°$, on peut donc affirmer que la droite joignant deux sommets quelconque K et K' ne peut pas tendre vers une position limite déterminée quand le point K' (tout en restant sommet) tend vers K d'une manière quelconque. (Si $K = A$ ou $K = B$ il faut modifier légèrement le raisonnement qui précède).

Désignons par S' l'ensemble des points limites[1] des points S.

Chaque point de la courbe que nous allons définir sera ou un sommet ou un point limite des sommets; autrement dit, notre courbe sera composée par un ensemble de points P compris tout entier dans l'ensemble S'.[2]

4. Pour définir P, nous allons faire correspondre à chaque point X du segment AB un point déterminé $K(X)$ de P et nous introduirons en même temps une fonction continue $f(x)$ qui joue un rôle fondamental pour l'étude de la courbe.

Désignons par x la distance de A au point X. Si ce point appartient à S' nous prendrons

$$K(X) = X$$

et

$$f(x) = 0.$$

Dans le cas contraire nous menons de X une perpendiculaire XX_1 à AX (dirigée vers le côté positif de AB)

En prolongeant suffisamment cette perpendiculaire, on rencontre nécessairement le contour d'une ou de plusieurs des lignes P_ν. Soit P_α la première ligne rencontrée et X_1 le point de rencontre.

Si X_1 est un point de S' nous prenons

$$K(X) = X_1$$

et nous désignons par $f(x)$ la longueur XX_1.

Dans le cas contraire, X_1 appartient à un des segments rectilignes qui composent P_α, terminé par deux sommets consécutifs — soit S_1 et S_2 — de P_α. Menons alors de X_1 une perpendiculaire X_1X_2 à S_1S_2 (dirigée vers le côté positif de S_1S_2). Soit P_β la première des lignes (1) qu'on rencontre — soit en X_2 — en prolongeant suffisamment la perpendiculaire dont il s'agit.

[1] D'après la terminologie de M. G. Cantor, S' est la première dérivée de S. D'après ce qui a été dit plus haut il résulte que tout point de S appartient à S'. Dire qu'un point K appartient à S' revient donc à dire que c'est ou un sommet ou un point limite des sommets.

[2] Réciproquement tout point de S' appartient à P, c'est-à-dire on a $P = S'$, ce qui résulte facilement des résultats que nous allons établir.

Si X_2 est un point de S' nous ferons

$$K(X) = X_2$$

et nous désignerons par $f(x)$ la somme des longueurs XX_1 et X_1X_2.

Si X_2 n'est pas un point de S' nous désignons par T_1, T_2 les extrémités du segment de P_β sur lequel se trouve X_2; ces extrémités seront certains sommets consécutifs de P_β. Nous élevons de X_2 une perpendiculaire X_2X_3 sur T_1T_2 vers le côté positif et désignons par X_3 le premier point de rencontre avec une des lignes P_n.

Continuant ainsi de proche en proche deux cas pourront se présenter. Ou bien on rencontrera, après avoir élevé un certain nombre de perpendiculaires:

$$XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ \ldots,\ X_{k-1}X_k$$

dont on désignera respectivement par $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ les longueurs, un point X_k appartenant à S', et alors on prendra $K(X) = X_k$ et désignera par $f(x)$ la somme de ces perpendiculaires; ou bien on ne rencontrera jamais un point de S'. Dans le dernier cas, on aura une suite indéfinie de perpendiculaires

$$XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ X_2X_3\,,\ \ldots \tag{2}$$

dont on désignera les longueurs respectives par $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... et dont la somme sera, ainsi que nous démontrerons, égale à un nombre fini.

En effet, prenant la distance AB comme unité de longueur, le segment CE est égal à $\frac{1}{3}$ et la perpendiculaire abaissée du point D (fig. 2) sur CE est égal à $\frac{1}{6}\sqrt{3}$. CDE étant le plus grand triangle de la figure, on a évidemment

$$f_1(x) = XX_1 < \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

pour toute valeur de x de l'intervalle considéré

$$0 \leq x \leq 1. \tag{3}$$

Les triangles FGH, IKL etc. construits sur les côtés de $P_2 = ACDEB$

ayant leurs côtés égaux à $\frac{1}{9}$, ceux construits sur les côtés de P_3 ayant leurs côtés égaux à $\frac{1}{27}$ et ainsi de suite on obtient de même

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= X_1X_2 \leqq \frac{1}{2}\,\frac{1}{9}\sqrt{3}, \\
f_3(x) &= X_2X_3 \leqq \frac{1}{2}\,\frac{1}{27}\sqrt{3}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_k(x) &= X_{k-1}X_k < \frac{1}{2}\,\frac{1}{3^k}\sqrt{3}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

pour tout l'intervalle (3).

La somme des longueurs (2) ne peut donc pas être supérieure au nombre

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots\right)=\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

et est, par suite, convergente. La somme de cette série dont l'existence est ainsi démontrée sera désignée par $f(x)$; en suivant indéfiniment la ligne brisée $XX_1X_2X_3\dots$ on approchera donc indéfiniment d'un point déterminé qui, nous le convenons, sera le point $K(X)$ correspondant à X et dont la distance de X, mesurée le long de la ligne brisée $XX_1X_2X_3\dots$, sera égale à $f(x)$. On voit immédiatement que $K(X)$ fait partie de l'ensemble S.

Si nous convenons, dans le cas où la suite des perpendiculaires (2) ne contient que k termes, de mettre

$$f_{k+1}(x)=0, \qquad f_{k+2}(x)=0\ , \quad \dots$$

nous avons donc une fonction $f(x)$ définie, pour toute valeur de x de l'intervalle $0-1$, par la formule

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\dots.$$

Tous les points $K(X)$ ainsi obtenus constituent, par définition, notre ensemble P. A chaque point X sur AB correspond un point bien déterminé $K(X)$ de P dont la position est définie moyennant la fonction $f(x)$.

Il nous faut commencer par prouver que cet ensemble constitue une *courbe continue*, dans le sens ordinaire de ce mot.

5. De deux points K_1 et K_2 de P correspondant à des valeurs x_1 et x_2 de x, nous voyons que K_1 *précède* K_2 si $x_1 < x_2$ que K_1 *succède* K_2 dans le cas contraire.[1] De trois points K_1, K_2, K_3 correspondants aux valeurs x_1, x_2, x_3 où

$$x_1 < x_2 < x_3$$

K_2 est *intermédiaire* aux points K_1, K_3.

Ainsi, par exemple, entre les deux points A et B de notre P nous avons trois points intermédiaires C, D, E appartenant à la ligne P_2, 15 points intermédiaires F, G, H etc. appartenant à P_3 et ainsi de suite.

De même entre deux sommets consécutifs S_1 et S_2 de la ligne P_α, qui sont, par définition, des points de P, il y a trois points intermédiaires (appartenant à $P_{\alpha+1}$), 15 points intermédiaires (appartenant à $P_{\alpha+2}$) et ainsi de suite.

Nous avons défini un point quelconque K de P en menant successivement certaines perpendiculaires

$$XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ \ldots \tag{2}$$

rencontrant respectivement P_α en X_1, P_β en X_2, et ainsi de suite, X_1 étant situé entre deux sommets S_1, S_2 de P_α et de même X_2 entre deux sommets T_1, T_2 de P_β etc. Le point K est donc, d'après notre définition, un point intermédiaire à S_1 et S_2, intermédiaire à T_1 et T_2 et ainsi de suite. Dans le cas où la suite (2) se prolonge indéfiniment nous aurons donc une suite infinie de segments

$$S_1S_2\,,\ T_1T_2\,,\ \ldots$$

décroissant indéfiniment et embrassant tous le point K qui se trouve ainsi intercalé entre des points dont la distance diminue indéfiniment.

6. Il nous faut prouver que la fonction $f(x)$ qui est une fonction bien déterminée de x dans l'intervalle

$$0 \leq x \leq 1 \tag{3}$$

est aussi *continue* dans cet intervalle. Pour cela nous montrerons d'abord que chacune des fonctions

$$f_1(x)\,,\ f_2(x)\,,\ \ldots$$

[1] Cf. les définitions adoptées au début.

est continue dans l'intervalle dont il s'agit et ensuite que la somme de ces fonctions y converge uniformément.

Par définition, $f_1(x)$ est la distance d'un point d'une certaine ligne continue C_1 (composée par une infinité de segments rectilignes) à la droite AB et cette fonction est donc nécessairement continue. Aux points extrêmes A, B cette fonction s'annule.

$f_2(x)$ est la distance d'un point d'une certaine ligne continue C_2 (semblable à C_1) à un certain côté S_1S_2 de la ligne polygonale P_α; en considérant $f_2(x)$ comme fonction de l'arc mesuré le long de S_1S_2 on voit que c'est une fonction continue de cet arc et, par conséquent, de la variable x dans l'intervalle correspondant. Or, $f_2(x)$ étant égal à zéro pour les valeurs de x correspondant aux extrémités S_1, S_2 et la même circonstance se présentant pour les côtés voisins de P_α, on voit que $f_2(x)$ est continue dans tout l'intervalle (3).

La même démonstration s'applique aux autres fonctions $f_3(x), f_4(x), \ldots$.

Toutes les fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *sont donc continues dans l'intervalle* (3).

Maintenant, comme ces fonctions satisfont aux inégalités (4) dans cet intervalle, on voit que leur somme $\Sigma f_\nu(x)$ y converge uniformément. Donc, d'après un théorème classique, *la fonction* $f(x)$ *représentée par cette série est une fonction continue dans cet intervalle.*

7. Désignons maintenant par $K(x)$ le point de P correspondant à la valeur x de l'intervalle $0 \ldots 1$. Pour voir que P est un arc de courbe continue au point K, il nous faut montrer que

$$\lim K(x') = K(x)$$

pour

$$\lim x' = x$$

c'est-à-dire que la distance entre les points $K(x')$ et $K(x)$ diminue indéfiniment avec $|x' - x|$.

Prenons d'abord le cas où $K(x)$ est un point appartenant à une des lignes P_ν ou, ce qui revient au même, que ce point soit défini par un nombre fini de perpendiculaires

$$XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ \ldots\,,\ X_{k-1}X_k$$

rencontrant respectivement les lignes polygonales

$$P_{a_1}, P_{a_2}, \ldots, P_{a_k}$$

aux points $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des côtés respectifs

$$S_1S'_1, S_2S'_2, \ldots, S_kS'_k, \tag{5}$$

le point X_i étant sur P_{a_i} entre les sommets S_i et S'_i. Soient

$$X'X'_1, X'_1X'_2, \ldots$$

la suite (finie ou infinie) de perpendiculaires définissant le point $K(x')$, x' étant une valeur voisine de x. Il résulte de la construction adoptée que si l'on choisit $|x' - x|$ suffisamment petit on peut faire en sorte que les points

$$X'_1, X'_2, \ldots, X'_k$$

appartiennent respectivement aux côtés (5) et que la distance entre X'_k et X_k soit inférieure à une quantité δ donnée d'avance.

Or, on passe du point X'_k au point $K(x')$ par une suite de perpendiculaires

$$X'_kX'_{k+1}, X'_{k+1}X'_{k+2}, \ldots$$

de longueurs respectives

$$f_{k+1}(x'), f_{k+2}(x'), \ldots.$$

Comme

$$f_{k+1}(x) = 0, \qquad f_{k+2}(x) = 0, \quad \ldots$$

on a, à cause de la continuité de la somme $\Sigma f_\nu(x)$,

$$\lim_{x'=x} \left(f_{k+1}(x') + f_{k+2}(x') + \ldots\right) = 0.$$

La distance absolue entre les points X'_k et $K(x')$ ne pouvant être supérieure à la longueur de la ligne brisée

$$X'_kX'_{k+1}X'_{k+2}\ldots$$

c'est-à-dire à

$$f_{k+1}(x') + f_{k+2}(x') + \ldots$$

on voit donc que cette distance tend vers zéro avec $|x'-x|$. Comme il en est de même de la distance entre X'_k et $X_k = K(x)$, il est donc prouvé que la distance entre $K(x)$ et $K(x')$ diminue indéfiniment avec $|x'-x|$.

Considérons en second lieu le cas où le point donné $K(x)$ est défini par un nombre illimité de perpendiculaires

$$XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ \ldots$$

rencontrant respectivement les lignes

$$P_{\alpha_1}\,,\ P_{\alpha_2}\,,\ \ldots$$

aux points

$$X_1\,,\ X_2\,,\ \ldots$$

des côtés

$$S_1S'_1\,,\ S_2S'_2\,,\ \ldots$$

et conservons d'ailleurs les notations du cas précédent.

Soit ε une quantité donnée; choisissons k suffisamment grand pour que la somme

$$f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + \ldots$$

soit moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, pour tout l'intervalle (3). On voit alors que la distance des points X_k et $K(x)$ et de même que la distance entre X'_k et $K(x')$ est moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$. Choisissons enfin $|x'-x|$ suffisamment petit pour que la distance entre X_k et X'_k soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$, ce qui est toujours possible d'après ce qui précède. Il est alors évident que la distance entre $K(x)$ et $K(x')$ est moindre que ε ou, en d'autres termes, que cette distance peut être rendue aussi petite qu'on le veut en faisant $|x'-x|$ suffisamment petit.

Donc l'ensemble P constitue un arc de courbe continue en chaque point.

Dans ce qui va suivre, nous conservons la lettre P pour désigner la courbe ainsi définie.

8. En joignant les points A, D et D, B (fig. 2) par des droites, on obtient un triangle ADB *circonscrit* à la courbe P, en entendant par

là que tout point de P se trouve à l'intérieur ou sur le contour de ce triangle. En effet la construction adoptée montre d'abord que chaque *sommet* se trouve à l'intérieur ou sur le contour de ce triangle (ainsi, par exemple T, W, G, K se trouvent sur la droite AD) et il en est donc de même de l'ensemble S' des points limites des sommets.

Par la même raison, le triangle AGC est circonscrit à la partie de la courbe P comprise entre A et C (fig. 2), le triangle CKD est circonscrit à la partie comprise entre C et D et ainsi de suite.

Par conséquent la partie de P comprise entre C et E se trouve à l'intérieur ou sur la limite du pentagone $CKDNE$ (où l'on remarque que les côtés CK et EN sont perpendiculaires à AB).

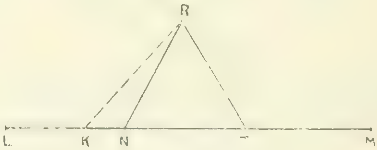


Fig. 3.

De la même manière on voit que, si LM (fig. 3) est un côté quelconque d'une ligne brisée P_a, tout point de P intermédiaire à L et M se trouve à l'intérieur ou sur le contour d'un triangle LRM où chacun des angles L et M est égal à 30°; et les points N et T divisant LM en trois segments égaux, la partie de P compris entre N et T se trouve nécessairement compris dans un pentagone construit sur NT comme base et semblable à celui dont il était question tout à l'heure.

Pour abréger nous appellerons CE *segment lacunaire* de AB (fig. 2), FH segment lacunaire de AC etc.; d'une manière générale, LM (fig. 3) étant un côté de P_a, le segment NT sera désigné comme *segment lacunaire* de ce côté. Adoptant cette terminologie, on voit que sur AB (fig. 2) il y a 1 segment lacunaire CE de longueur $\frac{1}{3}$ (AB étant supposé $= 1$), 2 segments FH et PR de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, 4 segments lacunaires de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ et ainsi de suite. La somme de tous ces segments est donc égale à

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2^{\nu-1}}{3^\nu}+\ldots \quad 1$$

c'est-à-dire égale à la longueur de AB.

Par la méthode adoptée pour définir la courbe P, on a été amené à construire sur chaque segment lacunaire comme base un triangle équilatéral; et l'opération Ω définie au n° 1 consiste précisément à remplacer un segment lacunaire (par exemple FH) par une ligne brisée (FGH) composée par les deux autres côtés du triangle en question.

Convenant de désigner par A l'opération qui consiste à effectuer l'opération Ω sur tous les segments lacunaires de AB simultanément, on voit que, par cette opération, la droite AB se trouve remplacée par une certaine courbe continue C_1 composée par des segments rectilignes formant entre eux des angles égaux à 60°. C'est la courbe dont il a été question au n° 6; son équation en coordonnées rectangulaires (A étant l'origine et AB l'axe des x) peut s'écrire

$$y=f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant la fonction définie au n° 4.

Au lieu de définir la courbe P à l'aide d'une suite d'opérations Ω, nous pouvons maintenant l'obtenir par une succession d'opérations A. Après avoir remplacé, à l'aide de l'opération A, la droite primitive AB par la ligne C_1, on peut effectuer sur chacun des segments rectilignes qui composent C_1 la même opération et ainsi indéfiniment. On obtient ainsi une succession illimitée de courbes

$$AB\,,\ C_1\,,\ \ldots$$

et des considérations bien simples montrent qu'on arrive ainsi à une courbe limite identique à P.

En adoptant cette méthode de définir P, on peut démontrer simplement que tout point de P est un point *simple* de la courbe ou, en d'autres termes, qu'à des points distincts X, X' de AB correspondent des points distincts $K(X)$, $K(X')$ de la courbe. Soient en effet

$$\text{(K)} \qquad XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ \ldots$$

et

$$\text{(K')} \qquad X'X'_1\,,\ X'_1X'_2\,,\ \ldots$$

les suites de perpendiculaires définissant respectivement $K(X)$ et $K(X')$ et admettons que les points limites $K(X)$ et $K(X')$ coïncident; nous en conclurons que X et X' doivent coïncider aussi.

Considérons d'abord le cas où les deux suites (K) et (K') sont illimitées.

Le point X de AB doit se trouver sur un des segments lacunaires de AB (les extrémités du segment étant exclues); car dans le cas contraire X serait un sommet ou un point limite des sommets et l'on aurait, par suite, $K(X) = X$ contrairement à l'hypothèse. Par la même raison X' doit se trouver sur un segment lacunaire. Il est clair dès lors que X et X' doivent se trouver sur le même segment lacunaire; car dans le cas contraire on pourrait affirmer, d'après ce qui précède, que $K(X)$ et $K(X')$ se trouveraient respectivement compris dans deux pentagones n'ayant aucun point en commun, ce qui serait contraire à l'hypothèse $K(X) = K(X')$.

Par définition, X_1 désigne le point où la perpendiculaire XX_1 rencontre la ligne C_1; X_1 est donc un point d'un certain segment rectiligne de C_1 et le même raisonnement que plus haut montre que X_1 doit appartenir à un segment lacunaire; de même X'_1 doit appartenir à un segment lacunaire et on conclut comme plus haut que X_1 et X'_1 appartiennent nécessairement au même segment lacunaire. Continuant ainsi de proche en proche on démontre que quelque grand que soit k, les points X_k et X'_k se trouvent sur le même segment lacunaire. Or le segment qui comprend X_1 et X'_1 fait, d'après la construction adoptée, un angle égal à 60° ou 120° avec le segment comprenant X et X'. Désignant par XX' la distance entre les points X et X' on a donc la relation

$$X_1X'_1 = 2XX';$$

le même raisonnement s'appliquant aux points X_k, X'_k on a la relation générale

$$X_kX'_k = 2X_{k-1}X'_{k-1} \qquad (k=2, 3, \ldots)$$

d'où

$$X_kX'_k = 2^kXX'$$

ce qui, X_k et X'_k tendant par hypothèse vers un même point $K(X) = K(X')$, exige nécessairement

$$XX' = 0$$

c'est-à-dire que les points X, X' coïncident.

Il nous reste à considérer le cas où l'une au moins des deux suites (K), (K') consiste d'un nombre fini de termes. Supposons par exemple que la suite (K) consiste de k termes

$$XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ \ldots,\ X_{k-1}X_k$$

et que la suite (K') contienne un nombre de termes (fini ou infini) $\geq k$.

Par les mêmes raisons que dans le cas précédent on voit alors que X et X' se trouvent sur un même segment lacunaire, que X_1 et X_1' se trouvent sur un même segment lacunaire, ..., que X_{k-1} et X_{k-1}' se trouvent sur un même segment lacunaire. Supposons que X et X' soient des points distincts; il en est alors de même de X_{k-1} et X_{k-1}' (car on a $X_{k-1}X_{k-1}' = 2^{k-1}XX'$) et, par conséquent, de X_k et X_k'; or $X_k = K(X)$ étant par hypothèse un point de l'ensemble S' (c'est-à-dire un sommet ou un point limite des sommets), X_k' ne peut pas être un point de S' (car alors on aurait $X_k' = K(X')$ contrairement à l'hypothèse $K(X') = K(X)$). Par conséquent X_k' doit appartenir à un segment lacunaire. Soit NT (fig. 3) le segment lacunaire comprenant X_{k-1} et X_{k-1}'; alors X_k est un point de S' se trouvant sur l'un ou sur l'autre des deux côtés NR et TR et X_k' appartient à un segment lacunaire — disons N_1T_1 — appartenant à l'un de ces côtés. Les points de la courbe P intermédiaires à N_1 et T_1 se trouvent, d'après ce qui précède, compris dans un certain pentagone dont le contour n'a d'autres points en commun avec les côtés NR et TR que les points du segment N_1T_1; X_k est donc séparé de ce contour et ne peut pas coïncider avec le point $K(X')$ (défini par la suite (K')) qui est un point de la courbe P intermédiaire à N_1 et T_1. Le théorème est donc démontré.

Donc P est un arc continu simple.

9. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème qui fait l'objet principal de notre étude.

Théorème. *La courbe P n'admet en aucun point une tangente déterminée.*

Considérons d'abord un point K de la courbe qui est en même temps un sommet d'une ligne polygonale P_a.

Dans chaque voisinage de K il y a une infinité de sommets K' et, d'après ce qui a été dit plus haut (pag. 150), nous savons que la droite joignant K à un point K' ne peut tendre vers une limite déterminée lorsque K' s'approche de K d'une manière quelconque. Or, les points K et K' étant des points de la courbe, la droite KK' est une secante de P qui tendrait vers une position déterminée si la tangente en K existait. Donc la courbe ne peut pas avoir en K une tangente déterminée.

Considérons, en second lieu, le cas où le point K est situé sur une ligne polygonale P_α mais *n'est pas* un sommet. K est alors nécessairement un point limite des sommets et reste, par conséquent, commun à toutes les lignes

$$P_\alpha\,,\; P_{\alpha+1}\,,\; \ldots .$$

On peut donc supposer l'indice α choisi aussi grand que l'on veut. Cela remarqué, soit LM le côté de P_α sur lequel se trouve K (fig. 3) et $LNRTM$ la ligne brisée obtenue en effectuant l'opération Ω sur LM. Les sommets N, R, T sont donc des points de la courbe P et l'on a

$$LN = NR = RT = TM.$$

Mais de là résulte que l'angle RKN est compris entre 30° et 60°.

Or, K est situé sur la courbe P *entre* les points L et N (ou *entre* les points T et M); donc,[1] si la courbe avait en K une tangente déterminée, la sécante KR tendrait (pour $\alpha = \infty$) vers la même limite que LN (ou TM) ce qui est impossible, l'angle formé par ces droites appartenant à l'intervalle 30° ... 60°.

Considérons, comme dernier cas, un point K de P qui n'est situé sur aucune des lignes P_α. Dans ce cas, K est défini par une suite illimitée de perpendiculaires

$$XX_1\,,\; X_1X_2\,,\; X_2X_3\,,\; \ldots$$

rencontrant respectivement les lignes polygonales

$$P_\alpha\,,\; P_\beta\,,\; P_\gamma$$

aux points X_1, X_2, X_3, ... des côtés

$$S_1S_2\,,\; T_1T_2\,,\; U_1U_2\,,\; \ldots \tag{6}$$

[1] Voir l'introduction.

D'après ce qui précède K est un point de la courbe P situé *entre* les points S_1 et S_2, *entre* les points T_1 et T_2, *entre* les points U_1 et U_2 et ainsi de suite. La suite des points

$$S_1\,,\ T_1\,,\ U_1\,,\ \ldots$$

s'approchent de K indéfiniment du même côté, c'est-à-dire ces points *précèdent* tous le point K; et c'est du côté opposé que s'approchent les points

$$S_2\,,\ T_2\,,\ U_2\,,\ \ldots.$$

Donc, si la courbe avait en K une tangente déterminée, les sécantes (6) auraient cette tangente comme limite commune. Or, cela est impossible, l'angle formé par deux sécantes consécutives étant, selon les cas, égal à 60° ou 120°.

Le théorème est donc démontré pour tout point de la courbe.

II.

Questions de rectification et de quadrature. — Représentation paramétrique.

10. Désignons par L_i la longueur de la ligne polygonale P_i. Le segment AB (fig. 2) étant pris pour unité de longueur on a $L_1 = AB = 1$. Par l'opération Ω, P_1 se change en P_2, cette dernière ligne ayant visiblement la longueur $\frac{4}{3}$. En passant de P_2 et P_3 la longueur se trouve encore une fois multipliée par $\frac{4}{3}$ et ainsi de suite. On a donc, d'une manière générale

$$L_\nu = \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu - 1}$$

d'où

$$\lim_{\nu \to \infty} L_\nu = \infty\,.$$

Il en résulte que la longueur de l'arc de courbe P compris entre A et B est infinie. De la même manière on peut démontrer le même de l'arc compris entre deux sommets quelconques, d'où se déduit sans diffi-

culté que *la longueur de l'arc compris entre deux points quelconques de la courbe est infinie.*

Il est aussi facile d'évaluer l'aire comprise entre la courbe et l'une de ses cordes. Prenons par exemple la corde AB. L'aire comprise entre $AB = P_1$ et P_2 est égale à l'aire d'un triangle équilateral de base $= \frac{1}{3}$, c'est-à-dire égale à

$$\frac{1}{36}\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3}\cdot\frac{4}{9};$$

l'aire comprise entre P_2 et P_3 est égal à la somme de 4 triangles (voir fig. 2) équilatéraux de base égale à $\frac{1}{9}$; cette aire est donc égale à

$$4\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2.$$

Pour avoir l'aire Δ_ν comprise entre P_ν et $P_{\nu+1}$ rappelons que P_ν est une ligne polygonale de $4^{\nu-1}$ côtés dont chacun est égale à $\frac{1}{3^{\nu-1}}$; pour passer de P_ν à $P_{\nu+1}$ on construit sur chaque côté un petit triangle équilatéral de base $\frac{1}{3^\nu}$. On a donc

$$\Delta_\nu = 4^{\nu-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^{2\nu}}\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^\nu.$$

L'aire cherchée Δ étant égale à la somme des aires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ on trouve donc

$$\Delta = \sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta_\nu = \frac{1}{16}\sqrt{3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^\nu$$

c'est-à-dire

$$\Delta = \frac{1}{20}\sqrt{3}.$$

11. Indiquons maintenant comment peuvent s'exprimer les coordonnées cartésiennes u, v d'un point de la courbe P en fonctions uniformes par rapport à un paramètre.

Comme axe des u nous prenons la droite AB (fig. 2), comme axe des v une droite passant par A et perpendiculaire à AB (comptée positivement

du bas en haut). Soient x la distance d'un point quelconque X de AB à l'origine A, $K(x)$ le point correspondant de la courbe (défini, comme il a été expliqué précédemment, par une certaine suite de perpendiculaires XX_1, X_1X_2, ...), $u = u(x)$ et $v = v(x)$ les coordonnées rectangulaires de ce point K.

Nous avons posé plus haut

$$XX_1 = f_1(x), \qquad X_1X_2 = f_2(x) \ , \quad . \ . \ .$$

et

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots .$$

La droite XX_1 étant perpendiculaire à l'axe des u, sa projection sur cet axe est nulle. Quant à X_1X_2, cette droite forme avec l'axe des u un angle qui, selon les cas, est égal à 30° ou 150°. Désignons par $\{f_2(x)\}$ la projection de X_1X_2 sur l'axe des u. Désignons, d'une manière analogue par

$$\{f_3(x)\} \, , \{f_4(x)\} \, , \ldots$$

les projections de X_2X_3, X_3X_4, ... sur l'axe des u.

Enfin, désignons par

$$\{\{f_1(x)\}\} \, , \{\{f_2(x)\}\} \, , \{\{f_3(x)\}\} \, , \ldots$$

les projections de XX_1, X_1X_2, X_2X_3, ... sur l'axe des v. (On a évidemment $\{\{f_1(x)\}\} = f_1(x)$).

Il résulte de ces définitions que $\{f_i(x)\}$ et $\{\{f_i(x)\}\}$ sont des fonctions continues de x dans l'intervalle $0 \ldots 1$ et que les modules de ces fonctions sont au plus égaux à $f_i(x)$. Comme $u(x) - x$ et $v(x)$ sont respectivement les projections sur l'axe des u et l'axe des v de la ligne brisée

$$XX_1X_2X_3 \ldots$$

(les extrémités de cette ligne étant les points X et K), nous pouvons donc écrire

$$u = x + \{f_2(x)\} + \{f_2(x)\} + \ldots ,$$

$$v = f_1(x) + \{\{f_2(x)\}\} + \{\{f_3(x)\}\} + \ldots . \tag{7}$$

Comme la série $\Sigma f_\nu(x)$ converge uniformément dans tout l'intervalle $0 \ldots 1$, il en est de même, et à plus forte raison, des séries nouvelles

ainsi définies qui représentent les coordonnées u, v d'un point de notre courbe. Ces séries représentent donc des fonctions *continues* dans l'intervalle dont il s'agit.

Par les formules (7) nous avons donc les coordonnées u, v exprimées en fonctions uniformes et continues d'un paramètre x tout le long de la courbe.

Nous verrons, dans le paragraphe suivant, comment une simple transformation permet de passer de la courbe P à une courbe P' où l'on peut choisir l'abscisse u elle-même comme paramètre et exprimer l'ordonnée v en fonction uniforme et continue par rapport à u tout le long de la courbe.

III.

Transformation de P en une courbe P' où l'ordonnée est une fonction uniforme de l'abscisse.

12. Considérons dans le plan des coordonnées (x, y) un segment rectiligne AB formant un angle quelconque avec l'axe des x (fig. 5). Partageons AB en trois parties égales AC, CE, EB et construisons sur CE comme base un triangle CDE dont la *médiane* MD (M étant le point divisant la base CE en deux parties égales CM et ME) est parallèle à l'axe des y, dirigée vers les y positifs et égale à

$$\frac{CE}{2}\sqrt{3}.$$

On sait alors que cette médiane est égale à la médiane d'un triangle *équilatéral* construit sur la même base CE.

Nous appellerons Ω' l'opération par laquelle on passe ainsi d'un segment rectiligne AB à la ligne brisée $ACDEB$.

13. Prenons maintenant sur l'axe des x un segment AB, A étant l'origine et la distance AB étant choisie pour unité de longueur (fig. 4). Effectuons sur le segment notre opération Ω' (ce qui revient à effectuer l'opération Ω définie au n° 1). AB se trouve ainsi remplacé par une ligne polygonale $ACDEB$ composée par 4 côtés et que nous désignerons

par P_2'. Effectuant sur chacun de ces côtés la même opération Ω' on passe à une ligne polygonale P_3' composée par 4^2 côtés, sur lesquels on effectue la même opération et ainsi de suite indéfiniment. Désignant, pour plus de symétrie, AB par P_1', on a ainsi défini une suite illimitée de lignes polygonales

$$P_1', P_2', P_3', \ldots$$

Je dis que ces lignes tendent indéfiniment vers une courbe continue P' dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, peut s'écrire

$$y = \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme et continue de x dans l'intervalle $0 \ldots 1$.

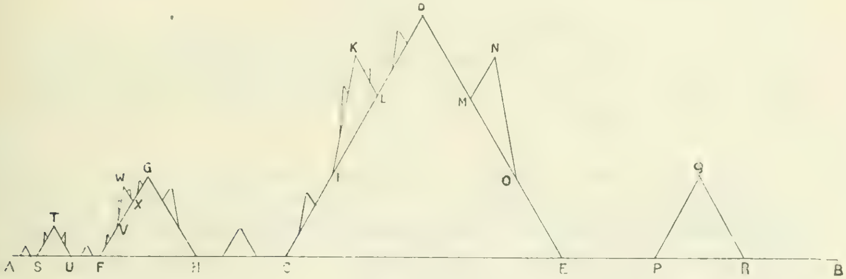


Fig. 4.

14. Désignons par S l'ensemble des sommets (c'est-à-dire les points où deux côtés d'une ligne P_ν' se rencontrent) et par S' l'ensemble des points limites de S.. (On voit que chaque point de S appartient à S'.)

Soit x la distance d'un point quelconque X de AB à l'origine A. Si X est un point de S' nous prenons

$$y = \varphi(x) = 0.$$

Dans le cas contraire nous élevons en X une perpendiculaire sur AB dirigée vers les y positifs. Cette perpendiculaire rencontre successivement certaines des lignes P_ν', soit

$$P_\alpha', P_\beta', P_\gamma', \ldots$$

aux points respectifs

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

Posons

$$XX_1 = \varphi_1(x), \qquad X_1X_2 = \varphi_2(x), \qquad X_2X_3 = \varphi_3(x)\ , \quad \ldots$$

et convenons de mettre, si X_k est un point de S'

$$\varphi_{k+1}(x) = 0, \qquad \varphi_{k+2}(x) = 0\ , \cdot \quad \ldots$$

Par un raisonnement tout analogue à celui employé plus haut (n° 6) nous voyons alors que les fonctions $\varphi_\nu(x)$ sont uniformes et continues dans l'intervalle $0 \ldots 1$ et que leur somme $\varphi(x)$ y converge uniformément. Donc si nous posons

$$y = \varphi(x), \qquad (0 \leq x \leq 1) \tag{8}$$

y est une fonction uniforme et continue dans cet intervalle.

Nous voilà donc en possession d'une courbe P' où l'ordonnée s'exprime en fonction uniforme et continue (8) par rapport à l'abscisse dans tout l'intervalle considéré.

15. Je dis que *la fonction $\varphi(x)$ n'admet, pour aucune valeur de x, une dérivée finie et déterminée.*[1]

Si K est un point de P' qui appartient en même temps à l'une des lignes P''_ν, la démonstration est tout analogue à celle employée plus haut pour la courbe P.

Considérons donc le cas contraire où le point K est la limite d'une suite indéfinie de points X, X_1, X_2, ..., sa distance y à l'axe des x étant égale à la série infinie

$$y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots .$$

Supposons que la perpendiculaire XK rencontre successivement les lignes polygonales

$$P'_{a_1}\ , P'_{a_2}\ , \ldots$$

aux points

$$X_1\ , X_2\ , \ldots$$

[1] Nous laissons indécidé, dans ce qui suit, s'il peut y avoir des valeurs x où la dérivée est déterminée mais *infinie*.

situés respectivement sur les côtés

$$S_1S'_1\,,\ S_2S'_2\,,\ \ldots$$

de ces lignes. Tous les triangles construits successivement dans notre figure ayant leurs médianes parallèles à l'axe des y nous pouvons (voir fig. 5) distinguer le côté CD d'un tel triangle situé à gauche de la médiane du côté DE situé à droite. Pour abréger le raisonnement qui suit, nous appellerons les côtés tels que CD *côtés à gauche* et les côtés tels que DE *côtés à droite*.

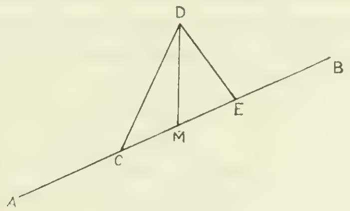


Fig. 5.

Cela convenu, remarquons tout d'abord que dans un triangle CDE de notre figure (fig. 5) construit sur un côté à *gauche* AB, CD est un côté à *gauche* formant avec AB un angle DCB *moindre* que 60° et que DE est un côté à *droite* formant avec AB un angle DEC *plus grand* que 60°.

Le cas opposé se présenterait si AB était un côté à droite. Donc, si dans la figure construite on considère deux côtés successifs (c'est-à-dire ayant un point commun) dont l'un est à gauche et l'autre à droite, ces deux côtés forment un angle qui reste, de quelque manière qu'on ce déplace sur la figure, supérieur à 60°.

16. Distinguons maintenant entre les trois cas suivants.

1) Si grand que l'on choisisse l'indice k, il y a dans la suite

$$S_kS'_k\,,\ S_{k+1}S'_{k+1}\,,\ \ldots \tag{9}$$

une infinité de côtés à gauche et une infinité de côtés à droite. De ce que nous venons de dire de l'angle formé par deux côtés successifs résulte alors que les droites (9) ne peuvent pas tendre vers une direction limite déterminée; par suite, le point K de la courbe étant situé *entre* les deux

points S_ν et S'_ν quelque grand que soit ν, il ne peut y avoir au point K une tangente déterminée.

2) A partir d'un certain indice k tous les côtés (9) sont à gauche.

Dans ce cas il est facile de voir que la droite $S_\nu S'_\nu$ coïncide à la limite (pour $\nu = \infty$) avec une droite parallèle à l'axe des y. En effet soit AB, CD deux côtés à gauche consécutifs (voir fig. 5) et soit DE le côté à droite correspondant (d'après la construction adoptée on a alors $CM = ME$ et la médiane MD est parallèle à l'axe des y). Désignons par β l'angle DMB formé par le côté AB et la verticale et par β' l'angle formé par CD et la verticale. DM étant plus grand que CM en vertu de la construction, l'angle β' ou CDM est plus petit que l'angle DCM d'où l'on obtient

$$\beta' < \frac{1}{2}\beta$$

Considérant un côté à gauche consécutif à CD et désignant par β'' l'angle qu'il forme avec la verticale on a, par la même raison

$$\beta'' < \frac{1}{2}\beta'$$

et ainsi de suite. Par là on voit donc que les angles

$$\beta\,,\ \beta'\,,\ \beta''\,,\ \ldots$$

diminuent indéfiniment et tendent vers zéro.

Or, le point K étant intermédiaire à S_ν et S'_ν nous savons que, s'il y avait une tangente T déterminée au point K, la sécante $S_\nu S'_\nu$ tendrait indéfiniment vers T comme position limite. Donc T serait nécessairement parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire la dérivée de $\varphi(x)$ au point considéré serait infinie.

3) A partir d'un certain indice k tous les côtés (9) sont à droite.

Comme dans le cas précédent, on arrive à la conclusion que si $\varphi(x)$ avait une dérivée déterminée pour la valeur considérée de x, cette dérivée serait infinie.

Le théorème énoncé est donc vrai dans tous les cas.

IV.

Généralisation de la méthode.

17. Prenons sur un segment rectiligne AB deux points C, E entre A et B et désignons par a, b, c respectivement les longueurs des segments AC, CE, EB. Construisons sur CE comme base un triangle équilateral CDE tourné vers le côté positif de AB.

Nous désignerons par $\Omega(a, b, c)$ l'opération par laquelle on passe ainsi du segment AB à la ligne polygonale $ACDEB$ composée par 4 segments ayant pour longueurs respectives a, b, b, c et nous appellerons respectivement a, b, c le premier, le second, le troisième paramètre de Ω.

Désignant par L la longueur de AB et par L' celle de la transformée de AB (c'est-à-dire la ligne $ACDEB$), on a la relation

$$L' = L + b.$$

La somme $a + b + c$ étant égale à la longueur du segment AB, on voit que, ce segment étant regardé comme donné, il y a une infinité double (dépendant de deux paramètres indépendants, par exemple a et b) d'opérations Ω qu'on peut effectuer sur AB. Nous dirons qu'on effectue »une opération Ω» sur AB si on effectue l'opération $\Omega(a, b, c)$ avec des valeurs données positives (non nulles) de a, b, c (compatibles, bien entendu, avec la relation $a + b + c = AB$).

Ces définitions adoptées, partons d'un segment rectiligne AB que nous désignons par P_1 et dont la longueur L_1 sera choisi pour unité de longueur:

$$L_1 = 1.$$

Choisissons une suite de nombres positifs

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$$

tels que

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$$

et tels, en outre, que la somme

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$$

ait une valeur finie ε.

Effectuons sur P_1 une opération Ω ayant pour second paramètre un nombre b_1 remplissant la condition

$$b_1 \leqq \varepsilon_1$$

ce qui nous donne une ligne polygonale P_2 composée par 4 côtés rectilignes; effectuons sur chacun de ces côtés une opération Ω où le second paramètre est au plus égal à ε_2; nous obtenons alors une ligne polygonale P_3 composée par 4^2 côtés; sur chacun de ces derniers nous effectuons une opération Ω où le second paramètre est au plus égal à ε_3 et ainsi de suite indéfiniment.

Soit $P_1, P_2, P_3, \ldots$ la suite des lignes polygonales ainsi définies et conservons d'ailleurs les mêmes notations que précédemment (n° 3, 4). Ainsi nous appelons *sommet* tout point où deux côtés successifs d'une ligne P_n se rencontrent (et aussi chacun des points A et B) et nous désignons par S l'ensemble de tous les sommets, par S' l'ensemble des points limites des sommets. A tout point X de AB nous faisons correspondre un point déterminé $K(X)$ défini par une suite de perpendiculaires

$$XX_1,\ X_1X_2,\ X_2X_3,\ \ldots$$

successivement construites comme au n° 4. Désignant par x la distance de X au point A nous posons

$$f_1(x) = XX_1, \qquad f_2(x) = X_1X_2 \ , \quad \ldots .$$

Dans le cas où X_k est un sommet ou un point limite des sommets nous prenons comme précédemment

$$K(X) = X_k,$$

$$f_{k+1}(x) = f_{k+2}(x) = \ldots = 0.$$

Dans le cas contraire on démontre facilement que X_k tend (pour $k = \infty$) vers un point limite bien déterminé que nous désignons par $K(X)$; car la somme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

est convergente ce qui résulte des inégalités faciles à établir:

$$f_1(x) < \varepsilon_1, \qquad f_2(x) < \varepsilon_2 \ , \quad \ldots$$

et de l'hypothèse faite sur les ε_ν.

De la même manière qu'au n° 6 on peut démontrer que chacune des fonctions $f_\nu(x)$ est continue dans l'intervalle $0 \ldots 1$, que la somme $\Sigma f_\nu(x)$ y converge uniformément et que, par conséquent, $f(x)$ est une fonction uniforme et continue dans cet intervalle. Et on conclut de là que l'ensemble des points $K(x)$ obtenu en faisant varier x de 0 à 1 constitue un arc de courbe continue P.

Cette courbe possède des propriétés très différentes selon les différentes valeurs attribuées aux paramètres des opérations Ω employées et l'on conçoit qu'il y a là une méthode pour construire des courbes possédant telle ou telle propriété exigée à l'avance. Dans ce qui suit nous nous bornerons à considérer un exemple particulièrement simple.

Choisissons, dans chaque opération $\Omega(a, b, c)$ employée pour la construction de P, le premier paramètre a égal au troisième c et déterminons le second paramètre b de la manière suivante. Choisissons une suite de nombres décroissants

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

et suffisamment petits pour que l'on puisse effectuer sur $AB = P_1$ une opération Ω ayant b_1 pour second paramètre, sur chacun des segments de la ligne P_2 ainsi obtenue une opération Ω ayant b_2 pour second paramètre et ainsi de suite. (Il suffit par exemple de supposer $b_1 \leqq \frac{1}{3}$, $b_2 \leqq \frac{b_1}{3}$, $b_3 \leqq \frac{b_2}{3}, \ldots$).

Désignant la longueur de la ligne P_ν par L_ν on voit alors facilement que

$$\begin{aligned} L_1 &= 1, \\ L_2 &= L_1 + b_1, \\ L_3 &= L_2 + 4b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_\nu &= L_{\nu-1} + 4^{\nu-2} b_{\nu-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où

$$L_\nu = 1 + b_1 + 4b_2 + \ldots + 4^{\nu-2} b_{\nu-1}$$

Donc la limite de L_ν (pour $\nu = \infty$) est finie ou infinie selon que la série

$$\Sigma 4^\nu b_\nu$$

converge ou diverge d'où l'on conclut que la courbe P est rectifiable dans le premier cas, non rectifiable dans le second cas.

Considérons maintenant un point K de P. Si K est un sommet on démontre, en raisonnant comme plus haut (n° 9) que la courbe P n'a pas une tangente déterminée en ce point; il en est de même si K est un point limite des sommets défini par une suite *infinie* de perpendiculaires

$$XX_1,\ X_1X_2,\ \ldots.$$

Dans le cas au contraire où K est un point limite des sommets, défini par une suite *finie* de perpendiculaires, le raisonnement employé au n° 9 tombe en défaut si la série $\Sigma 4^\nu b_\nu$ converge; il est donc douteux si l'on peut par la méthode adoptée former une courbe *rectifiable* et *sans tangente*, et il y a lieu de se poser la question si de telles courbes existent ou non; en tout cas, une méthode de trancher cette question nous apporterait sans doute des connaissances nouvelles sur la structure infinitésimale des courbes planes.

SUR LES FONCTIONS CONVEXES ET LES INÉGALITÉS ENTRE LES VALEURS MOYENNES[1]

PAR

J. L. W. V. JENSEN

à COPENHAGUE.

1. *Des fonctions convexes et concaves. Définition. Exemples.*

Dans sa célèbre Analyse algébrique (note II, pp. 457—59) CAUCHY démontre que »la moyenne géométrique entre plusieurs nombres est toujours inférieure à leur moyenne algébrique». La méthode employée par CAUCHY est extrêmement élégante, et elle à passé sans changement dans tous les traités d'analyse algébrique. Elle consiste, comme on sait, en ceci, que, de l'inégalité

$$\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a + b),$$

où a et b sont des nombres positifs, on est conduit à l'inégalité analogue pour quatre nombres, savoir

$$\sqrt{abcd} < \frac{1}{4}(a + b + c + d),$$

et aux suivantes, pour $8, 16, \ldots, 2^m$ nombres, après quoi ce nombre, par un artifice, est réduit à un nombre arbitraire inférieur, n. Cette méthode simple a été mon point de départ dans les recherches suivantes, qui conduisent, par une voie en réalité très simple et élémentaire, à des résultats généraux et non sans importance.

[1] Conférence faite à la Société mathématique danoise le 17 janvier 1905.

J'introduirai la définition suivante. Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$, réelle, finie et uniforme, de la variable réelle x, satisfait dans un certain intervalle à l'inégalité

$$(1) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) \geq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

on dit que $\varphi(x)$ est une fonction convexe dans cet intervalle.

Si au contraire $\varphi(x)$ satisfait à l'inégalité

$$(2) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) \leq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

on dit que $\varphi(x)$ est une fonction concave.

On suppose en outre que ces inégalités ne se réduisent pas *constamment*, dans l'intervalle donné, à l'égalité

$$(3) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right);$$

dans ce cas la fonction $\varphi(x)$ est dite »linéaire» dans l'intervalle donné.

Cette expression a été adoptée parceque l'égalité (3) est satisfaite par $\varphi(x) = a + bx$.

Il ressort de ces définitions que les fonctions »linéaires» forment une transition de la classe des fonctions convexes à celle des fonctions concaves, et qu'elles doivent être considérées comme des cas limites communs aux deux classes.

Des définitions données il résulte immédiatement que $-\varphi(x)$ est concave, lorsque $\varphi(x)$ est convexe, et inversement. Il serait par suite suffisant dans ce qui suit de considérer seulement les fonctions convexes, puisque l'on passe si aisément d'une classe à l'autre. Comme toutefois il peut y avoir avantage à considérer les deux classes de fonctions, les fonctions concaves seront aussi mentionnées de temps en temps; mais on devra se souvenir, même lorsque ce ne sera pas toujours rappelé, qu'à toute proposition relative aux fonctions convexes correspond une proposition analogue pour les fonctions concaves.

Comme l'objet principal de cette recherche est de présenter une série d'inégalités d'un caractère général, comprenant comme cas particuliers presque toutes les inégalités jusqu'ici connues, nous allons développer d'abord les théorèmes nécessaires propres à ce but, avant d'entreprendre l'étude plus approfondie des fonctions convexes elles-mêmes.

Il sera d'abord nécessaire d'énoncer quelques propositions qui résultent immédiatement des définitions, et de donner quelques exemples des classes de fonctions définies.

Une somme de fonctions convexes ou »linéaires» est convexe, lorsque l'une au moins des fonctions est convexe. Si $\varphi(x)$ est convexe, et c une constante positive, $c\varphi(x)$ est convexe. Ces propositions sont également vraies pour les fonctions concaves. Exemples:

1°. x^2 est une fonction convexe dans tout intervalle. Donc $a+bx+cx^2$ est convexe ou concave suivant que c est positif ou négatif.

2°. $|x|$ est »linéaire» dans tout intervalle qui ne comprend pas le zéro, mais convexe dans le cas contraire. Donc $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu |x - x_\nu|$, où les c sont des constantes positives, est convexe ou »linéaire» dans tout intervalle, convexe si l'intervalle comprend une ou plusieurs des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, »linéaire», si cela n'a pas lieu.

3°. L'inégalité

$$pa^{p-1}(a-b) > a^p - b^p > pb^{p-1}(a-b),$$

qui a lieu pour $a > b > 0$, et pour toute valeur de p supérieure à 1, est bien connue.[1] Si x et y sont positifs, et $x > y$, on déduit de cette inégalité

$$x^p - \left(\frac{x+y}{2}\right)^p > p\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-1}\frac{x-y}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p - y^p$$

ou

$$(\alpha) \qquad x^p + y^p > 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^p.$$

Donc x^p, pour des valeurs de x positives et une valeur de p supérieure à 1, est une fonction convexe. De la dernière inégalité il résulte, en changeant x et y en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$,

$$x^{-p} + y^{-p} > 2\left(\frac{x+y}{2xy}\right)^p \geqq 2\left(\frac{2}{x+y}\right)^p = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-p}.$$

[1] On peut facilement la déduire de l'identité

$$\frac{1-a^n}{1-a} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$$

par une méthode tout à fait élémentaire.

Donc x^p, lorsque $p > 1$, est une fonction convexe pour les valeurs positives de x. Si au contraire on met dans (α) $x^{\frac{1}{p}}$ et $y^{\frac{1}{p}}$ à la place de x et de y, on obtient

$$(\beta) \qquad 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{1}{p}} > x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}.$$

x^p est donc une fonction concave, pour x positif, lorsque $0 < p < 1$. De (β) il résulte

$$\frac{2}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{1}{p}}} < \frac{4}{x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}} < \frac{x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}}{(xy)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} + \frac{1}{y^{\frac{1}{p}}},$$

qui est encore vraie pour $p = 1$. Ainsi x^{-p} est aussi convexe lorsque $0 < p \leq 1$.

En résumé, pour les valeurs positives de x, on voit que x^p est convexe lorsque p est plus grand que 1, ou négatif, et concave lorsque $0 < p < 1$. Si $p = 1$, la fonction est »linéaire», comme on l'a vu plus haut.

4°. $\left|\sqrt{a + bx^2}\right|$ est convexe pour $a > 0$, $b > 0$, concave pour $ab < 0$, tant que le binôme sous le signe radical reste positif.

5°. e^{cx} est une fonction convexe dans tout intervalle, tandis que $\log x$ est concave dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

6°. Le calcul différentiel nous fournit un moyen général de décider si des fonctions qui peuvent être différentiées sont convexes ou concaves. Si en effet $f(x)$ est réelle et uniforme dans un certain intervalle, et possède une deuxième dérivée déterminée, finie et continue, on aura, en vertu du théorème de Rolle

$$f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 f''(x'),$$

x' étant un nombre intermédiaire entre x et y. Donc $f(x)$ sera convexe tant que $f''(x)$ sera positive, concave tant que $f''(x)$ sera négative. La signification géométrique de ce fait est évidente. En effet, si une fonction convexe $\varphi(x)$ est *susceptible* d'une représentation géométrique en coordonnées rectangulaires l'équation $y = \varphi(x)$ définit une courbe, tournant sa convexité vers les y négatifs.

Remarque. Les trois inégalités suivantes

$$\psi(x)\psi(y) \geqq \left[\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2, \quad \psi(x) \text{ positif};$$

$$\psi(x) + \psi(y) \geqq 2\psi(\sqrt{xy}), \quad x \text{ et } y \text{ positifs};$$

$$\psi(x)\psi(y) \geqq [\psi(\sqrt{xy})]^2, \quad x \text{ et } y \text{ positifs}, \ \psi(x) \text{ positif};$$

peuvent être ramenées à (1) par des substitutions simples, savoir, respectivement:

$$\log\psi(x) = \varphi(x),$$

$$\psi(e^x) = \varphi(x),$$

$$\log\psi(e^x) = \varphi(x).$$

2. *Généralisation de l'inégalité* (1).

Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction convexe quelconque dans un intervalle donné, et que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ soient tous situés dans cet intervalle ou à ses limites. De (1) il suit que

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + (x_3) + \varphi(x_4) \geqq 2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)$$

$$\geqq 4\varphi\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)$$

et généralement, m étant un entier positif

$$\sum_{\nu=1}^{2^m}\varphi(x_\nu) \geqq 2^m\varphi\left(2^{-m}\sum_{\nu=1}^{2^m}x_\nu\right),$$

comme on le voit facilement par l'induction complète. Si alors n est un entier positif, et si l'on choisit m tel que $2^m > n$, on peut poser

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2^m} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Et on trouve alors

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(x_\nu) + (2^m - n)\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right) \geqq 2^m\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right),$$

ou

(4) $$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right) \leqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(x_\nu),$$

laquelle est une généralisation de l'inégalité (1), qui sert à définir les fonctions convexes.

Il est clair qu'une inégalité semblable s'applique aux fonctions concaves: il suffit de renverser le signe d'inégalité. Pour les fonctions »linéaires» l'inégalité devient simplement une égalité.

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ est une fonction *continue* et convexe dans un certain intervalle. Nous savons qu'il existe de telles fonctions par les exemples précédents. Soit encore $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, où tous les n_μ sont des entiers positifs. Il résulte de (4), en choisissant les x d'une manière convenable,

$$\varphi\left(\frac{1}{n}(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_m x_m)\right) \leqq \frac{1}{n}\left(n_1\varphi(x_1) + n_2\varphi(x_2) + \ldots + n_m\varphi(x_m)\right).$$

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des nombres positifs quelconques dont la somme est a, et faisons croître les n indéfiniment, mais de telle sorte que

$$\lim \frac{n_1}{n} = \frac{a_1}{a}, \qquad \lim \frac{n_2}{n} = \frac{a_2}{a}, \quad \ldots, \quad \lim \frac{n_{m-1}}{n} = \frac{a_{m-1}}{a},$$

d'où il résultera

$$\lim \frac{n_m}{n} = 1 - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1}}{a} = \frac{a_m}{a},$$

et par suite, $\varphi(x)$ étant continue par hypothèse,

$$\varphi\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{a}\right) \leqq \frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \varphi(x_\mu)}{a},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Lorsque $\varphi(x)$ est une fonction continue et convexe dans un intervalle donné, on aura l'inégalité

$$\varphi\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right) \leqq \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu}, \tag{5}$$

où $x_1, x_2, \ldots$ représentent des nombres tous situés dans l'intervalle, et où $a_1, a_2, \ldots$ sont des nombres positifs, mais d'ailleurs quelconques.

Pour les fonctions concaves, le signe d'inégalité doit être renversée.

Cette proposition est d'une telle généralité, que peut-être toutes les inégalités connues entre les valeurs moyennes y sont comprises comme cas très particuliers.

3. *Applications de la formule* (5).

Dans ce qui suit, les nombres représentés par $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seront supposés positifs. Posons dans la formule (5) $\varphi(x) = x^p$, $p > 1$, $x > 0$, donc $\varphi(x)$ est convexe, comme on l'a vu. On aura

$$\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right)^p \leqq \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu},$$

ou

$$(6) \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu\right)^p \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{p-1} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p,$$

où tous les x sont positifs. L'inégalité (6) se réduit à une simple identité pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Elle reste aussi valable pour $p < 0$, tandis qu'elle doit être renversée pour $0 < p < 1$. Pour $a_1 = a_2 = \ldots = 1$ on retrouve un résultat donné auparavant par M. H. Simon.[1]

En y faisant $p = 2$, et en remplaçant a_ν par a_ν^2, x_ν par $\frac{b_\nu}{a_\nu}$, on trouve

$$(7) \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2,$$

formule due à Cauchy (*loc. cit.*, p. 455), qui en donne d'ailleurs une démonstration toute différente.

Posons dans (7) $a_\nu^{\frac{1}{2}} x_\nu^{\frac{1}{2}}$ pour a_ν, $a_\nu^{\frac{1}{2}} x_\nu^{-\frac{1}{2}}$ pour b_ν, nous avons

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{x_\nu}} \leqq \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu},$$

[1] *Über einige Ungleichungen*, Zeitschrift für Math. u. Physik, t. 33, p. 57, 1888.

d'où suit que la moyenne harmonique entre plusieurs nombres positifs est plus petite que leur moyenne algébrique.

Il est facile de généraliser la formule (7).

Remplaçons dans (6) x_ν par $\left(\frac{b_\nu}{a_\nu}\right)^{\frac{1}{p}}$ et extrayons la racine $p^{\text{ième}}$ des deux membres, nous aurons

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{1-\frac{1}{p}} b_\nu^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{\frac{1}{p}},$$

qui peut être écrite sous la forme symétrique

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{\varkappa_1} b_\nu^{\varkappa_2} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{\varkappa_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{\varkappa_2},$$

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$ étant des constantes positives avec la somme 1.

Élevons les deux membres de l'inégalité ci-dessus à la puissance $\varkappa'^{\text{ième}}$ où $\varkappa'$ est positif et < 1, et multiplions par $\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-\varkappa'}$, nous trouvons

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{\varkappa_1} b_\nu^{\varkappa_2}\right)^{\varkappa'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-\varkappa'} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{\varkappa_1\varkappa'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{\varkappa_2\varkappa'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-\varkappa'},$$

ce qui démontre l'inègalité suivante

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{\varkappa_1} b_\nu^{\varkappa_2} c_\nu^{\varkappa_3} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{\varkappa_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{\varkappa_2} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{\varkappa_3},$$

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ étant des constantes positives avec la somme 1. En continuant de cette manière on démontre par l'induction complète

$$(8) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 1}^{\varkappa_1} a_{\nu 2}^{\varkappa_2} \ldots a_{\nu k}^{\varkappa_k} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 1}\right)^{\varkappa_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 2}\right)^{\varkappa_2} \ldots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k}\right)^{\varkappa_k},$$

où les $\varkappa$ sont des constantes positives avec la somme 1.

Dans la formule (7), mettons $a_\nu^{\frac{1}{2}} b_\nu^{\frac{x}{2}}$ à la place de a_ν, et $a_\nu^{\frac{1}{2}} b_\nu^{\frac{y}{2}}$ à la place de b_ν, x et y étant des nombres réels quelconques, et posons, pour simplifier l'écriture, $S(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu^x$. On a:

$$\left(S\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 \leq S(x) S(y),$$

et $\log S(x)$ est par suite une fonction convexe de x dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. La relation fondamentale (5) donne alors:

$$\log S\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}\right) \leqq \frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \log S(x_\mu)}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}$$

ou

$$(9) \qquad \left(S\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}\right)\right)^{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu} \leqq \prod_{\mu=1}^{m} (S(x_\mu))^{a_\mu}.$$

Pour $m = 2$, on a

$$\left(S\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2}\right)\right)^{a_1+a_2} \leqq (S(x_1))^{a_1}(S(x_2))^{a_2}$$

En y faisant $x_2 = x_0$, et $\alpha_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, $\alpha_2 = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$, et supposant $x_1 > x > x_0$, on trouve

$$S(x) \leqq (S(x_1))^{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}} (S(x_0))^{\frac{x_1-x}{x_1-x_0}},$$

ou bien

$$(S(x))^{x_1-x_0} \leqq (S(x_1))^{x-x_0} (S(x_0))^{x_1-x}.$$

D'où il suit

$$(10) \qquad \left(\frac{S(x)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x-x_0}} \leqq \left(\frac{S(x_1)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x_1-x_0}},$$

ou encore

$$(10') \qquad \left(\frac{S(x)}{S(x_1)}\right)^{\frac{1}{x-x_1}} \geqq \left(\frac{S(x_0)}{S(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_0-x_1}}.$$

De (10) il résulte que la fonction $\left(\frac{S(x)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}$ n'est jamais décroissante lorsque x croît, x_0 restant invariable. Si dans (10′) on permute x_1 et x_0,

il faut supposer $x_0 > x > x_1$, et l'on en conclut que $\left(\frac{S(x)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}$ n'est jamais croissante lorsque x décroît. Ce qui démontre la proposition suivante:

Les nombres $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ étant positifs, x étant une variable réelle quelconque, et x_0 une constante réelle quelconque, la fonction

$$\Phi(x) = \left(\frac{\sum_1^n a_\nu b_\nu^x}{\sum_1^n a_\nu b_\nu^{x_0}}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}$$

est monotone et ne décroît jamais lorsque l'on fait croître x, tant dans l'intervalle $(-\infty, x_0)$, que dans l'intervalle $(x_0, +\infty)$. On a d'ailleurs $\Phi(x_0-\varepsilon) < \Phi(x_0+\varepsilon)$, ε étant positif.

La dernière partie de la proposition résulte de ce que

$$(S(x_0))^2 \leqq S(x_0+\varepsilon)S(x_0-\varepsilon)$$

comme on l'a vu plus haut.

Cette proposition comprend comme cas particuliers quelques propositions de SCHLÖMILCH [1] dont voici l'énoncé:

Soit n nombres positifs $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$, et $S_p = \alpha^p + \beta^p + \ldots + \lambda^p$, on aura

$$\frac{S_1}{n} < \sqrt{\frac{S_2}{n}} < \sqrt[3]{\frac{S_3}{n}} < \ldots$$

et

$$\frac{S_1}{n} > \left(\frac{S_{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2 > \left(\frac{S_{\frac{1}{3}}}{n}\right)^3 > \ldots.$$

Du reste BIENAYMÉ [2] a énoncé sans démonstration une proposition qui est très voisine de notre proposition ci-dessus. Plus tard M. H. SIMON [3] a publié une démonstration d'un cas spécial.

[1] *Über Mittelgrössen verschiedener Ordnungen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. 3, p. 301, 1858.

[2] Société philomatique de Paris, Extraits des procès-verbaux des séances pendant l'année 1840, p. 67, Paris 1841.

[3] A l'endroit cité.

SCHLÖMILCH détermine aussi les valeurs limites

$$\lim_{p=\infty}\left(\frac{S_p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \lim_{p=\infty}\left(\frac{S_{\frac{1}{p}}}{n}\right)^{p}.$$

On trouve facilement pour notre fonction, que

$$\lim_{x=0}\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{x}} = (b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}},$$

et

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{x}} = b,$$

où b est le plus grand des nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Pour faire une autre application de la formule fondamentale (5), posons $\varphi(x) = \log x$, $\varphi(x)$ est concave et on aura parsuite

$$\log \frac{\sum_1^n a_\nu b_\nu}{\sum_1^n a_\nu} \geq \frac{\sum_1^n a_\nu \log b_\nu}{\sum_1^n a_\nu},$$

ou

$$\text{(11)} \qquad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} > (b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}},$$

ce qui est une forme généralisée, due à M. L. J. ROGERS[1], de la proposition classique sur la moyenne géométrique.

On trouve une autre inégalité d'un caractère semblable en remarquant que $x \log x$ est convexe pour x positive. La voici

$$\text{(12)} \qquad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq (b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n}}.$$

Le cas spécial où $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ a aussi été donné par M. ROGERS.

Ces exemples doivent suffire pour montrer combien la formule (5) est féconde.

[1] Messenger of Mathematics, t. 17, 1888.

Il est évident que l'on peut, dans les formules précédentes, lorsque Σa_ν, $\Sigma a_\nu x_\nu$, etc., sont des séries convergentes, faire croître n indéfiniment, et l'on obtient ainsi une suite d'inégalités entre certaines séries infinies.

On peut employer autrement la formule (11) dans la théorie des séries. *Soit* $\Sigma b_{\nu 1}$, $\Sigma b_{\nu 2}$, ..., $\Sigma b_{\nu n}$ *des séries convergentes à termes positifs, et soit* a_1, a_2, ..., a_n *des constantes positives dont la somme est* 1, *la série*

$$\sum_{(\nu)} b_{\nu 1}^{a_1} b_{\nu 2}^{a_2} \dots b_{\nu n}^{a_n}$$

sera aussi convergente.

La démonstration de cette proposition peut être déduite immédiatement de (11) en y faisant les b dépendants d'un indice nouveau ν, posant $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, et faisant la somme dans les deux membres pour $\nu = 1, 2, \dots$.

4. *Applications sur le calcul intégral.* Il y a encore d'autres cas où l'on peut faire croître n indéfiniment. En se rappelant la définition d'une intégrale définie comme limite des valeurs d'une somme, ce qui précède nous donne toute une suite d'inégalités intéressantes entre des intégrales.

Supposons que $a(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions intégrables dans l'intervalle $(0, 1)$, et que $a(x)$ est constamment positive. L'inégalité (5) donne

$$\varphi\left(\frac{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right) f\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{n}}{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{n}}\right) < \frac{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right)\varphi\left(f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right)\frac{1}{n}}{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{n}},$$

où $\varphi(x)$ *est supposée continue et convexe* dans l'intervalle (g_0, g_1), g_0 et g_1 étant les limites inférieure et supérieure de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$. Or on sait que le produit de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable, et qu'une fonction intégrable, par substitution dans une fonction continue, donne une fonction intégrable. On trouve alors, en faisant croître n indéfiniment

$$(5') \qquad \varphi\left(\frac{\int_0^1 a(x)f(x)\,dx}{\int_0^1 a(x)\,dx}\right) < \frac{\int_0^1 a(x)\varphi(f(x))\,dx}{\int_0^1 a(x)\,dx}.$$

Il va sans dire qu'on peut remplacer les intégrales $\int\limits_0^1$ dans cette formule par des intégrales correspondantes $\int\limits_a^b$.

Par analogie avec les formules précédentes, je citerai les exemples suivants d'application de la formule (5')

$$\left(\int_0^1 a(x)f(x)dx\right)^p \leqq \left(\int_0^1 a(x)dx\right)^{p-1} \int_0^1 a(x)(f(x))^p dx, \quad f(x) \text{ positif, } p > 1;$$

$$\left(\int_0^1 a(x)b(x)dx\right)^2 \leqq \int_0^1 (a(x))^2 dx \int_0^1 (b(x))^2 dx, \quad b(x) \text{ intégrable et positif;}$$

$$\int_0^1 (a_1(x))^{\varkappa_1}(a_2(x))^{\varkappa_2}\dots(a_k(x))^{\varkappa_k}dx$$
$$\leqq \left(\int_0^1 (a_1(x)dx)\right)^{\varkappa_1}\left(\int_0^1 (a_2(x)dx)\right)^{\varkappa_2}\dots\left(\int_0^1 (a_k(x)dx)\right)^{\varkappa_k},$$

les $a(x)$ étant positives et intégrables, et $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots + \varkappa_k = 1$;

$$\frac{\int_0^1 a(x)b(x)dx}{\int_0^1 a(x)dx} \geqq e^{\frac{\int_0^1 a(x)\log b(x)dx}{\int_0^1 a(x)dx}};$$

$$\text{—},,\text{—} \leqq e^{\frac{\int_0^1 a(x)\log b(x)dx}{\int_0^1 a(x)b(x)dx}}.$$

De ces formules la deuxième et la quatrième sont des généralisations de formules connues. En posant dans la dernière $a(x) = 1$ on retrouve une formule de SCHLÖMILCH qui est particulièrement intéressante parcequ'elle conduit à un résultat important dans la recherche des zéros d'une série de TAYLOR, comme je le montrerai ailleurs.

5. *Etude plus approfondie des fonctions convexes.*

Après avoir montré l'utilité de la notion de »fonction convexe», nous reviendrons à l'étude de ces fonctions en général. Dans le § 2, nous avons montré que la formule (4) a lieu pour toute fonction convexe

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqq \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)}{n}.$$

Si l'on y fait, n étant $> m$,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = x + n\delta, \qquad x_{m+1} = \ldots = x_n = x,$$

on trouve

$$\varphi(x + m\delta) \leqq \frac{m}{n}\varphi(x + n\delta) + \frac{n-m}{n}\varphi(x)$$

ou

$$(\alpha) \qquad \frac{\varphi(x + n\delta) - \varphi(x)}{n} \geqq \frac{\varphi(x + m\delta) - \varphi(x)}{m}.$$

Mettant $-\delta$ à la place de δ, et supposant $x + n\delta$ et $x - n\delta$ compris dans l'intervalle donné, on trouve

$$(\beta) \qquad \frac{\varphi(x) - \varphi(x - m\delta)}{m} \geqq \frac{\varphi(x) - \varphi(x - n\delta)}{n}.$$

Comme on a, par suite de la définition,

$$\varphi(x + m\delta) - \varphi(x) \geqq \varphi(x) - \varphi(x - m\delta),$$

les inégalités (α) et (β) peuvent s'écrire

$$(\gamma) \quad \frac{\varphi(x + n\delta) - \varphi(x)}{n} \geqq \frac{\varphi(x + m\delta) - \varphi(x)}{m} \geqq \frac{\varphi(x) - \varphi(x - m\delta)}{m} \geqq \frac{\varphi(x) - \varphi(x - n\delta)}{n}.$$

Supposons alors que $\varphi(x)$ a une limite supérieure *finie* g dans l'intervalle donné, on aura, en prenant $m = 1$

$$\frac{g - \varphi(x)}{n} \geqq \varphi(x + \delta) - \varphi(x) > \varphi(x) - \varphi(x - \delta) \geqq \frac{\varphi(x) - g}{n},$$

d'où il résulte, si l'on fait décroître δ jusqu'à o, en même temps que n croît indéfiniment, mais assez lentement pour que $x \pm n\delta$ ne sorte pas de l'intervalle,

$$\lim_{|\delta| = 0} (\varphi(x + \delta) - \varphi(x)) = 0.$$

Ainsi est démontrée la proposition suivante:

Une fonction convexe, qui a une limite supérieure finie dans un certain intervalle, est continue dans cet intervalle.[1]

La formule (5) s'applique donc à toute fonction semblable. On pourrait en déduire ce qui suit, mais il est plus simple de partir de la formule (7).

Si l'on met dans celle-ci $\frac{\delta}{n}$ à la place de δ, on trouve, en supposant désormais δ *positif*

$$\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqq \frac{\varphi\left(x+\frac{m}{n}\delta\right)-\varphi(x)}{\frac{m}{n}\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi\left(x-\frac{m}{n}\delta\right)}{\frac{m}{n}\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta},$$

ce qui devient, en faisant converger $\frac{m}{n}$ vers un nombre positif quelconque, α, plus petit que 1

$$\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqq \frac{\varphi(x+\alpha\delta)-\varphi(x)}{\alpha\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\alpha\delta)}{\alpha\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta}.$$

Cette formule montre que $\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta}$ ne croît jamais lorsque δ décroît, et que ce quotient reste constamment plus grand que $\frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta')}{\delta'}$, où δ' est positif mais d'ailleurs quelconque. D'où il suit que

$$\lim_{\delta=+0} \frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta')}{\delta'}$$

[1] Cette proposition s'applique également à une fonction concave, en y remplaçant »limite supérieure» par »limite inférieure». De ce qu'une »fonction linéaire» peut être considérée comme un cas particulier des deux classes de fonctions, il résulte:

Une »fonction linéaire» qui a dans un certain intervalle soit une limite supérieure, soit une limite inférieure, est continue.

De ce résultat on conclue aisément la proposition suivante: une »fonction linéaire» ayant ou une limite supérieure ou une limite inférieure dans un intervalle donné a toujours la forme $a+bx$ dans cet intervalle, a et b étant des constantes. Par là est pleinement justifiée la dénomination que nous avons introduite.

existe, et l'on voit de même que

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x - \delta)}{\delta} \leqq \frac{\varphi(x + \delta') - \varphi(x)}{\delta'}$$

est aussi déterminée.

Ainsi est démontrée ce théorème:

Une fonction convexe $\varphi(x)$, qui a dans un certain intervalle une limite supérieure finie, a une fonction dérivée tant à droite, $\varphi'_+(x)$, qu'à gauche $\varphi'_-(x)$; la différence $\varphi'_+(x) - \varphi'_-(x)$ est positive ou nulle.

Aux fonctions concaves $\psi(x)$ s'applique une proposition analogue, qui résulte de ce qui précède, puisque $-\psi(x)$ est convexe.

6. *Quelques propositions de fonctions de fonctions.*

Si, dans l'intervalle (g, g'), $f(x)$ est une fonction convexe qui ne décroît pas lorsque x croît, et si $\varphi(x)$ est convexe dans un intervalle, dans lequel trouve lieu l'inégalité $g < \varphi(x) < g'$, $f(\varphi(x))$ est aussi convexe.

En effet, de

$$\varphi\left(\frac{x + y}{2}\right) \leqq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2},$$

il suit que

$$f\left(\varphi\left(\frac{x + y}{2}\right)\right) \leqq f\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(f(\varphi(x)) + f(\varphi(x))\right),$$

ce qui démontre la proposition.

On démontre de même le schéma suivant:

$f(x)$	$\varphi(x)$	$f(\varphi x)$
convexe, croissante	convexe	convexe
concave, décroissante	convexe	concave
convexe, décroissante	concave	convexe
concave, croissante	concave	concave

Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions inverses on démontre de même le schéma:

$\varphi(x)$	$\psi(x)$
convexe, croissante	concave, croissante
convexe, décroissante	convexe, décroissante
concave, décroissante	concave, décroissante

7. *Sur une certaine fonction convexe.* Nous avons vu plus haut que $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu |x - x_\nu|$ est convexe dans tout intervalle qui comprend au moins un des points $x_1, x_2, \ldots$. Ceci peut servir à former une fonction convexe dont les dérivées à droite et à gauche sont différentes en tous les points d'un ensemble dénombrable réel, donné à l'avance.

Soit en effet $c_1, c_2, \ldots$ une suite infinie de nombres positifs, $x_1, x_2, \ldots$ une suite infinie de nombres réels et bornés, et supposons la série Σc_ν convergente. Il résulte des recherches sur le principe de CANTOR concernant la condensation des singularités qui sont exposées dans DINI-LÜROTH (*Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse*, § 108*) que la fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu |x - x_\nu|$$

qui est convexe comme nous avons vu plus haut a partout une dérivée unique, sauf aux points $x_1, x_2, x_3, \ldots$. En ces points la fonction a une fonction dérivée à droite et une autre à gauche, et l'on a $f'_+(x_\nu) - f'_-(x_\nu) = 2c_\nu$.

Si par exemple, pour l'ensemble (x_ν), on choisit les nombres rationnels de l'intervalle $(0, 1)$ dans un ordre déterminé, $f(x)$ sera convexe dans cet intervalle, et aura une dérivée finie en tous les points irrationnels, tandis qu'aux points rationnels les fonctions dérivées à droite et à gauche diffèrent par un nombre positif.

En terminant je ne puis m'empêcher d'ajouter quelques remarques.

Il me semble que la notion »fonction convexe» est à peu près aussi fondamentale que celles-ci: »fonction positive», »fonction croissante». Si je ne me trompe pas en ceci la notion devra trouver sa place dans les expositions élémentaires de la théorie des fonctions réelles.

Quant à la définition d'une fonction convexe de plusieurs variables la suivante est la plus naturelle.

La fonction réelle $\varphi(X)$ du point analytique réelle $X=(x, y, z, \ldots)$ est convexe, si dans un domaine simplement connexe et convexe on a toujours

$$\varphi\left(\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(X_1)+\frac{1}{2}\varphi(X_2),$$

où

$$\frac{1}{2}(X_1+X_2)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \ldots\right).$$

Il est évident qu'une telle fonction est toujours fonction convexe de chacune des variables. L'inverse n'a pas lieu comme on le voit par un exemple:

$$f(x, y)=-|xy|^{\frac{2}{3}}.$$

Addition. Après avoir faite la conférence ci-dessus j'ai remarqué que la formule fondamentale (5) n'était pas entièrement nouvelle comme je le croyais. Je viens de trouver, dans une mémoire de M. A. Pringsheim,[1] une citation d'une note de M. O. Hölder[2] dans laquelle se trouve démontrée la formule en question. A la vérité les hypothèses de M. Hölder sont bien différentes des miennes en ce qu'il suppose que $\varphi''(x)$ existe. La formule très importante (5') n'est pas mentionnée davantage que la plupart des applications que j'ai données plus haut.

En même temps je veux démontrer une inégalité d'un autre caractère que celles données plus haut. Dans une addition[1] à sa mémoire précitée M. Pringsheim donne une démonstration élégante, qu'il attribue à M. Lüroth, de l'inégalité

$$\alpha) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^{\varkappa} < \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{\varkappa},$$

où les b sont positives et $\varkappa > 1$.

[1] *Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen.* Sitzungsber. d. math. phys. Classe d. k. bayer. Akad. d. W., t. 32, p. 163—192. Nachtrag..., ibid. p. 295—303.

[2] *Über einen Mittelwertsatz,* Nachr. v. d. k. Gesellsch. d. W. zu Göttingen, 1889, p. 38—47.

Il est facile de généraliser cette démonstration. Soit, en effet, x une variable *positive* et $f(x)$ une fonction *positive* et *croissante* avec x, et soit $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ des constantes également positives, nous avons $f(b_\nu) < f(b)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$, b étant la somme $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. En multipliant par a_ν les deux membres de l'inégalité ci-dessus, et en sommant pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$, on trouve

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(b_\nu) < f(b) \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

ou

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(b_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu} < f\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right).$$

C'est l'inégalité que j'avais en vue. Pour $a_\nu = b_\nu$ et $f(x) = x^{\varkappa-1}$, $\varkappa > 1$, nous retrouvons l'inégalité (α). A l'aide de celle-ci il est aisé de généraliser les conditions sous lesquelles la formule (8) est valable. Posons en effet dans celle-ci $a_{\nu\mu}^{\varkappa}$ pour $a_{\nu\mu}$, nous avons

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu1}^{\varkappa\varkappa_1} a_{\nu2}^{\varkappa\varkappa_2} \ldots a_{\nu k}^{\varkappa\varkappa_k} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu1}^{\varkappa}\right)^{\varkappa_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu2}^{\varkappa}\right)^{\varkappa_2} \ldots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k}^{\varkappa}\right)^{\varkappa_k}$$

$$< \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu1}\right)^{\varkappa\varkappa_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu2}\right)^{\varkappa\varkappa_2} \ldots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k}\right)^{\varkappa\varkappa_k},$$

ce qui fait voir que la formule (8) reste encore valable pour

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_k > 1,$$

seulement le signe d'égalité est à écarter.

ÜBER EINEN SATZ VON HERRN PHRAGMÉN

VON

EDMUND LANDAU

in BERLIN.

Herr PHRAGMÉN hat in seiner Arbeit[1] *Sur un théorème de Dirichlet* einen Satz bewiesen, welchem folgende Voraussetzungen zu Grunde liegen:

Es sei

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$$

eine Folge verschiedener positiver, der Grösse nach geordneter Constanten, welche mit n über alle Grenzen wachsen; ferner sei

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

eine Folge beliebiger reeller Grössen, und es werde eine Function $f(t)$ *durch die Gleichung*

$$f(t) = \Sigma c_n$$

definiert, wo die Summation sich auf alle Werte von n bezieht, für welche $l_n \leqq t$ *ist. Von dieser Function wird angenommen, dass sie sich auf die Form*

$$f(t) = ct + t^\gamma \psi(t) \quad (0 < \gamma < 1)$$

bringen lässt, wo c und γ *Constanten sind und* $\psi(t)$ *eine für alle t innerhalb endlicher Schranken gelegene Function von t bezeichnet.*[2]

---

[1] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Bd. 49, 1892, S. 199—206.

[2] Mit einer häufig angewendeten Abkürzung lässt sich die obige Annahme schreiben

$$f(t) = ct + O(t^\gamma).$$

DIRICHLET[1] hatte unter diesen Voraussetzungen, zu denen er die weitere hinzunahm, dass alle c_n positive ganze Zahlen sind, bewiesen:

Die unendliche Reihe

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}}$$

convergiert für $\rho > 0$, *und, wenn* ρ *zu* 0 *abnimmt, so existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\rho=0} \rho\varphi(\rho)$$

und ist $= c$.

Herr PHRAGMÉN hat in der erwähnten Arbeit aus den obigen Voraussetzungen (wobei die c_n beliebig sind) mehr erschlossen. Er hat bewiesen:

Die Differenz

$$\varphi(\rho) - \frac{c}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}} - \frac{c}{\rho}$$

lässt sich in eine mindestens für $0 < \rho < \frac{1}{2}(1 - \gamma)$ *convergente Potenzreihe*

$$a_0 + a_1\rho + \ldots + a_m\rho^m + \ldots \tag{1}$$

entwickeln.

Er hat dadurch gezeigt, dass die in der Halbebene $R(\rho) > 0$ durch die Dirichlet'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}}$$

definierte analytische Function $\varphi(\rho)$ über ein Stück der Geraden $R(\rho) = 0$ fortsetzbar ist. Sein Satz besagt nämlich, dass die Function sich im Kreise mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $\frac{1}{2}(1 - \gamma)$ regulär verhält, abgesehen vom Punkte $\rho = 0$, welcher für $c \lessgtr 0$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum c ist.

[1] *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 19, 1839, S. 326—328; Werke, Bd. 1, 1889, S. 415—417.

Ich behaupte nun, dass der Convergenzradius der Potenzreihe (1) nicht nur $\geqq \frac{1}{2}(1-\gamma)$ ist, wie der Phragmén'sche Satz aussagt, sonders stets mindestens doppelt so gross, also $\geqq 1-\gamma$.[1] Dies ist in dem allgemeineren Satze[2] enthalten:

Die Function $\varphi(\rho)$ ist über die Gerade $R(\rho)=0$ fortsetzbar und verhält sich in der Halbebene $R(\rho)>\gamma-1$ regulär, abgesehen für $c \gtrless 0$ vom Punkte $\rho=0$.

Dieser Satz wird im Folgenden bewiesen werden.

§ 1.

Nach Voraussetzung giebt es eine Constante C, so dass in

$$f(t)=\sum_{l_n \leqq t} c_n = ct + t^{\gamma}\psi(t) \tag{2}$$

für alle t

$$|\psi(t)|<C \tag{3}$$

ist.

---

[1] Dieser Werth $1-\gamma$ lässt sich nicht mehr vergrössern, wie das einfache Beispiel $l_n=n$, $c_n = 1+\frac{1}{n^{1-\gamma}}$ $(0<\gamma<1)$ zeigt. Hier ist

$$f(t)=\sum_{n=1}^{t}\left(1+\frac{1}{n^{1-\gamma}}\right)=t+O(t^{\gamma});$$

andererseits ist der Convergenzradius der Potenzreihe (1) genau $1-\gamma$, da $\rho=\gamma-1$ eine singuläre Stelle der für $R(\rho)>0$ durch die Dirichlet'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{n^{1-\gamma}}}{n^{1+\rho}}$$

definierten Function $\varphi(\rho)=\zeta(1+\rho)+\zeta(2-\gamma+\rho)$ ist, also auch von $\varphi(\rho)-\frac{1}{\rho}$.

[2] In dem Spezialfalle $l_n=n$ habe ich diesen Satz schon auf S. 77—79 der Arbeit bewiesen: *Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1903.

Daraus lässt sich im Falle $c \gtrless 0$ folgern: für jedes positive ε ist von einer gewissen Stelle $\nu = \nu(\varepsilon)$ an (also für alle $n \geqq \nu$) die Ungleichheitsbedingung

$$l_n \leqq l_{n-1} + l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon} \tag{4}$$

erfüllt.

In der That ist

$$f(t+t^{\gamma+\varepsilon}) - f(t) = c(t+t^{\gamma+\varepsilon}) + (t+t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma \psi(t+t^{\gamma+\varepsilon}) - ct - t^\gamma \psi(t)$$
$$= ct^{\gamma+\varepsilon} + (t+t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma \psi(t+t^{\gamma+\varepsilon}) - t^\gamma \psi(t),$$

also

$$f(t+t^{\gamma+\varepsilon}) - f(t) > ct^{\gamma+\varepsilon} - C(t+t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma - Ct^\gamma, \tag{5}$$

$$f(t+t^{\gamma+\varepsilon}) - f(t) < ct^{\gamma+\varepsilon} + C(t+t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma + Ct^\gamma. \tag{6}$$

Die rechte Seite von (5) bezw. (6) ist im Falle $c > 0$ bezw. $c < 0$ für alle hinreichend grossen t positiv bezw. negativ, also nicht Null; daher muss zwischen t (excl.) und $t + t^{\gamma+\varepsilon}$ (incl.) mindestens ein l liegen. Wird $t = l_{n-1}$ genommen, so zeigt dies, dass wirklich von einer gewissen Stelle an das auf l_{n-1} folgende nächste l, d. h. l_n, höchstens gleich $l_{n-1} + l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon}$ ist.

Diese Thatsache wird in § 4 angewendet werden.

§ 2.

Es ergiebt sich aus (2), wenn unter l_0 und $\psi(l_0)$ Null verstanden wird,

$$c_n = f(l_n) - f(l_{n-1}) = cl_n + l_n^\gamma \psi(l_n) - cl_{n-1} - l_{n-1}^\gamma \psi(l_{n-1}),$$

also für $R(\rho) > 0$

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cl_n - cl_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n^\gamma \psi(l_n) - l_{n-1}^\gamma \psi(l_{n-1})}{l_n^{1+\rho}},$$

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(l_n - l_{n-1})}{l_n^{1+\rho}} + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^\gamma \psi(l_n)\left(\frac{1}{l_n^{1+\rho}} - \frac{1}{l_{n+1}^{1+\rho}}\right). \tag{7}$$

§ 3.

Es soll zunächst gezeigt werden, dass die zweite unendliche Reihe in (7) für eine gewisse Umgebung jeder Stelle der Halbebene $R(\rho) > \gamma - 1$ gleichmässig convergiert. Da (bei geradlinigem Integrationsweg)

$$\frac{1}{l_n^{1+\rho}} - \frac{1}{l_{n+1}^{1+\rho}} = (1 + \rho) \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+\rho}}$$

ist, genügt es für diesen Zweck, die gleichmässige Convergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n^{\gamma} \psi(l_n) \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+\rho}} \tag{8}$$

in der Halbebene $R(\rho) > \gamma - 1 + \varepsilon$ zu beweisen, wo ε eine beliebige positive Grösse bezeichnet.

Der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes von (8) ist nach (3) für jene ρ

$$\leqq C l_n^{\gamma} \left| \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+\rho}} \right| < C l_n^{\gamma} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{1+\gamma+\varepsilon}} < C \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{u^{\gamma} du}{u^{1+\gamma+\varepsilon}} = C \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} = \int_{l_1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon l_1^{\varepsilon}}$$

convergiert, ist die Reihe (8), wie behauptet, für $R(\rho) > \gamma - 1 + \varepsilon$ gleichmässig convergent. Ihr Produkt mit $1 + \rho$, d. h. das zweite Glied der rechten Seite von (7) stellt also eine für $R(\rho) > \gamma - 1$ reguläre analytische Function dar.

§ 4.

Für $c = 0$ ist hiermit der auf S. 197 ausgesprochene Satz schon bewiesen.

Für $c \gtrless 0$ reduziert sich die Aufgabe darauf, nachzuweisen, dass die für $R(\rho) > 0$ durch den Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(l_n - l_{n-1})}{l_n^{1+\rho}} - \frac{c}{\rho}$$

definierte Function in der Halbebene $R(\rho) > \gamma - 1$ regulär ist. Dies braucht natürlich nur für $c = 1$ bewiesen zu werden.

Es ist bei Integration auf geradlinigem Wege für $R(\rho) > 0$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{l_1^\rho}\right) + \int_{l_1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\rho}} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{l_1^\rho}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}},$$

folglich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n - l_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{l_1^\rho} - 1\right) + \frac{1}{l_1^\rho} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{l_n - l_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}}\right).$$

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite $\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{l_1^\rho} - 1\right)$ und $\frac{1}{l_1^\rho}$ stellen ganze transcendente Functionen von ρ dar; es braucht also nur bewiesen zu werden, dass die unendliche Reihe auf der rechten Seite eine für $R(\rho) > \gamma - 1$ reguläre analytische Function definiert. Da sich durch partielle Integration

$$-(1+\rho)\int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u - l_{n-1}}{u^{2+\rho}}\,du = \left[\frac{u - l_{n-1}}{u^{1+\rho}}\right]_{l_{n-1}}^{l_n} - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}}$$

$$= \frac{l_n - l_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}}$$

ergiebt, ist für jenen Nachweis hinreichend, die gleichmässige Convergenz der Reihe

(9) $$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u - l_{n-1}}{u^{2+\rho}}\,du$$

für $R(\rho) > \gamma - 1 + 2\varepsilon$ festzustellen, wo ε eine beliebige positive Grösse ist.

Nach (4) ist von einer gewissen Stelle an

$$l_n - l_{n-1} \leq l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon},$$

also

$$\left| \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u - l_{n-1}}{u^{2+\rho}} du \right| < \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{l_n - l_{n-1}}{u^{1+\gamma+2\varepsilon}} du \leq \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon}}{u^{1+\gamma+2\varepsilon}} du < \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u^{\gamma+\varepsilon}}{u^{1+\gamma+2\varepsilon}} du$$

$$= \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}};$$

hieraus folgt die gleichmässige Convergenz der Reihe (9) für

$$R(\rho) \geqq \gamma - 1 + 2\varepsilon$$

und damit der auf S. 197 ausgesprochene Satz.

Berlin, den 19ten October 1904.

ESSAIS SUR LE CALCUL DU NOMBRE DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES AUX COEFFICIENTS ENTIERS

PAR

M. LERCH
À FRIBOURG.

CHAPITRE III.

Nous allons exposer les résultats de nature algébrique qui lient la théorie de l'équation binôme à la question qui nous occupe. GAUSS, dans la septième section des Disquisitiones, a montré l'existence de la décomposition suivante

$$4\frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 \pm pZ^2,$$

p étant premier, et Y et Z des polynômes aux coefficients entiers. LEJEUNE-DIRICHLET[1] et JACOBI[2] ont généralisé les résultats de GAUSS au cas d'un discriminant fondamental positif, et ont découvert le rôle que jouent les polynômes Y et Z dans la détermination du nombre des classes d'un discriminant positif. CAUCHY[3] paraît le premier avoir reconnu nettement comment la décomposition de GAUSS généralisée dépende du discriminant (qui remplace alors le nombre p) supposé fondamental, positif ou négatif,

[1] *Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires,* (Journal de Crelle, t. 17).

[2] *Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie* (Monatsberichte der kön. preussischen Akademie der Wiss. zu Berlin, 1837).

[3] Oeuvres de Cauchy, I^e série, vol. 5, p. 84.

pair ou impair. Parmi les continuateurs de ces grands inventeurs nous sont connus les travaux de J. Liouville,[1] O. Schemmel,[2] de MM. Alexander Berger[3] et H. Weber.[4] Si l'on compare les résultats obtenus par ces éminents géomètres avec ce qu'on lira dans ce chapitre, on remarquera qu'il n'y a pas grande chose qui nous soit personnelle; cette partie présente en effet un caractère de compilation. Cependant certains détails que nous croyons neufs et notre manière d'exposition me paraissent mériter l'attention. D'ailleurs, nous aidant par les besoins de la théorie de Kronecker, nous avons retrouvé tout ce qui est exposé ici avant de connaître les mémoires originaux qui sont venus après le travail de Dirichlet.

1. Soit D un discriminant fondamental, positif ou négatif, Δ sa valeur absolue et observons que l'expression suivante

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]$$

a pour valeur l'unité, si $\left(\frac{D}{\nu}\right) = 1$, et s'annule dans tous les autres cas. L'expression

$$A(x, D) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]} \tag{1a}$$

est donc le produit des facteurs $x - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}$ qu'on obtient en prenant pour a tous les nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots, \Delta - 1$ qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{D}{a}\right) = 1;$$

donc

$$A(x, D) = \prod_a \left(x - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right).$$

[1] Journal de Liouville, 2e série, t. 2; 1857.

[2] *De multitudine formarum secundi gradus disquisitiones;* Vratislaviae, 1863.

[3] *Sur une application de la théorie des équations binômes à la sommation de quelques séries* (Nova Acta reg. Societatis scient. Upsaliensis, t. 13, 1886).

[4] Nachrichten der kön. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, 1893.

Représentons de l'autre côté par b tous les entiers de la dite suite qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{D}{b}\right) = -1;$$

alors la fonction

$$(1^b) \qquad B(x, D) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{D}{\nu}\right)+\left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]}$$

n'est autre chose que le produit

$$B(x, D) = \prod_b \left(x - e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}\right).$$

L'identité

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right) = \sum \left(\frac{D}{a}\right) + \sum \left(\frac{D}{b}\right)$$

prouve que le nombre des éléments a est égal à celui des éléments b, et la valeur commune de ces nombres est, en employant l'écriture de Gauss, évidemment $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$.

Les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ sont donc du degré $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$.

Les racines des équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ constituent la totalité des racines primitives d'ordre Δ de l'unité, et par conséquent, on aura

$$(2) \qquad A(x)B(x) = F(x),$$

$F(x)$ désignant le polynôme irréductible aux coefficients rationnels qui s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$. J'écrirai $F(x, \Delta)$ lorsqu'il faudra indiquer la valeur de Δ. On sait que

$$(3) \qquad F(x, \Delta) = \prod_d \left(x^{\frac{\Delta}{d}} - 1\right)^{\mu(d)},$$

le produit se rapportant à tous les diviseurs d du nombre Δ et $\mu(d)$ désignant les nombres de Moebius. Par exemple

$$F(x, 15) = \frac{(x^{15}-1)(x-1)}{(x^5-1)(x^3-1)} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$$

Des définitions (1^a) et (1^b) on tire l'équation formellement plus simple

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{D}{\nu}\right)} \tag{4}$$

d'où en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}}. \tag{5}$$

Posant, pour abréger,

$$\Phi(x) = \log \frac{A(x)}{B(x)},$$

l'équation (5) s'écrira

$$\Phi'(x) = \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}};$$

J'y suppose $|x| < 1$ et j'emploie le développement en série géométrique

$$\frac{1}{e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} - x} = \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}} x^{\mu-1},$$

d'où

$$\Phi'(x) = -\sum_{\mu=1}^{\infty} x^{\mu-1} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}}.$$

Or, D étant un discriminant fondamental, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}} = \left(\frac{D}{\mu}\right) \sqrt{D} \operatorname{sgn} D,$$

de sorte qu'en substituant, il vient

$$\Phi'(x) = -\sqrt{D} \operatorname{sgn} D \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) x^{\mu-1},$$

ou bien

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = -\sqrt{D} \operatorname{sgn} D \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) x^{\mu-1}, \qquad (|x| < 1). \tag{6}$$

Quant à la fonction $\Phi(x)$ elle-même, l'intégration donne

$$\Phi(x) = \log c - \sqrt{D}\,\mathrm{sgn}\,D \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{x^{\mu}}{\mu},$$

où il faut encore déterminer la constante c. On a évidemment

$$\log c = \log \prod e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}\left(\frac{D}{\nu}\right)},$$

et puisque

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta} = \begin{cases} 0 \text{ pour } D > 0, \\ -\frac{2}{\tau_{\Delta}} Cl(D) \text{ pour } D < 0, \end{cases}$$

on aura

$$c = \begin{cases} e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ pour } D = -3, \\ -1 \text{ pour } D = -4, \\ 1 \text{ dans d'autres cas.} \end{cases}$$

Avec cette valeur de c, on a par conséquent la formule

$$\log \frac{A(x)}{B(x)} = \log c - \sqrt{D}\,\mathrm{sgn}\,D \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{x^{\mu}}{\mu}. \qquad (|x| < 1). \tag{7}$$

Quant à la fonction $F(x)$, il suffit de se rappeler la formule

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right)}$$

pour en tirer

$$\log F(x) = \log c' - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m}}{m} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) e^{\frac{2m\nu\pi i}{\Delta}}.$$

En observant que l'on a $c' = 1$, puisque

$$F(0) = 1,$$

et que la somme

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) e^{\frac{2m\nu\pi i}{\Delta}} = -c_m \quad .$$

a pour valeur l'expression

$$\sum_{\delta} \mu(\Delta'\delta) \frac{\Delta_m}{\delta},$$

où Δ_m représente le plus grand commun diviseur des nombres m et Δ, puis Δ' signifie le quotient $\frac{\Delta}{\Delta_m}$ et δ parcourt tous les diviseurs du nombre Δ_m, on aura une série

$$\log F(x) = \sum_1^\infty \frac{c_m}{m} x^m$$

dont les coefficients sont des nombres rationnels, et en particulier les numérateurs c_m sont des nombres entiers.

Si Δ est impair, il n'admet aucun diviseur carré et il s'ensuit que $\mu(\Delta'\delta) = \mu(\Delta')\mu(\delta)$, et la formule

$$\Delta_m \sum_{\delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta} = \varphi(\Delta_m)$$

fait voir que l'on a

$$c_m = -\mu(\Delta')\varphi(\Delta_m).$$

Si, au contraire, Δ est pair, on aura $c_m = 0$ pour m impair.

Des formules

$$\log A(x) = \frac{1}{2}[\Phi(x) + \log F(x)]$$

$$= \log\sqrt{c} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_m - \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m},$$

$$\log B(x) = \frac{1}{2}[-\Phi(x) + \log F(x)]$$

$$= \log\sqrt{\frac{1}{c}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_m + \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}$$

on tire

$$A(x) = \sqrt{c}\, e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(c_m - \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}},$$

$$B(x) = \sqrt{\frac{1}{c}}\, e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(c_m + \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}}.$$

Cela étant, observons qu'une expression exponentielle

$$e^{\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots}$$

se développe en une série

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

dont les coefficients a_m s'expriment en fonction rationnelle des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ dont le rang ne dépasse pas celui de a_m.

Les développements suivant les puissances de x des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ seront alors de la forme

$$A(x) = \sqrt{c}\left[1 + (a_1 + b_1\sqrt{D})x + (a_2 + b_2\sqrt{D})x^2 + \dots\right],$$

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[1 + (a_1 - b_1\sqrt{D})x + (a_2 - b_2\sqrt{D})x^2 + \dots\right],$$

les a_ν ainsi que les b_ν étant des nombres rationnels. Mais ces fonctions-là étant des fonctions entières, les séries se réduiront à un nombre fini de termes, et il s'ensuit que les coefficients dans les polynômes $\frac{A(x)}{\sqrt{c}}$ et $B(x)\sqrt{c}$ sont des nombres algébriques de la forme $a + b\sqrt{D}$. Cela a lieu pour les coefficients de $A(x)$ et $B(x)$ elles-mêmes, si $\Delta > 4$, car alors on a $c = 1$.

Si $\Delta = 4$, on a $D = -4$, $\sqrt{D} = 2i$, $c = -1$, $\sqrt{c} = \pm i$, et les coefficients $\frac{a + b\sqrt{D}}{\sqrt{c}}$, $(a + b\sqrt{D})\sqrt{c}$ seront alors $\pm\left(2b - \frac{a}{2}\sqrt{D}\right)$, $\pm\left(-2b + \frac{a}{2}\sqrt{D}\right)$ et il est clair que la forme $a + b\sqrt{D}$ reste conservée.

La même chose a lieu dans le cas de $\Delta = 3$, $D = -\Delta$, puisque $\sqrt{c}$ est ici aussi de la forme $\alpha + \beta i\sqrt{D}$.

Donc, dans tous les cas, les coefficients des polynômes $A(x)$ et $B(x)$ appartiennent au domaine de rationalité $(1, \sqrt{D})$. Mais ils sont des sommes de produits des nombres algébriques entiers tels que $e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}$, et il faut qu'ils soient eux-mêmes des nombres algébriques entiers.

Deux nombres algébriques entiers de la forme

$$a + b\sqrt{D} \quad \text{et} \quad a - b\sqrt{D}$$

ont pour somme et pour différences $2a$ et $2b\sqrt{D}$ qui doivent aussi être

entières. Si D est impair, il faut donc que $2a = m$ et $2b = n$ soient des entiers, et on aura la forme

$$a + b\sqrt{D} = \frac{m + n\sqrt{D}}{2},$$

m et n étant deux entiers ordinaires.

En cas de D pair, on peut rendre $(2b\sqrt{D})^2 = 4b^2D$ entier en supposant $16b^2$ entier, c'est à dire en prenant $b = \frac{1}{4}n$, n étant un entier. Si celui-ci est impair, on aura en faisant $2a = m$

$$a + b\sqrt{D} = \frac{m + n\sqrt{\frac{1}{4}D}}{2}, \qquad a - b\sqrt{D} = \frac{m - n\sqrt{\frac{1}{4}D}}{2};$$

le produit de ces expressions devant être un entier ordinaire

$$\frac{1}{4}\left(m^2 - n^2\frac{D}{4}\right),$$

on a la congruence (n étant impair)

$$m^2 \equiv \frac{D}{4} \pmod 4$$

chose impossible pour un discriminant fondamental. Donc toujours les deux nombres $2a$ et $2b$ sont entiers.

Les coefficients des polynômes $2A(x)$ et $2B(x)$ étant de la forme $m \pm n\sqrt{D}$ où m et n sont des entiers ordinaires, on peut séparer les parties contenant le radical $\sqrt{D}$ et il vient

$$2A(x) = Y(x) \pm \sqrt{D}\,Z(x),$$

$$2B(x) = Y(x) \mp \sqrt{D}\,Z(x),$$

Y et Z signifiant deux polynômes aux coefficients entiers. Le double signe qui figure aux seconds membres devient déterminé, si l'on choisit le signe du terme le plus élevé dans le polynôme $Z(x)$. On convient de prendre le coefficient de la puissance de x la plus élevée dans le polynôme $Z(x)$ positif.

Des équations (1^a) et (1^b) résulte que l'on a

$$A(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right] e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \dots,$$

$$B(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right] e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \dots.$$

d'où

$$A(x) + B(x) = 2x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D^2}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \dots,$$

$$A(x) - B(x) = - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \dots.$$

La dernière expression commençant par le terme en $x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1}$ dont le coefficient est

$$- \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} = -\sqrt{D},$$

l'équation

$$A(x) - B(x) = \pm \sqrt{D} Z(x)$$

fait voir que le signe $\pm$ est $-$. On a donc en définitif

$$(8) \qquad \begin{cases} 2A(x, D) = Y(x, D) - \sqrt{D} Z(x, D), \\ 2B(x, D) = Y(x, D) + \sqrt{D} Z(x, D). \end{cases}$$

Les fonctions Y et Z sont de la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} Y(x) = 2x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} + a_1 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + a_2 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-2} + \dots, \\ Z(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + b_1 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-2} + \dots; \end{cases}$$

remarquons que le coefficient a_1 est

$$a_1 = - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D^2}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}},$$

c'est à dire qu'il est identique au coefficient de $x^{\varphi(\Delta)-1}$ dans la fonction $F(x, \Delta)$.

L'équation

$$A(x)B(x) = F(x)$$

s'écrira [1]

$$(10) \qquad Y^2(x, D) - DZ^2(x, D) = 4F(x, \Delta).$$

Cette identité caractérise complètement les fonctions Y et Z, si l'on ajoute que leurs coefficients soient rationnels, celui de la plus haute puissance en Z étant supposé positif.

Car si l'on avait une autre décomposition analogue

$$4F = Y_1^2 - DZ_1^2,$$

la fonction $Y_1 - Z_1\sqrt{D}$ s'évanouirait pour certaines racines de l'une des deux équations

$$Y \pm Z\sqrt{D} = 0.$$

Le plus grand commun diviseur des premiers membres

$$Y_1 - Z_1\sqrt{D}, \qquad Y \pm Z\sqrt{D}$$

serait un polynôme de la forme $Y_2 - Z_2\sqrt{D}$, Y_2 et Z_2 étant deux polynômes aux coefficients rationnels des degrés inférieurs à $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$. Le polynôme aux coefficients rationnels

$$(Y_2 - Z_2\sqrt{D})(Y_2 + Z_2\sqrt{D}) = Y_2^2 - DZ_2^2$$

et du degré inférieur à $\varphi(\Delta)$ s'annulant pour une racine primitive de l'unité, la fonction $F(x)$ devrait être réductible, chose impossible. Donc les polynômes Y et Z sont complètement définis par l'identité (10).

2. Les équations (8) donnent tout de suite

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = 2\sqrt{D}\,\frac{Z(x)\,Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{Y^2(x) - DZ^2(x)}$$

[1] Le procédé le plus rapide pour le calcul des coefficients des polynômes Y et Z a été donné par Legendre (*Mémoire sur la détermination des fonctions Y et Z etc.*, Mémoires de l'acad., t. 11, 1830); il repose sur ce que les sommes de puissances semblables des racines de $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ sont données immédiatement; les coefficients s'obtiennent à l'aide des formules de Newton.

ou en faisant usage de (10),

$$\frac{A'(x)}{A(x)}-\frac{B'(x)}{B(x)}=\sqrt{D}\,\frac{Z(x)Y'(x)-Y(x)Z'(x)}{2F(x)}. \tag{11}$$

On parvient à une autre représentation du premier membre, si l'on emploie le développement (6).

La série qui y figure

$$S=\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\mu}\right)x^{\mu-1}$$

peut se transformer en faisant $\mu=\rho+\Delta\nu$ ($\rho=1, 2, \ldots, \Delta$; $\nu=0, 1, 2, \ldots, \infty$); on a

$$\left(\frac{D}{\mu}\right)=\left(\frac{D}{\rho}\right)$$

et par conséquent

$$S=\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\rho}\right)x^{\rho-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}x^{\Delta\nu}=\frac{1}{1-x^{\Delta}}\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\rho}\right)x^{\rho-1}.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire la fonction entière

$$Q(x)=\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\rho}\right)x^{\rho}=Q(x, D). \tag{12}$$

Nous aurons alors

$$\frac{A'(x)}{A(x)}-\frac{B'(x)}{B(x)}=\frac{\sqrt{D}\operatorname{sgn} D}{x(x^{\Delta}-1)}\,Q(x). \tag{13}$$

En comparant avec (11) nous aurons

$$Q(x)\operatorname{sgn} D=\frac{1}{2}\,x\,\frac{x^{\Delta}-1}{F(x)}\,[Z(x)Y'(x)-Y(x)Z'(x)]. \tag{14}$$

Représentons maintenant par Δ_ν tous les diviseurs du nombre Δ plus petits que Δ, y compris l'unité, et formons le produit [1]

$$\prod_{\nu}F(x, \Delta_\nu)$$

[1] Remarquons qu'il faut prendre, p. ex.

$F(x, 1)=x-1,\qquad F(x, 2)=x+1,\qquad F(x, 4)=x^2+1,$ etc.

de tous les polynômes $F(x, \Delta_\nu)$ correspondants. Alors le quotient

$$\frac{x^\Delta - 1}{F(x)}$$

aura pour valeur $\Pi F(x, \Delta_\nu)$ et l'équation (14) s'écrira comme il suit

$$(14^*) \qquad Q(x)\operatorname{sgn} D = \frac{1}{2} x[Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)] \prod_\nu F(x, \Delta_\nu).$$

Étant connues les fonctions $F(x)$ et $Q(x)$, on pourra caractériser les polynômes Y et Z d'une manière purement algébrique par une congruence que nous allons établir.

J'observe d'abord que pour les valeurs $x = e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}$ où ν est premier avec Δ, la quantité $Q^2(x)$ se réduit à D, de sorte que le polynôme $Q^2(x) - D$ est divisible par $F(x)$. Le quotient ayant de même les coefficients entiers, on aura la congruence

$$(15) \qquad Q^2(x) \equiv D \ [\mathrm{mod}\ F(x)].$$

Cela étant, j'observe que pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$ on a

$$Q(x) = \sqrt{D}, \qquad Y(x) - \sqrt{D}\, Z(x) = 0,$$

de sorte que la fonction entière aux coefficients rationnels

$$Y(x) - Q(x)Z(x)$$

s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$; elle doit donc admettre le diviseur irréductible $F(x)$, d'où la congruence

$$(16) \qquad Y(x) \equiv Q(x)Z(x) \ [\mathrm{mod}\ F(x)].$$

Pour prouver que cette congruence à deux inconnues algébriques Y et Z n'admet qu'une seule solution dont les développements soient de la forme (9), élevons au carré les deux membres et faisons usage de (15); on aura

$$Y^2 \equiv DZ^2 \ [\mathrm{mod}\ F(x)].$$

La fonction entière

$$\frac{Y^2 - DZ^2}{F(x)}$$

étant, d'après (9), du degré zéro, elle est une constante qui n'est autre chose que le nombre 4; on a donc

$$Y^2 - DZ^2 = 4F,$$

identité dont on sait qu'elle est caractéristique pour les fonctions Y et Z.

3. Revenons sur l'équation (14*). Le produit qui y figure

$$\Pi F(x, \Delta_\nu)$$

contient le facteur $F(x, 1) = x - 1$, et le quotient que j'appelle $G(x)$ ne s'annule plus pour $x = 1$. On aura

$$G(x) = \frac{x^\Delta - 1}{(x-1)F(x)}, \tag{a}$$

$$Q(x)\operatorname{sgn} D = \frac{1}{2}x(x-1)G(x)[Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)]. \tag{b}$$

En différentiant et prenant $x = 1$, il vient

$$Q'(1)\operatorname{sgn} D = G(1)\frac{ZY' - YZ'}{2},$$

en mettant pour un moment $Y^{(a)}$ et $Z^{(a)}$ au lieu de $Y^{(a)}(1)$ et $Z^{(a)}(1)$. L'équation (a) donne ensuite

$$G(1) = \frac{\Delta}{F(1)},$$

et nous savons que $F(1) = 1$ pour Δ composé, mais que $F(1) = \Delta$ pour Δ premier ou puissance d'un nombre premier. Observant que $\Delta \operatorname{sgn} D = D$, nous aurons donc

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\rho}\right)\rho = D\frac{ZY' - YZ'}{2F(1)}.$$

Dans le cas de $D > 0$ le premier membre s'évanouit et nous aurons

$$ZY' - YZ' = 0.$$

Nous verrons plus tard que, pour D positif, les deux quantités $Y(1)$ et $Z(1)$ sont différentes de zéro, de sorte qu'il vient

$$\frac{Y(1)}{Z(1)} = \frac{Y'(1)}{Z'(1)}. \quad (D > 0). \tag{17}$$

Soit en second lieu $D = -\Delta$ un discriminant négatif; on a comme on sait

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\rho = -\frac{2\Delta}{\tau}Cl(-\Delta),$$

ensuite la relation

$$Y^2 + \Delta Z^2 = 4F, \qquad (x = 1),$$

fait connaître l'une des deux quantités Y et Z.

Si le nombre Δ est composé et plus grand que huit on a $F = 1$, et par conséquent $Z = 0$. On a donc

(c) $$Z(1, -\Delta) = 0, \qquad Y(1, -\Delta) = \pm 2 \quad (\Delta \text{ composé } > 8).$$

et il s'ensuit que

(d) $$-Y(1, -\Delta)Z'(1, -\Delta) = 2Cl(-\Delta), \quad (\Delta \text{ composé } > 8).$$

Cette équation se simplifiera plus tard, lorsque nous aurons déterminé le signe de la quantité $Y(1)$. Dans le cas de $\Delta = 8$ on a

$$F(1) = 2, \qquad Y(1) = 0, \qquad Z(1) = 1, \qquad Y'(1) = 4,$$

d'où il suit

$$Cl(-8) = \frac{Z(1)\,Y'(1)}{4} = 1.$$

Pour $\Delta = 4$ on a de même

$$F(1) = 2, \quad \text{mais} \quad Z'(x) = 0, \qquad Y'(x) = 2,$$

et il vient

$$Z(1)\,Y'(1) = 4\frac{2}{\tau}Cl(-4) = 2.$$

Si en second lieu Δ est premier, on a $F(1) = \Delta$ et nous aurons, pour $x = 1$,

$$Y^2 + \Delta Z^2 = 4\Delta;$$

cela exige que Y admet le facteur Δ, de sorte qu'on aura $Y = \Delta y$; il vient

$$Z^2 + \Delta y^2 = 4,$$

de sorte que pour $\Delta > 3$, on aura $y = 0$, $Z = \pm 2$.

Par conséquent, ces formules

(c′) $$Y(1, -\Delta) = 0, \qquad Z(1, -\Delta) = \pm 2, \quad (\Delta \text{ premier} > 3)$$

donnent

(d′) $$Z(1, -\Delta)\, Y'(1, -\Delta) = 2\Delta\, Cl(-\Delta).$$

Nous parviendrons plus tard à la détermination du signe de $Z(1)$.

4. Quant aux propriétés des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ remarquons d'abord que les définitions donnent

$$A(0) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod_a e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}, \qquad B(0) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}$$

$$\left(a, b = 1, 2, 3, \ldots, \Delta - 1;\ \left(\frac{D}{a}\right) = 1,\ \left(\frac{D}{b}\right) = -1\right),$$

d'où l'on tire aisément, pour $D > 0$, les résultats $A(0) = B(0) = 1$, ou bien

(18ᵃ) $$Y(0) = 2, \qquad Z(0) = 0, \quad \text{pour} \quad D > 0.$$

Dans le cas de discriminant négatif on trouve d'abord

$$\frac{2}{\Delta}\Sigma a = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta), \qquad \frac{2}{\Delta}\Sigma b = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) + \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta);$$

on aura donc, pour $\Delta > 4$, $D = -\Delta$:

$$A(0) = B(0) = (-1)^{Cl(-\Delta)},$$

mais si $\Delta = 3$ ou 4 on aura respectivement $\tau = 6$ et $\tau = 4$, de sorte qu'il vient comme cela se voit d'ailleurs directement:

$$\text{pour } D = -3: \qquad A(0) = e^{-\frac{\pi i}{3}}, \qquad B(0) = e^{\frac{\pi i}{3}},$$

$$\text{pour } D = -4: \qquad A(0) = -i, \qquad B(0) = i.$$

Il s'ensuit, en résumé, les formules suivantes:

(18ᵇ) $$\begin{cases} Y(0) = 2(-1)^{Cl(-\Delta)}, & Z(0) = 0 \text{ pour } D = -\Delta, \quad \Delta > 4, \\ Y(0) = Z(0) = 1 & \text{pour } D = -3, \\ Y(0) = 0, & Z(0) = 1 \text{ pour } D = -4. \end{cases}$$

En observant que, pour $\Delta > 8$, le nombre $Cl(-\Delta)$ est impair ou pair selon que Δ est premier ou composé, ce dernier résultat peut s'énoncer comme il suit:

$$(18^c) \qquad Y(0) = \begin{cases} -2, \text{ pour } \Delta \text{ premier et pour } \Delta = 8, \\ 2, \text{ pour } \Delta \text{ composé } > 8; \end{cases}$$

$$Z(0) = 0 \text{ pour } \Delta > 4; \qquad D = -\Delta.$$

Dans la formule (1^a) changeons x en $\frac{1}{x}$; nous aurons

$$A\left(\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod_a e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} \prod_a \left(x - e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right).$$

Dans le cas de D positif, on a comme nous venons de le remarquer

$$(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} = 1,$$

puis les quantités

$$e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}} = e^{\frac{2\pi i(\Delta - a)}{\Delta}}$$

reconstituent, dans leur ensemble, les quantités $e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}$; le second membre de notre formule sera donc

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}} A(x),$$

ce qui donne

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} A\left(\frac{1}{x}\right) = A(x),$$

ce qui donne, pour un discriminant fondamental positif D, les relations connues

$$(19^a) \qquad x^{\frac{1}{2}\varphi(D)}\, Y\left(\frac{1}{x}, D\right) = Y(x, D), \qquad x^{\frac{1}{2}\varphi(D)}\, Z\left(\frac{1}{x}, D\right) = Z(x, D).$$

Dans le cas d'un discriminant négatif $D = -\Delta$ où $\Delta > 4$, nous savons que

$$(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod_a e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} = (-1)^{Cl(-\Delta)},$$

puis les quantités $e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}} = e^{\frac{2\pi i(\Delta - a)}{\Delta}}$ reproduisent, dans leur ensemble, les quantités $e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}$, et on aura donc

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} A\left(\frac{1}{x}\right) = \quad (-1)^{Cl(-\Delta)} B(x),$$

d'où il suit

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Y\left(\frac{1}{x}\right) = \quad (-1)^{Cl(-\Delta)} Y(x),$$

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Z\left(\frac{1}{x}\right) = -(-1)^{Cl(-\Delta)} Z(x).$$

ou bien

$$(19^b) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Y\left(\frac{1}{x}, -\Delta\right) &= \quad \varepsilon Y(x, -\Delta), \\ x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Z\left(\frac{1}{x}, -\Delta\right) &= -\varepsilon Z(x, -\Delta), \qquad \Delta > 4, \end{aligned} \right.$$

où $\varepsilon = 1$, si Δ est un nombre composé supérieur à 8, et $\varepsilon = -1$, si Δ est un nombre premier ou si $\Delta = 8$.

Dans les équations (19^a) et (19^b) je pose $x = i$, en excluant les cas particuliers $D = -3, -4, -8$.

Si le discriminant $D = -\Delta$ est négatif et composé, on a alors

$$\frac{1}{2}\varphi(\Delta) \equiv 0 \pmod 4,$$

le discriminant étant fondamental, bien entendu.

Si, en second lieu, le discriminant D est positif et composé, on a, en général,

$$\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 0 \pmod 4,$$

deux exceptions étant à signaler. D'abord pour $D = 4P$, P étant premier, naturellement de la forme $4k+3$, puis si $D = p_1 p_2$, les deux nombres premiers p_1 et p_2 ayant la forme $4k+3$. Dans ces cas exceptionnels on a

$$\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 2 \pmod 4.$$

On a par conséquent les faits suivants à remarquer:

Si D est un discriminant fondamental positif qui n'est ni premier ni le quadruple d'un nombre premier, ni le produit de deux nombres premiers de la forme $4k+3$, on aura

$$Y(-i\,,D) = Y(i\,,D), \qquad Z(-i\,,D) = Z(i\,,D).$$

Les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ seront donc *réelles.*

Dans les cas de $D = 4p$, $D = p_1 p_2 (p \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv 3 \pmod 4)$ on a, au contraire,

$$Y(-i) = -Y(i), \qquad Z(-i) = -Z(i),$$

d'où il suit que les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ sont ou purement imaginaires ou nulles, en partie.

Pour un discriminant négatif composé différent de -4 et -8, on a, d'après (19^b)

$$Y(-i) = Y(i), \qquad Z(-i) = -Z(i),$$

donc $Y(i)$ est réel et $Z(i)$ purement imaginaire ou nul.

Passons aux discriminants premiers.

Si $D > 0$ est premier, on aura

$$Y(-i) = (-1)^{\frac{D-1}{4}}\,Y(i), \qquad Z(-i) = (-1)^{\frac{D-1}{4}}\,Z(i),$$

d'où il suit que $Y(i)$ et $Z(i)$ seront réelles ou purement imaginaires selon que $D \equiv 1 \pmod 8$ ou $D \equiv 5 \pmod 8$; les cas des valeurs égales à zéro étant sous-entendus comme des valeurs réelles ou imaginaires.

Si le discriminant est négatif et premier $-\Delta$, le nombre

$$\frac{1}{2}\varphi(\Delta) = \frac{1}{2}(\Delta - 1)$$

est impair, et les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ seront essentiellement complexes; mais on trouve aisément

$$Y(i) = \left(1 + (-1)^{\frac{\Delta+1}{4}} i\right) M, \qquad Z(i) = \left(1 - (-1)^{\frac{\Delta+1}{4}} i\right) N,$$

M et N étant des entiers réels.

5. Passons à la détermination des quantités $Y(1)$ et $Z(1)$ pour un discriminant négatif; nous savons que, si Δ est composé et plus grand que 8, on a $Z(1)=0$, $Y(1)=\pm 2$; il ne reste qu'à déterminer le signe de cette dernière quantité qui est égale à $2A(1)$. La définition (1^a) donne immédiatement

$$A(1)=\prod_a\left(1-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right),$$

et si l'on remplace la quantité $1-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}$ par sa valeur $-2ie^{\frac{a\pi i}{\Delta}}\sin\frac{a\pi}{\Delta}$, nous aurons

$$\text{(a)}\qquad A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a}\prod_a\left(2\sin\frac{a\pi}{\Delta}\right).$$

La quantité réelle et positive

$$\prod_a\left(2\sin\frac{a\pi}{\Delta}\right)$$

représente la valeur absolue de $A(1)$ et sera, par conséquent, égale à un, si Δ est composé. Il s'ensuit

$$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a}.$$

Or nous savons que (puisque ici $\tau=2$)

$$\frac{1}{\Delta}\Sigma a=\frac{1}{4}\varphi(\Delta)-\frac{1}{2}Cl(-\Delta),$$

donc

$$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta)-\frac{\pi i}{2}Cl(-\Delta)},$$

ou bien, $\frac{1}{2}Cl(-\Delta)$ étant un entier pour le discriminant composé,

$$A(1)=(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)}.$$

Supposons en second lieu Δ premier. Dans ce cas on a

$$Y(1)=0,\qquad Z(1)=+2,\qquad A(1)=-\frac{i\sqrt{\Delta}}{2}Z(1).$$

La valeur absolue de la quantité $A(1)$ sera alors $\sqrt{\Delta}$ et la formule (a) donne

$$\frac{A(1)}{|A(1)|} = (-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a};$$

cette quantité étant égale à $-\frac{1}{2} iZ(1)$, on conclut

$$Z(1) = 2(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a},$$

ou bien

$$Z(1) = 2(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta)-\frac{\pi i}{2}Cl(-\Delta)},$$

ce qui se simplifie comme il suit

$$Z(1) = 2(-1)^{\frac{Cl(-\Delta)-1}{2}}.$$

On a donc les résultats suivants:

$$(20^{a}) \qquad Z(1, -\Delta) = 2(-1)^{\frac{1}{2}[Cl(-\Delta)-1]}, \qquad Y(1, -\Delta) = 0,$$
$$(\Delta \text{ premier} > 3),$$

$$(20^{b}) \qquad Y(1, -\Delta) = 2(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)}, \qquad Z(1, -\Delta) = 0,$$
$$(\Delta \text{ composé} > 8).$$

En substituant ces valeurs dans les formules (d) et (d′) du n° 3, nous aurons ces formes définitives des résultats y indiqués

$$(21^{a}) \qquad Y'(1) = (-1)^{\frac{1}{2}[Cl(-\Delta)-1]} \Delta\, Cl(-\Delta); \quad (\Delta \text{ premier} > 3),$$

$$(21^{b}) \qquad Z'(1) = -(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)} Cl(-\Delta); \quad (\Delta \text{ composé} > 8).$$

En représentant par H le nombre impair $Cl(-\Delta)$ dans le cas de Δ premier, nous aurons

$$\Delta \equiv -1, \qquad (-1)^{\frac{1}{2}(H-1)} H \equiv 1 \pmod 4,$$

et par conséquent

$$(21^{c}) \qquad Y'(1) \equiv -1 \pmod 4, \qquad (\Delta \text{ premier} > 3).$$

Si Δ n'est aucune des valeurs exceptés, $3, 4, 8$, on aura toujours $F(-1) = 1$, ce qui donne des résultats plus simples pour la valeur particulière $x = -1$. L'équation

$$Y^2(-1) + \Delta Z^2(-1) = 4$$

donne

$$Z(-1) = 0, \qquad Y(-1) = \pm 2 = 2A(-1).$$

La formule immédiate

$$A(-1) = \prod_a \left(-1 - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right)$$

donne d'abord

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a} \prod_a \left(2\cos\frac{a\pi}{\Delta}\right);$$

la valeur absolue de cette quantité devant être un, on conclut, en substituant la valeur connue de Σa,

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta) - \frac{\pi i}{2} Cl(-\Delta)} (-1)^N,$$

N désignant le nombre des éléments a plus grands que $\frac{1}{2}\Delta$. Évidemment

$$2N = \sum_{\nu=\left[\frac{\Delta}{2}\right]+1}^{\Delta-1}{}^{*} \left(1 + \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\right),$$

ν parcourant des nombres premiers avec Δ; il s'ensuit

$$2N = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) + \sum_{\nu=\left[\frac{\Delta}{2}\right]+1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$$

ou d'après une formule connue,

$$N = \frac{1}{4}\varphi(\Delta) - \frac{1}{2}\left[2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] Cl(-\Delta).$$

On a donc

$$(-1)^N = e^{-\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta) + \frac{\pi i}{2}\left[2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] Cl(-\Delta)}$$

et la formule obtenue plus haut devient

$$\text{(b)} \qquad A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{\tau}\left[1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] Cl(-\Delta)}.$$

Si Δ est premier et plus grand que 3, on a $\tau = 2$ et il vient

$$A(-1) = -(-1)^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)} = -\left(\frac{2}{\Delta}\right).$$

Si Δ est composé et supérieur à 8, le nombre des classes est pair et nous aurons

$$A(-1) = 1;$$

une exception pourra se présenter pour les discriminants pairs, car alors $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0$, et la formule (b) donnera

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)}, \qquad (\Delta \text{ pair } > 8).$$

Or de la théorie de la repartition des classes en genres on sait que le nombre $\frac{1}{2}Cl(-\Delta)$ ne sera impair que si le discriminant a la forme $-4m$ ou $-8m$, m étant un nombre premier. Dans le cas de $\Delta = 4m$, le nombre premier impair m est un discriminant positif, et la formule (45) du chapitre II donne

$$\frac{1}{2}Cl(-4m) = \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{4}m\right]} \left(\frac{m}{a}\right);$$

le second membre se compose de $\frac{m-1}{4}$ unités, positives ou négatives, et par conséquent

$$\frac{1}{2}Cl(-4m) \equiv \frac{m-1}{4} \pmod 2,$$

pourvu que m soit premier. On vérifie aisément que

$$(-1)^{\frac{m-1}{4}} = \left(\frac{2}{m}\right),$$

et le résultat obtenu plus haut devient

$$A(-1, -4m) = \left(\frac{2}{m}\right), \quad (m \text{ premier}).$$

Soit maintenant $\Delta = 8m$, les deux cas $m \equiv 1$ et $m \equiv 3 \pmod 4$ sont possibles et il faut les distinguer.

Pour $m \equiv 1 \pmod 4$ la formule (47) du chap. II donne

$$\frac{1}{2} Cl(-8m) = \sum_{1}^{\left[\frac{1}{8} m\right]} \left(\frac{m}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8} m\right]+1}^{\left[\frac{1}{2} m\right]} \left(\frac{m}{\nu}\right),$$

et par conséquent

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{2} Cl(-8m) \equiv \left[\frac{m}{8}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] - \left[\frac{3m}{8}\right] \pmod 2.$$

Dans le deuxième cas où $m \equiv 3 \pmod 4$ la formule (42) du même chapitre donne

$$\frac{1}{2} Cl(-8m) = \sum_{\left[\frac{1}{8} m\right]+1}^{\left[\frac{3}{8} m\right]} \left(\frac{-m}{\nu}\right)$$

d'où il suit

$$\text{(d)} \qquad \frac{1}{2} Cl(-8m) \equiv \left[\frac{3m}{8}\right] - \left[\frac{m}{8}\right] \pmod 2.$$

Au moyen de ces résultats (c) et (d) on trouve le tableau suivant (m étant toujours supposé premier) des congruences au module deux,

$$\frac{1}{2} Cl(-8m) \equiv \begin{cases} 0, & \text{pour } m = 8k+1, \\ 1, & \text{pour } m = 8k+5, \\ 1, & \text{pour } m = 8k+3, \\ 0, & \text{pour } m = 8k+7, \end{cases}$$

ce qui se résume par l'équation

$$(-1)^{\frac{1}{2} Cl(-8m)} = \left(\frac{2}{m}\right), \quad (m \text{ premier}).$$

Nous avons par conséquent le résultat suivant:

Pour le discriminant fondamental négatif $-\Delta$, différent de -3, -4, -8, ont lieu des formules

$$
(22)\qquad
\begin{cases}
Z(-1\,,-\Delta)=0, \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\,Y(-1\,,-\Delta)=
\begin{cases}
-\left(\dfrac{2}{\Delta}\right), & \Delta \text{ premier,} \\[2ex]
\left(\dfrac{2}{m}\right), & \Delta = 4m \text{ ou } 8m,\ m \text{ premier,} \\[2ex]
1\,, & \Delta \text{ composé, des autres formes.}
\end{cases}
\end{cases}
$$

6. Une question des plus intéressantes serait d'obtenir des relations entre les fonctions Y et Z provenant des discriminants différents. Nous allons montrer comment ces fonctions peuvent s'obtenir pour un discriminant produit, si on les connait pour les discriminants facteurs.

Soient à cet effet D_1 et D_2 deux discriminants fondamentaux premiers entre eux, Δ_1 et Δ_2 leur valeurs absolues; le produit $D_1 D_2$ sera, lui aussi, un discriminant fondamental et l'on aura

$$
A(x\,,D_1D_2)=\prod_{\nu=1}^{\Delta_1\Delta_2}\left(x-e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_1\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1D_2}{\nu}\right)+\left(\frac{D_1D_2}{\nu}\right)^2\right]}.
$$

Le nombre $a=\Delta_1+\Delta_2$ est premier avec $\Delta_1\Delta_2$, et on pourra donc remplacer ν par $a\nu$; il vient de la sorte

$$
A(x\,,D_1D_2)=\prod_{\nu=1}^{\Delta_1\Delta_2}\left(x-e^{\frac{2a\nu\pi i}{\Delta_1\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1D_2}{a\nu}\right)+\left(\frac{D_1D_2}{a\nu}\right)^2\right]}.
$$

L'un des deux discriminants, p. ex. D_1, sera toujours impair; on aura alors

$$
\left(\frac{D_1}{\Delta_2}\right)=\left(\frac{\Delta_2}{D_1}\right)=\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right),
$$

et l'expression

$$
\left(\frac{D_1D_2}{a}\right)=\left(\frac{D_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1+\Delta_2}\right)=\left(\frac{D_1}{\Delta_2}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1}\right),
$$

sera égale à la suivante

$$
\left(\frac{D_1D_2}{a}\right)=\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1}\right)=\left(\frac{\Delta_2^2\,\mathrm{sgn}\,D_2}{\Delta_1}\right)=\left(\frac{\mathrm{sgn}\,D_2}{\Delta_1}\right),
$$

ce qu'on peut mettre sous la forme suivante, symétrique en D_1 et D_2,

$$\left(\frac{D_1 D_2}{a}\right) = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D_1}{2}\,\frac{1-\operatorname{sgn} D_2}{2}} = \varepsilon .$$

A cause de l'identité

$$\frac{a}{\Delta_1 \Delta_2} = \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2}$$

la dernière expression de $A(x, D_1 D_2)$ devient

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\nu=1}^{\Delta_1\Delta_2}\left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right)^2\right]}.$$

Posons $\nu = \rho + \mu\Delta_1$ $(\rho = 1, 2, \ldots, \Delta_1;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \Delta_2 - 1)$, il vient

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1}\prod_{\mu=0}^{\Delta_2-1}\left(x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\pi i}{\Delta_2}(\rho+\mu\Delta_1)}\right)^{\sigma_{\rho,\mu}}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$2\sigma_{\rho,\mu} = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\rho+\mu\Delta_1}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\rho+\mu\Delta_1}\right).$$

Laissant ρ constant, effectuons la multiplication relative à μ; la quantité $\rho + \mu\Delta_1$ parcourt le système complet de restes pour le module Δ_2, et nous aurons

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1}\prod_{\nu=1}^{\Delta_2}\left(x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right)\right]}.$$

Mettant la différence qui figure au facteur sous la forme

$$x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}} = e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}}\left(xe^{-\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right),$$

on obtient

$$A(x, D_1 D_2) = e^{\varsigma(\Delta_2)\frac{\pi i}{\Delta_1}\sum_{\rho}\rho\left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)}\prod_{\rho}\prod_{\nu}\left(xe^{-\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\sigma'}$$

où

$$2\sigma' = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right).$$

J'observe que la somme

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta_1} \rho \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)$$

a pour valeur $\frac{1}{2}\Delta_1 \varphi(\Delta_1)$, puis je change ρ en $\Delta_1 - \rho$; la quantité σ' change en σ'', où

$$2\sigma'' = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) \operatorname{sgn} D_1 + \left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right),$$

et nous aurons

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1 - 1} \prod_{\nu=1}^{\Delta_2 - 1} \left(x e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right).$$

Dans le deuxième membre, les facteurs où $\left(\frac{D_1}{\rho}\right) = 0$ peuvent être supprimés; les autres peuvent être rangés en deux groupes, celui des nombres $\rho = \alpha$ et le groupe des nombres $\rho = \beta$; on désigne par α et β les nombres de la suite $1, 2, \ldots, \Delta_1 - 1$ qui satisfont aux conditions respectives

$$(23) \qquad \left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = \varepsilon \operatorname{sgn} D_1, \qquad \left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -\varepsilon \operatorname{sgn} D_1, \qquad \begin{pmatrix} 0 < \alpha < \Delta_1 \\ 0 < \beta < \Delta_1 \end{pmatrix};$$

à ces nombres α et β correspondent respectivement les valeurs suivantes du symbole σ''

$$\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right), \quad -\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right).$$

En posant $\rho = \alpha$, le produit partiel correspondant

$$\prod_1^{\Delta_2} \left(x e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right)\right]}$$

n'est autre chose que la fonction

$$A\left(x e^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right);$$

il serait égal à

$$B\left(x e^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

si l'on prenait $\rho = \beta$. Cela permet d'écrire notre résultat sous la forme suivante

$$(23^*) \qquad A(x, D_1 D_2) = \prod_{\alpha} A\left(x e^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right) \prod_{\beta} B\left(x e^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

où les indices α et β sont définis par les conditions (23), ε désignant l'unité

$$(23^{a}) \qquad \varepsilon = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D_1}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn} D_2}{2}}.$$

On trouve de la même manière

$$(\overline{23^*}) \qquad B(x, D_1 D_2) = \prod_{\alpha} B\left(x e^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right) \prod_{\beta} A\left(x e^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right).$$

Ces deux formules (23^*) et $(\overline{23^*})$ résolvent le problème proposé; on peut s'en servir pour ramener tous les cas à celui des discriminants impairs.

Prenons $D_2 = -\Delta$, $D_1 = -4$, $-\Delta$ étant un discriminant fondamental négatif impair; ici $\varepsilon = -1$, $\operatorname{sgn} D_1 = -1$, et les conditions (23) donnent $\alpha = 1$, $\beta = 3$. On aura

$$(24) \qquad \begin{cases} A(x, 4\Delta) = A(ix, -\Delta) B(-ix, -\Delta), \\ B(x, 4\Delta) = A(-ix, -\Delta) B(ix, -\Delta). \end{cases}$$

Soit ensuite D un discriminant fondamental positif impair, posons $D_2 = D$, $D_1 = -4$; on a $\varepsilon = 1$, et les conditions (26)

$$\left(\frac{-4}{\alpha}\right) = -1, \qquad \left(\frac{-4}{\beta}\right) = 1$$

donnent $\alpha = 3$, $\beta = 1$; nous aurons

$$(25) \qquad \begin{cases} A(x, -4D) = A(-ix, D) B(ix, D), \\ B(x, -4D) = A(ix, D) B(-ix, D). \end{cases}$$

Soit maintenant, $D_2 = D$ étant toujours positif impair, $D_1 = 8$; on a $\varepsilon = 1$, puis

$$\left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = -1, \qquad \left(\frac{D_1}{\beta}\right) = 1,$$

d'où $\alpha = 1, 7$ et $\beta = 3, 5$; en employant l'écriture

$$j = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

on a les relations

$$(26)\qquad \begin{cases} A(x, 8D) = A(jx, D)A(j^{-1}x, D)B(j^3x, D)B(j^{-3}x, D), \\ B(x, 8D) = B(jx, D)B(j^{-1}x, D)A(j^3x, D)A(j^{-3}x, D), \end{cases}$$

et puis, en prenant $D_1 = -8$, on trouve

$$(27)\qquad \begin{cases} A(x, -8D) = A(j^{-1}x, D)A(j^{-3}x, D)B(jx, D)B(j^3x, D), \\ B(x, -8D) = B(j^{-1}x, D)B(j^{-3}x, D)A(jx, D)A(j^3x, D). \end{cases}$$

Si l'on fait $D_2 = -\Delta$, $D_1 = -8$, on a $\varepsilon = -1$, $\operatorname{sgn} D_1 = -1$, $\left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = 1$, $\left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -1$; $\alpha = 1, 3$; $\beta = 5, 7$; les résultats sont

$$(28)\qquad \begin{cases} A(x, 8\Delta) = A(jx, -\Delta)A(j^3x, -\Delta)B(j^{-1}x, -\Delta)B(j^{-3}x, -\Delta), \\ B(x, 8\Delta) = B(jx, -\Delta)B(j^3x, -\Delta)A(j^{-1}x, -\Delta)A(j^{-3}x, -\Delta), \end{cases}$$

enfin on trouve

$$(26^{\text{a}})\quad A(x, -8\Delta) = A(jx, -\Delta)A(j^{-1}x, -\Delta)B(j^3x, -\Delta)B(j^{-3}x, -\Delta)$$

et une expression analogue pour $B(x, -8\Delta)$.

Cette formule (26^{a}) se trouve contenue dans (26) si l'on y écrit $D = -\Delta$; cette formule-là subsiste donc pour tous les discriminants impairs D, positifs ou négatifs.

Nous verrons que la détermination du nombre des classes d'un discriminant positif exige le calcul du quotient $B(1):A(1)$. La formule (23^*) ramène le calcul de cette quantité à la détermination des quantités de la forme

$$A\left(e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

sans avoir besoin de l'expression explicite des polynômes $Y(x, D_1D_2)$ et $Z(x, D_1D_2)$; le calcul des dites quantités est relativement facile. Mais on

peut mettre le problème qui nous occupe en relation avec la théorie de l'élimination.

Posons, pour abréger

$$A_1 = A(x, D_1), \qquad A_2 = A(x, D_2), \text{ etc.},$$

et représentons par $R(A_1, A_2)$ le résultant des polynômes A_1 et A_2. Cela étant, supposons $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, de sorte que les conditions (23) deviennent

$$\left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = 1, \qquad \left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -1;$$

les quantités $e^{\frac{2\alpha\pi i}{D_1}}$ sont racines de l'équation $A_1(x) = 0$, les $e^{\frac{2\beta\pi i}{D_1}}$ celles de $B_1(x) = 0$; or on a

$$R(A_1, A_2) = \prod_\alpha A\left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{D_1}}, D_2\right),$$

$$R(B_1, B_2) = \prod_\beta B\left(e^{\frac{2\beta\pi i}{D_1}}, D_2\right),$$

et l'équation (23*) permet de conclure

$$(29^a) \qquad A(1, D_1 D_2) = R(A_1, A_2) R(B_1, B_2).$$

On trouverait de même

$$(29^b) \qquad B(1, D_1 D_2) = R(A_1, B_2) R(A_2, B_1),$$

et les mêmes formules s'obtiendraient en supposant $D_1 = -\Delta_1$, $D_2 = -\Delta_2$.

Ces formules, intéressantes en théorie, ne contribuent rien à simplifier la pratique.

7. Reprenons l'équation (7) pour D positif, en supprimant le terme nul $\log c$:

$$(a) \qquad \log \frac{B(x)}{A(x)} = \sqrt{D} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{x^\mu}{\mu}.$$

En passant à la limite pour $x = 1$, le second membre devient

$$\sqrt{D} \sum_1^\infty \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{1}{\mu} = Cl(D) \log E(D);$$

donc nous aurons la formule connue

$$(30) \qquad Cl(D)\log E(D) = \log\frac{B(1)}{A(1)},$$

ou bien

$$(30^*) \qquad Cl(D)\log E(D) = \log\frac{Y(1\,,\,D) + \sqrt{D}\,Z(1\,,\,D)}{Y(1\,,\,D) - \sqrt{D}\,Z(1\,,\,D)}.$$

Ce résultat ramène le calcul du nombre des classes à la détermination de l'exposant H dans l'équation

$$\frac{Y+\sqrt{D}\,Z}{Y-\sqrt{D}\,Z} = \left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^H, \qquad \begin{pmatrix} Y = Y(1\,,\,D) \text{ et} \\ Z = Z(1\,,\,D) \end{pmatrix};$$

c'est donc un résultat d'une très haute importance théorique; car il n'y reste aucune trace de l'origine transcendante qui la fait naître, tous les nombres qui y figurent pouvant s'obtenir par des procédés purement algébriques.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème connu que le nombre des classes, aussi pour les discriminants fondamentaux positifs, est impair, si le discriminant est un nombre premier, et qu'il est pair, si le discriminant est un nombre composé plus grand que 8.

Si le discriminant est un nombre premier, on a $F(1) = D$, et puis $Y^2 - DZ^2 = 4D$, en posant pour abréger, $Y = Y(1)$, $Z = Z(1)$. On voit que Y est nécessairement divisible par D, et en faisant $Y = Dz$, $Z = y$, il vient l'équation

$$y^2 - Dz^2 = -4;$$

ces nombres y et z ne satisfont pas à l'équation de Fermat, d'où il suit que le quotient

$$\log\frac{|y| + |z|\sqrt{D}}{2} : \log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}$$

n'est pas un entier. Or on a

$$Cl(D)\log E(D) = 2\log\frac{|Y + Z\sqrt{D}|}{\sqrt{4F(1)}} = 2\log\frac{|Y+Z\sqrt{D}|}{2\sqrt{D}},$$

d'où il suit que Y et Z sont du même signe et que

$$\frac{1}{2} Cl(D) = \log \frac{\left| y + z\sqrt{D} \right|}{2} : \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2};$$

le second membre n'étant pas entier, il faut que $Cl(D)$ soit impair.

Si au contraire D est composé et plus grand que 8, on a $F(1) = 1$ et par conséquent

$$Y^2 - DZ^2 = 4,$$

d'où il suit que le quotient

$$\log \left| \frac{Y + Z\sqrt{D}}{2} \right| : \log E(D) = \mu$$

est un entier; par conséquent le nombre des classes

$$Cl(D) = 2 \log \left| \frac{Y + Z\sqrt{D}}{2} \right| : \log E(D) = 2\mu$$

sera pair.

Pour $D = 8$ on trouve aisément que le nombre des classes est égal à un.

8. Dans l'équation (7) pour $D = D_1$ qui s'écrit

$$\sqrt{D_1} \operatorname{sgn} D_1 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D_1}{\mu}\right) \frac{x^\mu}{\mu} = \log \frac{Y_1(x) + \sqrt{D_1} Z_1(x)}{Y_1(x) - \sqrt{D_1} Z_1(x)} + \log c,$$

où l'on emploie la notation

$$Y_1(x) = Y(x, D_1), \qquad Z_1(x) = Z(x, D_1),$$

posons

$$xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}} \text{ au lieu de } x,$$

Δ_2 désignant la valeur absolue d'un discriminant fondamental D_2; multiplions les deux membres de l'équation ainsi obtenue par $\left(\frac{D_2}{h}\right)$ et ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, 3, \ldots, \Delta_2 - 1$; il vient

$$(31) \qquad \sqrt{D_1}\sqrt{D_2} \operatorname{sgn} D_1 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D_1 D_2}{\mu}\right) \frac{x^\mu}{\mu} = \sum_{h=1}^{\Delta_2 - 1} \left(\frac{D_2}{h}\right) \log \frac{Y_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1} Z_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1} Z_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}.$$

Cette formule donnerait à peine quelque chose d'utile, si le produit $D_1 D_2$ était négatif, à cause de l'indétermination du logarithme; mais si ce produit-là est positif, le premier membre est réel en même temps que x et on pourra se borner aux valeurs réelles des logarithmes qui figurent au second membre.

Le produit $\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\,\mathrm{sgn}\,D_1$ étant positif toutes les fois que $D_1 D_2$ le soit, le premier membre aura, pour $x = 1$, la valeur

$$Cl(D_1 D_2) \log E(D_1 D_2)$$

et il s'ensuit:

$$(31^*) \qquad Cl(D_1 D_2) \log E(D_1 D_2) = \sum_{h=1}^{\Delta_2 - 1} \left(\frac{D_2}{h}\right) \log \frac{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}$$

(D_1 et D_2 étant deux discriminants fondamentaux du même signe, $\Delta_1 = |D_1|$, $\Delta_2 = |D_2|$, puis $Y_1(x)$ et $Z_1(x)$ désignant les quantités $Y(x, D)$ et $Z(x, D)$).

On pourra rendre à la moitié le nombre des termes du second membre, si l'on observe que la quantité $e^{\frac{2\pi i}{\Delta_2}(\Delta_2 - h)}$ est l'inverse de $e^{\frac{2\pi i}{\Delta_2}h}$ de sorte qu'en employant les relations (19^a) ou (19^b), la quantité

$$\frac{Y_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right)}$$

en y faisant $k = \Delta_2 - h$, devient

$$\frac{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \mathrm{sgn}\, D_1 \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \mathrm{sgn}\, D_1 \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}.$$

9. Considérons l'équation

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \frac{1}{1 - e^{\frac{2k\pi i}{\Delta}}} = \frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau}\, Cl(-\Delta),$$

conséquence immédiate de la formule

$$\sum_{k=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \cot \frac{k\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\, Cl(-\Delta)$$

qui a lieu pour tous les discriminants négatifs.

La fonction entière irréductible $F(z)$ pouvant s'écrire

$$\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(z-e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)},$$

on aura

$$F(1)=\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(1-e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)},$$

et aussi, pour un entier h premier avec Δ,

$$F(1)=\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(1-e^{\frac{2h\rho\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}.$$

On tire ensuite de (a)

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-e^{\frac{2h\rho\pi i}{\Delta}}}=\frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)Cl(-\Delta).$$

Il s'ensuit que la fonction entière

$$\left[\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^\rho)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\right]^2+\frac{4\Delta}{\tau^2}F(1)^2Cl(-\Delta)^2$$

s'évanouit toutes les fois que x devient racine de l'équation irréductible $F(x)=0$. On a donc la congruence

$$(32)\qquad \prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^\rho)^{2\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\left(\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\right)^2$$

$$\equiv-\frac{4\Delta}{\tau^2}F(1,\Delta)^2Cl(-\Delta)^2\pmod{F(x,\Delta)}.$$

Ce résultat est susceptible d'une forme plus simple, si le discriminant $-\Delta$ est fondamental. Dans ce cas on a en effet, pour le même module, la congruence

$$-\Delta\equiv Q(x)^2,$$

et il vient

$$\prod_{\rho}(1-x^\rho)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\sum_{\rho}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\equiv\pm\frac{2}{\tau}F(1)Cl(-\Delta)Q(x,-\Delta).$$

Pour déterminer le signe, posons $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$, ce qui change la congruence en égalité; le premier membre ayant alors pour valeur l'expression

$$F(1)\frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta)$$

qui est égale à la suivante

$$\frac{2}{\tau}F(1)Cl(-\Delta)Q\left(e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}\right),$$

il faudra prendre le signe supérieur et par conséquent

(33) $$\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^\rho)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}$$

$$\equiv \frac{2}{\tau}F(1\,,\,\Delta)Cl(-\Delta)Q(x\,,\,-\Delta) \pmod{F(x\,,\,\Delta)},$$

$-\Delta$ étant un discriminant fondamental.

Il y a un résultat analogue pour des discriminants fondamentaux positifs. Soit en effet, pour abréger l'écriture,

$$Cl(D) = K.$$

on a la formule

$$\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^K = \frac{B(1)}{A(1)} = \frac{B^2(1)}{F(1)},$$

puis

$$B(1) = \prod_b\left(1 - e^{\frac{2b\pi i}{D}}\right), \qquad \left(\frac{D}{b}\right) = -1.$$

Posant donc

$$G(x) = \prod_b (1 - x^b), \qquad \left(\begin{matrix} 0 < b < D \\ \left(\frac{D}{b}\right) = -1 \end{matrix}\right),$$

on aura en vertu de la relation

$$Q\left(e^{\frac{2\pi i}{D}}\right) = \sqrt{D},$$

la congruence suivante:

$$\left[\frac{T+UQ(x)}{2}\right]^K \equiv \frac{G^2(x)}{F(1)} \pmod{F(x)}. \tag{34}$$

10. L'équation suivante qui résulte de (5) et (11)

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{x-e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}} = i\sqrt{\Delta}\,\frac{Z(x)Y'(x)-Y(x)Z'(x)}{2F(x)} \tag{35}$$

permet d'établir plusieurs formules dans lesquelles intervient le nombre des classes d'un discriminant négatif fondamental; on les obtient en posant $x = 1\,,\ -1\,,\ \pm i\,,\ \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; pour ces valeurs de x la transformation du premier membre n'a aucune difficulté, je me borne donc à signaler le résultat.

En prenant $x = e^{\frac{2r\pi i}{s}}$, le premier membre devient

$$\frac{i}{2}e^{-\frac{2r\pi i}{s}}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\cot\left(\frac{\nu}{\Delta}-\frac{r}{s}\right)\pi,$$

ce qui donne l'équation

$$x\,\frac{Z(x)Y'(x)-Y(x)Z'(x)}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\cot\left(\frac{\nu}{\Delta}-\frac{r}{s}\right)\pi, \tag{35*}$$

où $x = e^{\frac{2r\pi i}{s}}$, et $-\Delta$ désignant un discriminant fondamental. Le cas de $r = 0$ ou bien $x = 1$ a été établi au n° 3, et je me borne donc aux autres cas. Pour $\frac{r}{s} = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$ on est conduit à la fonction

$$\cot\left(\frac{\nu}{\Delta}-\frac{1}{2}\right)\pi = -\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{\Delta}$$

pour laquelle on trouve la formule suivante

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\left(1-2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta) \tag{36}$$

qui a lieu pour *tous* les discriminants impairs et aussi pour des discriminants pairs fondamentaux.

Il s'ensuit

$$\frac{Z(-1)Y'(-1)-Y(-1)Z'(-1)}{F(-1)}=4\,\frac{1-2\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,Cl(-\Delta);$$

or, comme nous avons vu plus haut, on a à l'exception des cas peu intéressants $\Delta = 3, 4, 8$, les formules

$$F(-1)=1, \qquad Z(-1)=0, \qquad Y(-1)=\pm 2,$$

ce qui permet d'écrire

$$Z'(-1, -\Delta) = \varepsilon\left(1-2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta), \tag{37}$$

où $\varepsilon = -\frac{1}{2}Y(-1, -\Delta)$ est l'unité positive ou négative qui se trouve déterminée par les formules (22).

Il peut présenter quelque intérêt de posséder la valeur de la somme qui figure au premier membre de la formule (36) aussi dans le cas où $-\Delta$ est un discriminant pair, pas nécessairement fondamental. On y répond par les deux formules aisées à obtenir

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = \pm\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \qquad \left(\Delta\equiv\pm 4 \pmod{16}\right), \tag{36^a}$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = (-1)^{\frac{\Delta}{8}-1}\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \qquad \left(\Delta\equiv 0 \pmod{8}\right). \tag{36^b}$$

On a ensuite pour les discriminants fondamentaux

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{r}{3}\right)\pi = -\left(1+3\left(\frac{\Delta}{3}\right)\right)\frac{2\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \tag{38}$$

où $r=1$ ou $r=2$, puis, pour les discriminants fondamentaux impairs

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{r}{4}\right)\pi = \left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \tag{39}$$

où $r=1$ ou $r=3$. Pour les discriminants fondamentaux pairs le premier membre est nul.

11. En désignant par $\psi(n, m)$ le nombre des solutions de la congruence quadratique

$$x^2 \equiv n \pmod{m},$$

je suppose que le module m soit la valeur absolue d'un discriminant fondamental, dont les facteurs premiers impairs p sont pris avec un signe déterminé, tel que l'on ait toujours $p \equiv 1 \pmod 4$, de sorte qu'ils auront la forme des discriminants.

Une discussion bien connue donne les résultats suivants:

I. m impair, n quelconque; $m = \pm \Pi p$,

$$\psi(n, m) = \prod_p \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right).$$

II. m pair, n impair.

1. $m = \pm 4 \Pi p$, $\psi(n, m) = \left(1 + \left(\frac{-4}{n}\right)\right) \prod \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right).$

2. $m = \pm 8 \Pi p$, $\psi(n, m) = \left(1 + \left(\frac{-4}{n}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{8}{n}\right)\right) \prod \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right).$

III. m pair

$$\frac{1}{2}\psi(4n, m) = \prod \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right),$$

p parcourant les facteurs premiers impairs de m.

Ces résultats se résument d'une manière plus simple comme il suit, en introduisant une sommation relative à tous les diviseurs d positifs ou négatifs du nombre m qui ont la forme d'un discriminant fondamental, en prenant parmi eux aussi la valeur $d = 1$, et les deux diviseurs $8k$ et $-8k$, lorsqu'ils sont possibles, devant être considérés comme différents. Sous ces conventions, on a:

$$\text{(A)} \qquad \psi(m, n) = \sum_{m:d} \left(\frac{d}{n}\right),$$

si un au moins des deux entiers m et n est impair, puis

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{2}\psi(4n, m) = \sum_{m:d} \left(\frac{d}{4n}\right),$$

si m est pair.

Ces préliminaires posés, il sera aisé d'évaluer les sommes telles que

$$\sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right),$$

où $f(x)$ signifie une fonction admettant la période 1.

Supposons d'abord que m soit impair, on aura, grâce à la périodicité de $f(z)$

$$f\left(\frac{k^2}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}\right), \quad \text{si} \quad k^2 \equiv n \pmod{m},$$

et la quantité $f\left(\frac{n}{m}\right)$ figure exactement au nombre de $\psi(n, m)$ de fois dans la suite $\sum f\left(\frac{k^2}{m}\right)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{n=1}^{m-1} \psi(n, m) f\left(\frac{n}{m}\right);$$

en employant la formule (A), cette quantité s'exprime sous la forme

$$\sum_{n=1}^{m-1} \sum_{m:d} \left(\frac{d}{n}\right) f\left(\frac{n}{m}\right) = \sum_{m:d} \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{d}{n}\right) f\left(\frac{n}{m}\right).$$

Par conséquent, on a le théorème

$$\text{(C)} \qquad \sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{d} \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) f\left(\frac{\nu}{m}\right)$$

(m étant un produit de nombres premiers impairs différents, puis

$$f(x+1) = f(x)$$

et d parcourant tous les diviseurs de m pris avec le signe convenable pour que $d \equiv 1 \pmod{4}$).

Si m est pair (divisible par 4 et non plus par 16), on aura de même

$$\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{n=0}^{m-1} \psi(n, m) f\left(\frac{n}{m}\right),$$

où l'on avait admis aussi la valeur $k = 0$, sans quoi on serait obligé de supprimer aussi le terme $k = \frac{m}{2}$; mais la formule qui donne $\psi(n, m)$ varie avec la parité de n, puis on a $\psi(n, m) = 0$ pour $n \equiv 2 \pmod{4}$, et on

peut se borner aux valeurs impaires de n et à celles qui sont des multiples de 4. Puisque

$$\psi(n, m) = \sum_{d} \left(\frac{d}{n}\right) \quad \text{pour } n \text{ impair},$$

et

$$\psi(n, m) = 2\sum \left(\frac{d}{n}\right) \quad \text{pour } n \text{ pair},$$

nous aurons

$$\text{(D)} \qquad \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{m:d} \sum_{\lambda} \left(\frac{d}{\lambda}\right) f\left(\frac{\lambda}{m}\right) + 2\sum_{m:d} \sum_{\nu=0}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{d}{4\nu}\right) f\left(\frac{4\nu}{m}\right),$$

où il faut prendre $\left(\frac{1}{0}\right) = 1$, puis $\lambda = 1, 3, 5, \ldots, \lambda < m$. ($m$ est la valeur absolue d'un discriminant fondamental pair, d parcourt les diviseurs de m, positifs où négatifs, qui ont la forme de discriminant, et aussi la valeur $d = 1$; $f(x + 1) = f(x)$.)

Comme application, prenons $f(x) = \Re(rx)$, où le symbole $\Re(z)$ a la même signification que plus haut $z - E(z)$, et r signifie un entier. En supposant l'entier positif m premier avec r, puis impair et sans diviseurs carrés, la formule (C) sera applicable et donnera

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right) = \sum_{d} \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \Re\left(\frac{r\nu}{m}\right).$$

Grâce à l'hypothèse que r et m soient premiers entre eux, on peut écrire

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \Re\left(\frac{r\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right) \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{r\nu}\right) \Re\left(\frac{r\nu}{m}\right),$$

et la dernière quantité sera identique avec la suivante

$$\left(\frac{d}{r}\right) \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\mu}\right) \Re\left(\frac{\mu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right) \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\mu}\right) \frac{\mu}{m}.$$

Si d est un discriminant positif, la dernière somme est nulle, elle se réduit à

$$\sum_{1}^{m-1} \frac{\mu}{m} = \frac{m-1}{2}, \quad \text{pour} \quad d = 1.$$

puis à

$$-\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta),\quad \text{si}\quad d=-\delta$$

est un discriminant négatif. Il vient par conséquent

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)=\frac{m-1}{2}-\sum_{\delta}\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \tag{40}$$

(m étant un produit de nombres premiers impairs différents, et δ parcourant tous les diviseurs positifs de m qui ont la forme $4k+3$; r signifie un entier premier avec m).

Le symbole τ_δ a naturellement la même signification pour la discriminant $-\delta$ que τ avait pour le discriminant Δ.

Si en particulier le nombre m est le produit de nombres premiers (positifs) de la forme $4k+1$, on aura

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)=\frac{m-1}{2}.$$

Cette formule (40) permet d'évaluer les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}E\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)$$

d'une manière assez commode; si en particulier $m=\Delta$ est un nombre premier de la forme $4k+3$, on aura

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}E\left(\frac{r\nu^2}{\Delta}\right)=\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\frac{r\nu^2}{\Delta}-\frac{\Delta-1}{2}+\frac{2}{\tau}\left(\frac{-\Delta}{r}\right)Cl(-\Delta),$$

et on pourra faire usage d'un raisonnement habituel depuis EISENSTEIN, pour transformer le premier membre. Des résultats de cette espèce pourront cependant à peine avoir quelque importance.

Passons au cas de m pair qui donne

$$\sum_{k=1}^{m-1}\Re\left(\frac{rk^2}{m}\right)=\sum_{d}\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{r\lambda}{m}\right)+2\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4r\nu}{m}\right).$$

Les restes des entiers $r\lambda$ suivant le module m reproduisant l'ensemble des λ, on a comme plus haut

$$\text{(a)} \qquad \sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{r\lambda}{m}\right)=\left(\frac{d}{r}\right)\sum\left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{\lambda}{m}\right)=\left(\frac{d}{r}\right)\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{m},$$

r devant toujours rester premier avec m. On a aussi

$$\text{(b)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4r\nu}{m}\right)-\left(\frac{d}{r}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4\nu}{m}\right)=\left(\frac{d}{r}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\frac{4\nu}{m}.$$

Si d est un discriminant positif, les expressions (a) et (b) s'évanouiront, et il ne reste que les cas où $d=1$ et où $d=-\delta$ est un discriminant négatif.

Posons

$$S=\sum_{\lambda<m}\left(\frac{-\delta}{\lambda}\right)\lambda, \qquad S'=\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{-\delta}{4\nu}\right)\nu;$$

la somme S' ne peut différer de zéro que lorsque δ est impair, on trouve aisément comme plus haut

$$S'=\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu=-\frac{m}{4}\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta),$$

et il ne reste que la somme S. Si δ est pair, elle est identique avec la suivante

$$S=\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu$$

dont la valeur est

$$-m\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta),$$

et il faut étudier le seul cas, où δ est impair. Je pose

$$\lambda=\rho+2\delta\mu, \qquad \left(\rho=1,3,\ldots,2\delta-1;\ \mu=0,1,\ldots,\frac{m}{2\delta}-1\right),$$

nous aurons

$$S = \sum_{\rho} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{\frac{m}{2\delta}-1} (\rho + 2\delta\mu) = \frac{m}{2\delta} \sum_{\rho<2\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho + A \sum_{\rho<2\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)$$

où l'on a désigné par A un entier indépendant de ρ et dont la valeur est inutile à signaler, puisque

$$\sum \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) = 0 \quad (\rho = 1, 3, 5, \ldots, 2\delta - 1).$$

La somme suivante qui seule reste à obtenir

$$S_0 = \sum_{\rho<2\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho$$

contient des termes où $\rho = 1, 3, \ldots, \delta - 2$, puis les termes $\rho = \delta + \sigma$, $\sigma = 2, 4, 6, \ldots, \delta - 1$, de sorte que

$$S_0 = \sum_{\rho<\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho + \sum_{\sigma} \left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)(\sigma + \delta),$$

et en observant que la quantité

$$\sum_{\rho<\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho + \sum_{\sigma} \left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)\sigma$$

se compose des mêmes termes que la suivante

$$\sum_{1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu = -\delta\frac{2}{\tau}Cl(-\delta),$$

il vient:

$$S_0 = -\delta\frac{2}{\tau}Cl(-\delta) + \delta\sum_{\nu=1}^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{-\delta}{2\nu}\right)$$

ou bien

$$S_0 = 2\delta\frac{2}{\tau}\left[\left(\frac{2}{\delta}\right) - 1\right]Cl(-\delta),$$

ce qui donne pour la somme considérée

$$S = m\frac{2}{\tau}\left[\left(\frac{2}{\delta}\right) - 1\right]Cl(-\delta).$$

lorsque δ est impair; cette formule reproduit celle qu'on a établie pour δ pair et est donc générale.

Cela étant, les formules qu'on vient de prouver

$$\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{r\lambda}{m}\right) = \left|\begin{array}{c} \text{o pour } d > 1, \\ \frac{1}{4}m \text{ pour } d = 1, \\ -\left(\frac{-\delta}{r}\right)\left(1-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \text{ pour } d = -\delta, \end{array}\right.$$

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4r\nu}{m}\right) = \left|\begin{array}{c} \text{o pour } d > 1 \text{ ou pour } d \text{ pair}, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{m}{4}-1\right) \text{ pour } d = 1, \\ -\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \text{ pour } d = -\delta \text{ et impair} \end{array}\right.$$

permettent de conclure

$$\sum_{k=1}^{m-1}\Re\left(\frac{rk^2}{m}\right) = \frac{1}{2}m - 1 - \sum_{\delta}\left(\frac{-\delta}{r}\right)\left(1-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta)$$
$$- 2\sum_{\delta'}\left(\frac{-\delta'}{r}\right)\frac{2}{\tau_{\delta'}}Cl(-\delta')$$

où δ parcourt tous les diviseurs de m qui rendent $-\delta$ un discriminant fondamental, tandis que δ' ne parcourt que des diviseurs impairs. On peut écrire d'une manière plus simple

$$(41)\qquad \sum_{\nu=1}^{m-1}\Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right) = \frac{1}{2}m - 1 - \sum_{\delta}\left(\frac{-\delta}{r}\right)\left[1-\left(\frac{2}{\delta}\right)+2\left(\frac{4}{\delta}\right)\right]\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta)$$

(m étant la valeur absolue d'un discriminant fondamental pair, r un entier premier avec m, et δ parcourant tous les diviseurs de m qui rendent $-\delta$ un discriminant fondamental).

Nous avons établi la formule (40), avec d'autres analogues, d'une autre manière et sous des hypothèses plus générales, dans un mémoire qui a paru dans les écrits de l'académie de Prague.[1] Ainsi, en supposant dans

[1] *O součtu celých v lomené arithmetické posloupnosti druhého stupně, etc.,* (Rozpravy české Akademie, VII[e] année, n° 7; 1898). V. aussi Annali di Matematica, 3[e] série, t. 11.

la formule (40) m impair et d'ailleurs quelconque, il faudra introduire le plus grand diviseur carré q^2 de m; le premier terme au second membre sera alors $\dfrac{m-q}{2}$ au lieu de $\dfrac{m-1}{2}$.

Le deuxième exemple que je veux traiter de la formule (C) consiste à prendre $f(x) = \text{sgn.}\, R^*(rx)$. En me bornant au cas de m impair, j'aurai d'abord

$$\sum_{k=1}^{m-1} \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{rk^2}{m}\right) = \sum_d \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{r\nu}{m}\right).$$

Les sommes

$$\sum_1^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{r\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right) \sum_1^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{\nu}{m}\right)$$

sont nulles pour $d \geq 1$, puis on a

$$\text{sgn.}\, R^*\left(\frac{\nu}{m}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \nu < \frac{1}{2} m, \\ -1 & \text{pour } \nu > \frac{1}{2} m, \end{cases}$$

donc pour $d = -\delta$

$$\sum_1^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{\nu}{m}\right) = \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) - \sum_{\frac{1}{2}(m+1)}^{m-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right);$$

en prenant, dans la seconde somme, $\nu = m - \mu$, il vient comme valeur du deuxième membre

$$2 \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right).$$

faisant $m = \delta'\delta$, on aura $\frac{1}{2}(m-1) = \dfrac{\delta'-1}{2}\delta + \dfrac{\delta-1}{2}$ et par conséquent, notre quantité sera

$$2 \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) = 2\left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) \frac{2}{\tau_\delta} Cl(-\delta)$$

et il vient

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{r\nu^2}{m}\right) = 2\sum_{\delta}\left(2-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \tag{42}$$

(m étant le produit de nombres premiers impairs différents, r premier avec m, δ parcourant les diviseurs positifs de m qui ont la forme $4k+3$).

Les formules qu'on vient d'établir peuvent être considérées comme des analogies arithmétiques des sommes de Gauss. Nous en allons donner une analogie algébrique, en prenant, dans la formule (C), pour $f(x)$ la fonction $\cot x\pi$; des termes infinis ne se présenteront pas, puisque la congruence $\nu^2 \equiv 0 \pmod{m}$ exige $\nu \equiv 0 \pmod{m}$. On aura d'abord

$$\sum_{k=1}^{m-1} \cot\frac{k^2\pi}{m} = \sum_{d}\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}.$$

d parcourant les diviseurs de m, affectés des signes convenables.

Pour d positif, la somme partielle

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}$$

est identiquement nulle, et il ne reste à considérer que des valeurs négatives $d=-\delta$. La somme à laquelle nous sommes ainsi amenés

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m} = S_\delta$$

se transforme en faisant $\nu=\rho+\delta\mu$, ($\rho=1, 2, 3, \ldots, \delta-1$; $\mu=0, 1, \ldots, m'-1$), où $m'=\frac{m}{\delta}$. Il vient

$$S_\delta = \sum_{\rho=1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\sum_{\mu=0}^{m'-1}\cot\left(\frac{\rho\pi}{m}+\frac{\mu\pi}{m'}\right),$$

ou en faisant usage de la relation

$$\sum_{\mu=0}^{m'-1}\cot\left(x+\frac{\mu}{m'}\right)\pi = m'\cot m'x\pi,$$

$$S_\delta = \frac{m}{\delta}\sum_{\rho=1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\cot\frac{\rho\pi}{\delta}.$$

d'où en substituant la valeur

$$\sum_1^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\cot\frac{\rho\pi}{\delta}=\frac{4\sqrt{\delta}}{\tau_\delta}Cl(-\delta)$$

il suit

$$S_\delta=\frac{4m}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}Cl(-\delta),$$

et on a la formule cherchée

$$(43)\qquad \sum_{\nu=1}^{m-1}\cot\frac{\nu^2\pi}{m}=4m\sum_\delta\frac{1}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}Cl(-\delta)$$

(m désignant la valeur absolue d'un discriminant fondamental impair, et δ parcourant les diviseurs de m qui ont la forme $4k+3$).

Dans le cas de m pair ($m\equiv 0 \pmod 4$), dans la somme

$$\sum_{k=1}^{m-1}\cot\frac{k^2\pi}{m}$$

se trouve un terme infini, celui où $k=\frac{m}{2}$. Nou sconvenons donc de prendre $f(x)=\cot x\pi$ pour x fractionnaire, mais $f(x)=0$ pour x entier. La formule (D) nous donnera alors

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*}\cot\frac{k^2\pi}{m}=\sum_d\sum_\lambda\left(\frac{d}{\lambda}\right)\cot\frac{\lambda\pi}{m}+2\sum_d\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m},$$

où l'astérisque indique la suppression du terme $k=\frac{1}{2}m$ qui est infini; on peut écrire d'une manière plus commode

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*}\cot\frac{k^2\pi}{m}=\sum_d\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{4d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}+2\sum_d\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m}.$$

Pour $d>1$, les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{4d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m},\qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m}$$

sont nulles, et il ne reste que des sommes où $d=-\delta$ est négatif.

Considérons d'abord la quantité

$$S = \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{-4\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{m}, \quad (\delta \text{ impair});$$

en faisant $\nu = \rho + 4\delta\mu$, $m' = \dfrac{m}{4\delta}$, nous aurons

$$S = \sum_{\rho=1}^{4\delta-1} \left(\frac{-4\delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{m'-1} \cot\left(\frac{\rho\pi}{m} + \frac{\mu\pi}{m'}\right)$$

ou bien

$$S = m' \sum_{\rho=1}^{4\delta-1} \left(\frac{-4\delta}{\rho}\right) \cot\frac{\rho\pi}{4\delta},$$

et en faisant usage de la valeur

$$\sum_{\rho=1}^{4\delta-1} \left(\frac{-4\delta}{\rho}\right) \cot\frac{\rho\pi}{4\delta} = 2\sqrt{4\delta}\, Cl(-4\delta),$$

$$S = \frac{m}{\sqrt{\delta}} Cl(-4\delta) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} \frac{2}{\tau_\delta} \left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) Cl(-\delta).$$

La formule qu'on vient d'obtenir

$$(\alpha) \qquad \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{-4\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{m} = \frac{m}{\sqrt{\delta}} \frac{2}{\tau_\delta} \left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) Cl(-\delta)$$

simplifie la première partie de l'expression qui nous occupe, mais seulement pour des δ impairs. Si δ est pair, on a identiquement

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{-4\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{m} = \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{m} = \frac{m}{\sqrt{\delta}} \frac{4}{\tau_\delta} Cl(-\delta),$$

et ce résultat est d'accord avec le précédent, puisque le symbole de LEGENDRE $\left(\frac{2}{\delta}\right)$ est nul pour δ pair.

Il reste encore les sommes

$$S' = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{-\delta}{4\nu}\right) \cot\frac{4\nu\pi}{m};$$

elles sont nulles pour δ pair, et il s'agit donc du cas de δ impair.

En y faisant $\nu = \rho + \delta\mu$, $\frac{m}{4\delta} = m'$, nous aurons

$$S' = \sum_{\rho=1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{m'-1} \cot\left(\frac{4\rho\pi}{m} + \frac{\mu\pi}{m'}\right) = m' \sum_{\rho=1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \cot\frac{\rho\pi}{\delta}$$

ou bien

$$(\beta) \qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{-\delta}{4\nu}\right) \cot\frac{4\nu\pi}{m} = \frac{m}{\tau_\delta\sqrt{\delta}} Cl(-\delta).$$

Ces résultats (α) et (β) permettent d'écrire

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*} \cot\frac{k^2\pi}{m} = \sum_{\delta} \frac{m}{\sqrt{\delta}} \frac{2}{\tau_\delta} \left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) Cl(-\delta) + \sum_{\delta'} \frac{m}{\sqrt{\delta'}} \frac{2}{\tau_{\delta'}} Cl(-\delta'),$$

où δ' ne parcourt que des diviseurs impairs. En séparant, dans la première partie, les diviseurs pairs δ'' des diviseurs impairs δ', on aura, après réduction, la formule suivante

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*} \cot\frac{k^2\pi}{m} = \sum_{\delta'} \frac{m}{\sqrt{\delta'}} \frac{2}{\tau_{\delta'}} \left(3 - \left(\frac{2}{\delta'}\right)\right) Cl(-\delta') + \sum_{\delta''} \frac{m}{\sqrt{\delta''}} \frac{4}{\tau_{\delta''}} Cl(-\delta'')$$

ce qu'on peut écrire d'une manière plus simple

$$(44) \qquad \sum_{k=1}^{m-1}{}^{*} \cot\frac{k^2\pi}{m} = m \sum_{\delta} \left[2 - \left(\frac{2}{\delta}\right) + \left(\frac{4}{\delta}\right)\right] \frac{2Cl(-\delta)}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}$$

(m étant la valeur absolue d'un discriminant fondamental pair, et δ parcourant les diviseurs de m tels que $-\delta$ soit un discriminant; dans la somme au premier membre on supprime le terme infini $k = \frac{m}{2}$).

12. Soient $p_1, p_2, p_3 \ldots.$ des nombres premiers impairs, différents entre eux, et positifs, puis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ des signes donnés par la formule générale

$$\varepsilon_\nu = \left(\frac{-4}{p_\nu}\right) = (-1)^{\frac{p_\nu-1}{2}},$$

et considérons la quantité

$$(45^a)\qquad \varpi_s = \left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)^{\frac{(-1)^{\alpha_1}+\left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)}{2}} \left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right)^{\frac{(-1)^{\alpha_2}+\left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right)}{2}} \cdots$$

$$\cdots \left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right)^{\frac{(-1)^{\alpha_\nu}+\left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right)}{2}},$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ signifie un système donné d'entiers qui peuvent être remplacés par 0 ou par 1. Cette quantité ϖ_s est égale à un, si l'on a en même temps

$$\left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right) = (-1)^{\alpha_1}, \qquad \left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right) = (-1)^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right) = (-1)^{\alpha_\nu},$$

tandis qu'elle est nulle dans tout autre cas.

Cela étant, considérons le produit

$$(45)\qquad \theta\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} p_1, & p_2, & \ldots, & p_\nu \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_\nu \end{matrix}\right) = \prod_{s=1}^{\Delta}\left(x - e^{\frac{2s\pi i}{\Delta}}\right)^{\varpi_s},$$

où $\Delta = p_1 p_2 \ldots p_\nu$ est évidemment la valeur absolue d'un discriminant fondamental impair.

Soit N le nombre effectif des facteurs du produit $\theta(x)$, on a évidemment

$$N = \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s = \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{p_1^2}{s}\right)\left(\frac{p_2^2}{s}\right)\cdots\left(\frac{p_\nu^2}{s}\right)$$

$$+ \frac{1}{2^\nu}\sum_{\rho_1\rho_2\ldots}(-1)^{\alpha_{\rho_1}+\alpha_{\rho_2}+\cdots}\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\varepsilon_{\rho_1}\varepsilon_{\rho_2}\cdots p_{\rho_1}p_{\rho_2}\cdots}{s}\right)\left(\frac{p_{\sigma_1}^2 p_{\sigma_2}^2\cdots}{s}\right)$$

où $\rho_1\rho_2\ldots$ signifient toutes les combinaisons véritables des entiers $1, 2, 3, \ldots, \nu$, et $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ les combinaisons de ces nombres, autres que les nombres ρ. Pour une combinaison fixe $\rho_1\rho_2\ldots\sigma_1\sigma_2\ldots$, posons

$$\varepsilon_{\rho_1}\varepsilon_{\rho_2}\ldots p_{\rho_1}p_{\rho_2}\ldots = D', \qquad p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\ldots = Q, \qquad |D'| = \Delta'.$$

D' étant un discriminant, on vérifie aisément que la somme

$$\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\varepsilon_{\rho_1}p_{\rho_1}\varepsilon_{\rho_2}p_{\rho_2}\cdots}{s}\right)\left(\frac{p_{\sigma_1}^2 p_{\sigma_2}^2\cdots}{s}\right) = \sum_{s=1}^{\Delta' Q}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q^2}{s}\right)$$

est nulle; parmi les sommes dont se compose N la première seule étant différente de zéro, il s'ensuit

$$N = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{p_1^2}{s}\right)\left(\frac{p_2^2}{s}\right) \ldots \left(\frac{p_\nu^2}{s}\right) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{s}\right),$$

ce qui n'est autre chose que

$$N = \frac{1}{2^\nu} \varphi(\Delta),$$

en employant l'écriture habituelle de GAUSS.

Prenons maintenant les logarithmes dans (45); il vient, en supposant $|x| > 1$,

$$\log \theta(x \mid \alpha) = N \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n x^n} \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}.$$

Pour obtenir les coefficients de cette série, c'est à dire les quantités

$$G_n = 2^\nu \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

sous une forme plus simple, observons que l'on a, en développant le produit (45^a), l'aggrégat suivant

$$G_n = H_0 + \sum_{\alpha} H_1(\alpha) + \sum_{\alpha', \alpha''} H_2(\alpha', \alpha'') + \ldots,$$

où l'on a posé, pour abréger

$$H_0 = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

puis, p. ex.

$$H_1(\alpha_1) = (-1)^{\alpha_1} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)\left(\frac{p_2^2 p_3^2 \ldots p_\nu^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

$$H_2(\alpha_1, \alpha_2) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2}{s}\right)\left(\frac{p_3^2 \ldots p_\nu^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

etc. Dans les sommes dont se compose G_n, il faut remplacer successivement α par tous les nombres de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, puis α_1, α_2 par toutes les combinaisons du second ordre $\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$ des mêmes nombres, et ainsi de suite.

Nous allons évaluer la quantité

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\mu} H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = \mathfrak{H}_\mu;$$

en posant pour abréger

$$\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \ldots \varepsilon_\mu p_\mu = D_0, \qquad p_1 p_2 \ldots p_\mu = \Delta_0,$$
$$p_{\mu+1} p_{\mu+2} \ldots p_\nu = Q,$$

on aura

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{D_0}{s}\right)\left(\frac{Q^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q}}.$$

Cette expression s'évalue à l'aide de l'identité (2)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) f(m) = \sum_d \mu(d) \sum_{m=1}^{\infty} f(md),$$

où d parcourt les diviseurs de Q, et il vient

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_d \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{m=1}^{\Delta_0 Q_d} \left(\frac{D_0}{m}\right) e^{\frac{2mn\pi i}{\Delta_0 Q_d}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$Q_d = \frac{Q}{d}.$$

Pour simplifier la somme intérieure, posons $m = s + k\Delta_0$, $(s = 1, 2, \ldots, \Delta_0;$ $k = 0, 1, \ldots, Q_d - 1)$, elle devient

$$a = \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q_d}} \sum_{k=0}^{Q_d-1} e^{\frac{2kn\pi i}{Q_d}};$$

elle est donc nulle toutes les fois que $\frac{n}{Q_d} = n'$ ne soit pas un entier, et il ne reste qu'à considérer les termes où n' est entier, pour lesquels elle est égale à

$$a = Q_d \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q_d}}$$

ou bien

$$a = Q_d \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2n's\pi i}{\Delta_0}} = Q_d \sqrt{D_0} \left(\frac{D_0}{n'}\right).$$

Pour obtenir le signe de LEGENDRE qui figure au second membre, observons que

$$\left(\frac{D_0}{n'}\right)\left(\frac{D_0}{Q_d}\right) = \left(\frac{D_0}{n}\right),$$

d'où il suit, D_0 étant premier avec Q_d,

$$\left(\frac{D_0}{n'}\right) = \left(\frac{D_0}{Q_d}\right)\left(\frac{D_0}{n}\right).$$

Ensuite

$$\left(\frac{D_0}{Q_d}\right)\left(\frac{D_0}{d}\right) = \left(\frac{D_0}{Q}\right),$$

d'où

$$\left(\frac{D_0}{Q_d}\right) = \left(\frac{D_0}{d}\right)\left(\frac{D_0}{Q}\right);$$

en substituant cette valeur, il vient

$$\left(\frac{D_0}{n'}\right) = \left(\frac{D_0}{d}\right)\left(\frac{D_0}{Q}\right)\left(\frac{D_0}{n}\right) = \left(\frac{D_0}{nQ}\right)\left(\frac{D_0}{d}\right),$$

et par conséquent

$$a = \left(\frac{D_0}{d}\right)\frac{Q}{d}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0}.$$

Les entiers d sont assujettis à la condition que les quotients $\frac{nd}{Q}$ et $\frac{Q}{d}$ soient entiers. En représentant par ϑ le plus grand commun diviseur des deux nombres n et Q, on aura

$$n = n_1\vartheta, \qquad Q = Q_1\vartheta, \qquad (n_1, Q_1) \sim 1,$$

et les quotients en question seront

$$\frac{n_1 d}{Q_1}, \frac{Q_1\vartheta}{d}.$$

Le premier ne sera entier que si $\frac{d}{Q_1} = \delta$ est un entier, et le second

$$\frac{Q_1\vartheta}{d} = \frac{\vartheta}{\delta}$$

exige que ϑ soit un multiple de δ.

Le nombre ϑ étant fixé, on fera parcourir à δ les diviseurs de ϑ, et on posera $d = Q_1\delta$, c'est à dire $d = \frac{Q\delta}{\vartheta}$. La valeur obtenue de la somme

$$a = \left(\frac{D_0}{d}\right)\frac{Q}{d}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0} \quad \text{prouve que} \quad \left(\frac{D_0}{d}\right)a = \frac{Q}{d}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0}$$

ou bien

$$\left(\frac{D_0}{d}\right)a = \frac{1}{\delta}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\vartheta\sqrt{D_0}.$$

Il faut encore évaluer le signe $\mu(d)$. Les équations

$$d = Q_1\delta, \qquad Q = Q_1\vartheta$$

donnent tout de suite

$$\mu(d) = \mu(Q_1)\mu(\delta), \qquad \mu(Q) = \mu(Q_1)\mu(\vartheta),$$

d'où

$$\mu(d) = \mu(\delta)\mu(Q)\mu(\vartheta);$$

et substituant, il vient

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_\delta \frac{\mu(\delta)}{\delta}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\mu(Q)\mu(\vartheta)\vartheta\sqrt{D_0}$$

ou bien

$$\mathfrak{H}_\mu = \left(\frac{D_0}{nQ}\right)\mu(Q)\mu(\vartheta)\varphi(\vartheta)\sqrt{D_0},$$

ce qui donne le résultat voulu

$$H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu}\mu(Q)\mu(\vartheta)\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\varphi(\vartheta)\sqrt{D_0}.$$

On peut remarquer encore que $\mu(Q) = (-1)^{\nu-\mu}$, et il vient

$$H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = (-1)^{(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots+(\alpha_\mu-1)+\nu}\mu(\vartheta)\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\varphi(\vartheta)\sqrt{D_0}$$

ϑ désignant le plus grand commun diviseur des nombres n et Q.

Il s'agit encore d'exprimer la quantité $\sqrt{D_0}$ au moyen des racines $\sqrt{\varepsilon_1 p_1}$, $\sqrt{\varepsilon_2 p_2}$, ...

On a évidemment

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2} = \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right),$$

puis

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdot \varepsilon_3 p_3} = \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_3 p_3}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right)\left(\frac{p_3}{p_1 p_2}\right)$$

ou bien

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdot \varepsilon_3 p_3} = \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_3 p_3}\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right)\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right)$$

et d'une manière générale

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdots \varepsilon_\mu p_\mu} = \left(\frac{p_2 p_3 \cdots p_\mu}{p_1}\right)\left(\frac{p_1 p_3 \cdots p_\mu}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_{\mu-1}}{p_\mu}\right)$$
$$\times \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_3 p_3}\cdots\sqrt{\varepsilon_\mu p_\mu}.$$

Grâce à la loi de réciprocité, on a

$$\left(\frac{D_0}{nQ}\right) = \left(\frac{nQ}{p_1 p_2 \cdots p_\mu}\right) = \left(\frac{nQ}{p_1}\right)\left(\frac{nQ}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{nQ}{p_\mu}\right),$$

de sorte que le produit

$$\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\left(\frac{p_2 p_3 \cdots p_\mu}{p_1}\right)\left(\frac{p_1 p_3 \cdots p_\mu}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_{\mu-1}}{p_\mu}\right)$$

s'écrira

$$\left(\frac{np_2 p_3 \cdots p_\nu}{p_1}\right)\left(\frac{np_1 p_3 \cdots p_\nu}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{np_1 p_2 \cdots p_{\mu-1} p_{\mu+1} \cdots p_\nu}{p_\mu}\right)$$

et il vient

$$(-1)^\nu H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = (-1)^{\alpha_1-1}\left(\frac{nP'_1}{p_1}\right)\sqrt{\varepsilon_1 p_1}\,(-1)^{\alpha_2-1}\left(\frac{nP'_2}{p_2}\right)\sqrt{\varepsilon_2 p_2}$$
$$\ldots(-1)^{\alpha_\mu-1}\left(\frac{nP'_\mu}{p_\mu}\right)\sqrt{\varepsilon_\mu p_\mu}\,\mu(\vartheta)\varphi(\vartheta)$$

en posant

$$P'_1 = \frac{\Delta}{p_1}, \qquad P'_2 = \frac{\Delta}{p_2}, \quad \text{etc.},$$

et ϑ désignant le produit des nombres $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_\nu$ qui divisent le nombre n.

Si en particulier n est premier avec Δ, on aura l'expression plus simple

$$(-1)^\nu H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = \prod_{\rho=1}^{\mu}\left\{(-1)^{\alpha_\rho-1}\left(\frac{nP'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}\right\}.$$

Dans ce qui précède on a supposé $\mu > 0$; pour obtenir la quantité

$$H_0 = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}$$

le même procédé donne d'abord

$$H_0 = \sum_d \mu(d) \sum_{m=1}^{\Delta_d} e^{\frac{2nm\pi i}{\Delta_d}}, \qquad \Delta_d = \frac{\Delta}{d}.$$

et l'on aura

$$H_0 = \mu(\Delta) = (-1)^\nu,$$

si n est premier avec Δ; le cas plus général s'établit d'une manière analogue.

En posant pour abréger

$$\Phi(\alpha_\rho) = (-1)^{\alpha_\rho - 1}\left(\frac{nP'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho},$$

l'équation

$$G_n = H_0 + \sum_a H_1(\alpha) + \sum_{a_1, a_2} H_2(\alpha_1, \alpha_2) + \dots$$

s'eérira

$$(-1)^\nu G_n = 1 + \sum \Phi(\alpha) + \sum_{a_1, a_2} \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2) + \sum_{a_1, a_2, a_3} \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2)\Phi(\alpha_3) + \dots$$

ou bien

$$(-1)^\nu G_n = (1 + \Phi(\alpha_1))(1 + \Phi(\alpha_2))(1 + \Phi(\alpha_3))\dots(1 + \Phi(\alpha_\nu))$$

pourvu que, bien entendu, n soit premier avec Δ.

En substituant l'expression primitive de G_n, on aura la relation cherchée

$$(46) \qquad \sum_{s=1}^{\Delta-1} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}} = (-1)^\nu \prod_{\rho=1}^{\nu} \frac{1 - (-1)^{a_\rho}\left(\frac{nP'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}}{2},$$

où $\Delta = p_1 p_2 \dots p_\nu$, $P'_\rho = \frac{\Delta}{p_\rho}$, et l'expression ϖ_s est définie par (45^a); le nombre n est supposé positif et premier avec Δ.

Le premier membre de cette équation n'est autre chose que la somme

$$\sum e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

dans laquelle l'indice sommatoire s satisfait aux conditions $0 < s < \Delta$;

$$\left(\frac{s}{p_1}\right) = (-1)^{\alpha_1}, \qquad \left(\frac{s}{p_2}\right) = (-1)^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{s}{p_\nu}\right) = (-1)^{\alpha_\nu}$$

et qui se compose donc de $\frac{1}{2^\nu}\varphi(\Delta)$ termes. Si en particulier on fait $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0$, les s seront les résidus quadratiques de Δ, premiers avec Δ.

Je vais considérer maintenant la quantité (46) dans le cas où l'entier n a un facteur commun avec Δ; soit $n = m\Delta''$, $\Delta = \Delta'\Delta''$, les deux nombres m et Δ' étant premiers entre eux. La somme

$$S = \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}$$

devient

$$S = \sum_{s=1}^{\Delta'\Delta''} \varpi_s e^{\frac{2ms\pi i}{\Delta'}},$$

et on peut la transformer en faisant $s = r + k\Delta'$; il vient

$$S = \sum_{r=1}^{\Delta'} \sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi_{r+k\Delta'} e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}}.$$

Cela étant, représentons par $p_1, p_2, \ldots, p_\gamma$ les facteurs de Δ', et posons pour abréger

$$\varpi'_s = \prod_{\rho=1}^{\gamma} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right) \frac{(-1)^{\alpha_\rho} + \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)}{2} \right\},$$

$$\varpi''_s = \prod_{\rho=\gamma+1}^{\nu} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right) \frac{(-1)^{\alpha_\rho} + \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)}{2} \right\}.$$

On a, par définition,

$$\varpi_s = \varpi'_s \varpi''_s.$$

puis comme cela se voit aisément

$$\varpi'_{s+\Delta'} = \varpi'_s, \qquad \varpi''_{s+\Delta''} = \varpi''_s,$$

d'où

$$\varpi_{r+k\Delta'} = \varpi'_{r+k\Delta'}\varpi''_{r+k\Delta'} = \varpi'_r\varpi''_{r+k\Delta'},$$

et notre somme prend la forme

$$S = \sum_{r=1}^{\Delta'} \varpi'_r e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}} \sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi''_{r+k\Delta'}.$$

Les deux entiers Δ' et Δ'' étant premiers entre eux, les nombres $r + k\Delta'$ $(k = 0, 1, \ldots, \Delta'' - 1)$ parcourent un système complet de restes du module Δ'', et il vient

$$\sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi''_{r+k\Delta'} = \sum_{s=1}^{\Delta''} \varpi''_s = \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}}.$$

Donc enfin

$$S = \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}} \sum_{r=1}^{\Delta'} \varpi'_r e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}},$$

ou en faisant usage de (46),

$$\sum_{s=1}^{\Delta'\Delta''} \varpi_s e^{\frac{2ms\pi i}{\Delta'}} = (-1)^\gamma \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}} \prod_{\rho=1}^{\gamma} \frac{1-(-1)^{\alpha_\rho}\left(\frac{m\Delta'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}}{2}, \tag{47}$$

$\left(\Delta' = p_1 p_2 \ldots p_\gamma,\ \ \Delta'' = p_{\gamma+1} \ldots p_\nu,\ \ \Delta'\Delta'' = \Delta,\ \ \Delta'_\rho = \frac{\Delta'}{p_\rho};\right.$ m positif et premier avec Δ').

Les formules (46) et (47) prouvent que les sommes

$$\sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}$$

sont des quantités de la forme

$$\frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon p}}{2}\,\frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon' p'}}{2}\,\frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon'' p''}}{2}\cdots,$$

et il s'ensuit que les coefficients du polynôme

$$\theta\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} p_1 p_2 \ldots p_\nu \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu \end{matrix}\right) = x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \ldots$$

sont des nombres algébriques entiers du domaine de rationalité

$$(\sqrt{\varepsilon_1 p_1}\,, \sqrt{\varepsilon_2 p_2}\,, \ldots, \sqrt{\varepsilon_\nu p_\nu}).$$

En appelant *type* de la fonction entière

$$\theta\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} p_1 \ldots p_\nu \\ \alpha_1 \ldots \alpha_\nu \end{matrix}\right) = \theta_\alpha(x)$$

le système des signes

$$(-1)^{\alpha_1}, (-1)^{\alpha_2}, \ldots, (-1)^{\alpha_\nu},$$

il y aura 2^ν types distinctes.

Le produit de polynômes

$$\prod_{(\alpha)} \theta_\alpha(x),$$

étendu à tous les 2^ν types différents, donne l'équation irréductible d'ordre $\varphi(\Delta)$ à laquelle satisfait la quantité $e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$. En effectuant le produit

$$\prod_{(\alpha)}{}' \theta_\alpha(x)$$

étendu aux polynômes dont les types satisfont à la condition

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu} = 1 \quad \text{(types pairs)},$$

on reçoit l'expression de Gauss

$$\frac{Y(x) - \sqrt{D}\, Z(x)}{2}, \qquad D = \varepsilon_1 p_1 \varepsilon_2 p_2 \ldots \varepsilon_\nu p_\nu.$$

Il parait que cette formation des polynômes de Gauss puisse donner l'occasion à des conclusions intéressantes.

13. Nous allons considérer un nombre quelconque (m) des discriminants fondamentaux premiers entre eux, soient $D_1, D_2, \ldots, D_m$, dont les valeurs absolues respectives soient désignées par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$. Posons pour abréger $D = D_1 D_2 \ldots D_m$, $\Delta = |D|$, puis formons tous les produits possibles

$$D_{r_1} D_{r_2} \ldots D_{r_a} = D', \qquad \Delta' = |D'|,$$

$r_1, r_2, \ldots, r_a$ désignant une combinaison quelconque des indices $1, 2, \ldots, m$. En désignant par $r_{a+1} \ldots r_m$ la combinaison complémentaire, le produit

$$Q' = \Delta_{r_{a+1}} \ldots \Delta_{r_m}$$

sera tel que $|D'Q'| = \Delta' Q' = \Delta$; les produits D' sont évidemment des discriminants fondamentaux; je conviens d'écrire

$$F(D') = \frac{2}{\tau'} Cl(D'), \text{ si } D' \text{ est négatif, et}$$

$$F(D') = 0, \text{ si } D' \text{ est positif.}$$

En introduisant encore le symbole

$$(D', Q') = \prod_q \left(1 - \left(\frac{D'}{q}\right)\right)$$

où le produit se rattache à tous les diviseurs premiers différents q du nombre Q', et en convenant d'écrire

$$(D', 1) = 1,$$

j'aurai la formule suivante qui sera démontrée tout à l'heure

$$\frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \frac{2^m}{\Delta} \Sigma^* s = \sum_{D'} (D', Q') F(D'); \tag{48}$$

dans le premier membre le symbole $\Sigma^* s$ signifie la somme de ceux des nombres $s = 1, 2, 3, \ldots, \Delta$ qui satisfont à des conditions simultanées

$$\left(\frac{D_1}{s}\right) = \left(\frac{D_2}{s}\right) = \ldots = \left(\frac{D_m}{s}\right) = 1;$$

dans le second membre, D' parcourt tous les produits $D_{r_1} \ldots D_{r_a}$ dont il a été question plus haut.

Afin de démontrer la formule (48), j'observe que l'on a

$$\Sigma^* s = \sum_{s=1}^{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{D_1}{s}\right)}{2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{D_2}{s}\right)}{2} \cdots \frac{1 + \left(\frac{D_m}{s}\right)}{2} \left(\frac{D}{s}\right) s,$$

d'où

$$2^m \Sigma^* s = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{s}\right) \left(1 + \left(\frac{D_1}{s}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{D_2}{s}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{D_m}{s}\right)\right) s.$$

Or le produit

$$\left(\frac{D}{s}\right)\left(1+\left(\frac{D_1}{s}\right)\right)\left(1+\left(\frac{D_2}{s}\right)\right)\cdots\left(1+\left(\frac{D_m}{s}\right)\right)$$

est égal à la somme

$$\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)+\sum_{D'}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q'^2}{s}\right),$$

D' parcourt tous les discriminants formés de la manière indiquée plus haut. Il vient donc d'abord

$$2^m\sum{}^* s=\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)s+\sum_{D'}\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q'^2}{s}\right)s;$$

la première somme

$$\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)s$$

est la somme des entiers premiers avec Δ et plus petits que Δ, et a pour valeur l'expression $\frac{1}{2}\Delta\varphi(\Delta)$.

Ensuite, si $D'=D$, $Q'=1$, la somme

$$\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{s}\right)s$$

a pour valeur la quantité $-\Delta F(D)$, et il ne s'agit que des expressions

$$S=\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q'^2}{s}\right)s,$$

où $Q'>1$. On les obtient au moyen de l'identité

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{h}\right)f(h)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}f(hd),$$

où d parcourt les diviseurs de Q. Il vient, en posant $Q'_d=\frac{Q'}{d}$,

$$S=\sum\mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\sum_{s=1}^{\Delta Q'_d}\left(\frac{D}{s}\right)ds.$$

Or, on a la formule générale

$$\sum_{s=1}^{n\Delta_0}\left(\frac{D_0}{s}\right)s = n\sum_{r=1}^{\Delta_0}\left(\frac{D_0}{r}\right)r = -n\Delta_0 F(D_0),$$

qui donne

$$S = -\sum_d \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right)dQ'_d\,\Delta' F(D') = -\Delta F(D')\sum_d \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right).$$

La somme

$$\sum_d \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right),$$

étendue à tous les diviseurs d du nombre Q', est égale au produit

$$\prod_q\left(1-\left(\frac{D'}{q}\right)\right),$$

q parcourant les différents facteurs premiers de Q'; ce produit étant désignée par (D', Q'), nous avons

$$S = -\Delta(D', Q')F(D'),$$

ce qui vérifie l'équation (48) dont nous allons signaler quelques cas particuliers

I. $\qquad m = 2; \qquad D_1 = -p, \qquad D_2 = -q,$

p et q étant deux nombres premiers de la forme $4k+3$. Parmi les produits D' qu'ont peut former des facteurs D_1 et D_2, l'un est positif; les autres sont D_1 et D_2 eux-mêmes, et il vient

$$(49)\qquad \frac{(p-1)(q-1)}{2} - \frac{4}{pq}\sum_1^{pq}{}^{*}s = \left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{2}{\tau_p}Cl(-p) + \left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right)\frac{2}{\tau_q}Cl(-q);$$

nous y avons remplacé le symbole $\left(\frac{-p}{q}\right)$ par son équivalent $\left(\frac{q}{p}\right)$. Les

deux signes $\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\left(\frac{q}{p}\right)$ étant opposés, d'après la loi de réciprocité, l'une des deux différences

$$1 - \left(\frac{p}{q}\right), \qquad 1 - \left(\frac{q}{p}\right)$$

sera nulle et le second membre se réduit toujours à un seul terme

II. $\qquad m = 2, \qquad D_1 = -p, \qquad D_2 = q,$

p et q étant deux nombres premiers, $p \equiv 3$, $q \equiv 1 \pmod 4$.

Il y a deux produits négatifs, $D' = -p$ et $D' = -pq$. La formule (48) devient

$$\frac{(p-1)(q-1)}{2} - \frac{4}{pq}\sum_{1}^{pq}{}^{*} s = Cl(-pq) + \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{2}{\tau_p}\,Cl(-p), \tag{50}$$

les entiers s parcourent, comme dans (49), les résidus quadratiques du module pq, premiers avec le module. En observant que l'on a

$$\frac{1}{2}(p-1)(q-1) \equiv 0 \pmod 4,$$

$$Cl(-p) \equiv 1 \pmod 2,$$

il vient, pour $p > 3$,

$$Cl(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{q}{p}\right) \pmod 4. \tag{51}$$

Pour $p = 3$, multiplions les deux membres par 3, et il vient d'abord

$$3Cl(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{q}{p}\right) \pmod 4$$

d'où immédiatement la congruence précédente. La congruence (51) est donc générale, lorsque p et q sont deux nombres premiers, l'un de la forme $4k+1$, l'autre de la forme $4k+3$.

III. $\qquad m = 3, \quad D_1 = -p_1, \quad D_2 = -p_2, \quad D_3 = -p_3,$

les p étant des nombres premiers de la forme $4k+3$. Dans ce cas on a les valeurs suivantes des discriminants négatifs D': $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$, $-p_1p_2p_3$; le résultat (48) devient alors

$$\frac{1}{2}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)-\frac{8}{p_1p_2p_3}\sum_1^{p_1p_2p_3}{}^{*} s \tag{52}$$
$$=Cl(-p_1p_2p_3)+\sum_{\alpha=1,2,3}\left(1-\left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right)\frac{2}{\tau_{p_\alpha}}Cl(-p_\alpha)$$

où s parcourt les résidus quadratiques du module $p_1p_2p_3$, et les indices α, β, γ signifient les chiffres $1, 2, 3$ pris dans un ordre quelconque.

Si les nombres p_1, p_2, p_3 sont différents de 3, le quotient $\frac{2}{\tau_{p_\alpha}}$ sera l'unité, et il vient la congruence suivante

$$(\alpha)\quad Cl(-p_1p_2p_3)\equiv\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_3}{p_1}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)$$
$$+\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right)+4 \pmod 8,$$

qui peut encore se simplifier considérablement. Elle a lieu encore si $p_1=3$, car il suffit, dans ce cas, de multiplier les deux membres par 9 et on parvient au même résultat.

Les trois membres p ayant la forme $4k+3$, on a, d'après la loi de réciprocité

$$\left(\frac{p_1p_2}{p_3}\right)\left(\frac{p_2p_3}{p_1}\right)\left(\frac{p_3p_1}{p_2}\right)=-1$$

et cette égalité n'a lieu que sous l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:

a) $$\left(\frac{p_1p_2}{p_3}\right)=\left(\frac{p_2p_3}{p_1}\right)=\left(\frac{p_3p_1}{p_2}\right)=-1,$$

b) $$\left(\frac{p_1p_3}{p_2}\right)=-1,\qquad \left(\frac{p_2p_3}{p_1}\right)=\left(\frac{p_1p_2}{p_3}\right)=1,$$

où nous avons admis que dans le second cas les nombres p soient pris dans un ordre convenable.

Le cas de a) exige que

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=-\left(\frac{p_3}{p_2}\right),\qquad \left(\frac{p_2}{p_3}\right)=-\left(\frac{p_1}{p_3}\right),\qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right)=-\left(\frac{p_3}{p_1}\right).$$

l'ordre des p étant ici arbitraire, je le fixerai par la condition $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$; on aura alors

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{p_2}{p_3}\right) = \left(\frac{p_3}{p_1}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{p_3}{p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_3}\right) = -1.$$

L'une des deux différences $1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)$, $1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)$ sera donc toujours nulle et la congruence (α) devient

$$Cl(-p_1 p_2 p_3) \equiv 4 \pmod 8.$$

Passons au second cas; les égalités b) donnent

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\left(\frac{p_3}{p_2}\right), \qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{p_3}{p_1}\right), \qquad \left(\frac{p_1}{p_3}\right) = \left(\frac{p_2}{p_3}\right),$$

et le second membre de la congruence (α) sera alors

$$\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)^2 + 4,$$

et puisque

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_3}\right) \quad -\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{p_3}{p_1}\right) = -\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) = -1,$$

l'une des deux différences $1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$ et $1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)$ sera nulle, l'autre étant égale à deux, il vient, dans ce cas, la congruence

$$Cl(-p_1 p_2 p_3) \equiv 0 \pmod 8.$$

Les deux cas se résument par la congruence générale

$$(53) \qquad Cl(-p_1 p_2 p_3) \equiv \left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right) + \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right) + \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) - 1 \pmod 8,$$

où p_1, p_2, p_3 signifient trois nombres premiers différents de la forme $4k+3$

IV. $\quad m = 3; \qquad D_1 = p, \qquad D_2 = q, \qquad D_3 = -r,$

p, q, r étant des nombres premiers, les deux premiers de la forme $4k+1$, le dernier de la forme $4k+3$. On a ici les valeurs suivantes des discriminants D' négatifs

$$D = -pqr, \; -pr, \; -qr, \; -r,$$

et la formule (48) devient

$$\frac{1}{2}(p-1)(q-1)(r-1)-\frac{8}{pqr}\sum_{1}^{pqr}{}^{*} s \tag{54}$$

$$= Cl(-pqr)+\left(1-\left(\frac{q}{pr}\right)\right)Cl(-pr)+\left(1-\left(\frac{p}{qr}\right)\right)Cl(-qr)$$

$$+\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{r}\right)\right)\frac{2}{\tau_r}Cl(-r).$$

On en tire une congruence pour le module 8, en faisant usage du résultat (51). On aura

$$Cl(-pqr)\equiv\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{pr}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{q}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p}{qr}\right)\right)$$

$$+\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{r}\right)\right) \pmod 8.$$

Pour simplifier, distinguons deux cas:

a) $$\left(\frac{p}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)=\varepsilon,\qquad \left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=\varepsilon',$$

b) $$\left(\frac{p}{r}\right)=-\left(\frac{q}{r}\right)=\varepsilon,\qquad \left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=\varepsilon'.$$

Dans le premier cas le second membre prend la forme

$$2(1-\varepsilon)(1-\varepsilon\varepsilon')+(1-\varepsilon)^2$$

et ce nombre est toujours congru à $(1-\varepsilon)^2=2(1-\varepsilon)$, suivant le module 8.

Dans le cas b) le second membre de la congruence en question s'écrira

$$(1-\varepsilon)(1+\varepsilon\varepsilon')+(1+\varepsilon)(1-\varepsilon\varepsilon')+(1-\varepsilon)(1+\varepsilon);$$

le dernier terme est nul et les deux premiers donnent

$$2(1-\varepsilon').$$

Le résultat est donc le suivant:

»Soient p, q, r trois nombres premiers tels que

$$p\equiv q\equiv -r\equiv 1 \pmod 4,$$

alors on a, *pour le module* 8,

$$(55) \qquad Cl(-pqr) \equiv \begin{cases} 2\left(1 - \left(\frac{p}{r}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{pq}{r}\right) = 1, \\[2ex] 2\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{pq}{r}\right) = -1, \end{cases}$$

V. $m = 4, \quad D_1 = -p_1, \quad D_2 = -p_2, \quad D_3 = -p_3, \quad D_4 = q.$

Les nombres p sont premiers de la forme $4k + 3$, q est également premier mais de la forme $4k + 1$. Il y a huit discriminants D' négatifs, à savoir $-p_1 p_3 p_3 q$, $-p_1 p_2 p_3$, puis trois discriminants de la forme $-p_\alpha q$ et trois discriminants $-p_\alpha$. La formule (48) devient alors

$$\frac{1}{2}(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)(q - 1) - \frac{16}{p_1 p_2 p_3 q} \sum{}^{*} s$$

$$= Cl(-p_1 p_2 p_3 q) + \left(1 - \left(\frac{q}{p_1 p_2 p_3}\right)\right) Cl(-p_1 p_2 p_3)$$

$$+ \sum_{\alpha=1,2,3} \left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha q}\right)\right) Cl(-p_\alpha q)$$

$$+ \sum_{\alpha=1,2,3} \left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{q}{p_\alpha}\right)\right) \frac{2}{\tau_{p_\alpha}} Cl(-p_\alpha).$$

On en déduit une congruence pour le module 16; si l'on fait usage des formules (51) et (53), elle prend la forme suivante

$$(a) \qquad Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv \left(1 - \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q}\right)\right)\left[\sum_{\alpha=1,2,3} \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) - 1\right]$$

$$+ \sum_{\alpha=1,2,3} \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right)\left[\left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{p_\beta}{q p_\alpha}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{q p_\alpha}\right)\right)\right].$$

On en tire plusieurs conséquences:

1° Si $\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = 1$, on a $Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv 0 \pmod{16}$.

2° Si $\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1$, la parenthèse [ ] dans la seconde somme devient

$$\left(1-\left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right)+\left(1+\left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1+\left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right)=A;$$

il est clair que $A=0$, si les deux signes $\left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)$, $\left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)$ sont opposés; un des deux termes dont A se compose, sera différent de zéro et aura pour valeur 4, si les deux signes en question sont égaux. Donc on a, en résumé,

$$A = 2\left[\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right)+1\right],$$

et nous aurons le résultat

$$\begin{aligned} Cl(-p_1p_2p_3q) &\equiv -2\left[\sum_\alpha\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right)-1\right]+4\sum_\alpha\left[\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right)+1\right] \\ &\equiv 2\sum_\alpha\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right)+14, \end{aligned}$$

ou bien

$$Cl(-p_1p_2p_3q) \equiv 2\left[\sum_\alpha\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right)-1\right] \pmod{16}.$$

Dans le cas où

$$3^\circ \qquad \left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1,$$

la deuxième partie du second membre dans la formule (a) se réduit à un seul terme, celui où $\alpha = 3$; la parenthèse [ ] se compose alors de deux termes égaux, et le total sera toujours divisible par 16; donc ici il vient

$$Cl(-p_1p_2p_3q) \equiv 2\left[\sum_\alpha\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right)-1\right].$$

Enfin, l'hypothèse

$$4^\circ \qquad \left(\frac{p_1}{q}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_2}{q}\right) \qquad \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1$$

ramène le second membre de (a) à deux termes, ceux qui résultent de la somme en y faisant $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$; on a alors l'expression

$$2\left[\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right)\right]$$

$$+ 2\left[\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right)\right].$$

L'un des deux termes dont se compose l'une ou l'autre parenthèse, est nul, puisque y figurent les facteurs tels que $1 \mp \left(\frac{p_3}{p_2}\right)$; l'expression se réduit donc à la quantité

$$4\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right) + 4\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right) \equiv 4\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right) + 4\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)$$
$$\pm 4\left(1 - \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\right)$$

et il vient

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv 4\left(1 - \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\right) \pmod{16}.$$

En résumé, on a le théorème suivant:

Soient p_1, p_2, p_3, q les nombres premiers différents qui satisfont à la congruence $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -q \equiv -1 \pmod 4$, on a pour le module seize la congruence

$$(56) \qquad Cl(-p_1 p_2 p_3 q)$$
$$\equiv \begin{cases} 2\left[\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right) + \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) + \left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right) - 1\right], & \text{si } \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q}\right) = -1, \\ 4\left(1 - \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right) = 1, \quad \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1, \\ 0, & \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = 1. \end{cases}$$

Considérons enfin le cas

VI. $m = 4;\quad D_1 = p_1,\quad D_2 = p_2,\quad D_3 = p_3,\quad D_4 = q.$

les nombres premiers p et q satisfaisant aux conditions

$$p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -q \equiv 1 \pmod 4.$$

On trouve d'abord la congruence pour le module seize

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta p_\gamma q}\right)\right) Cl(-p_\beta p_\gamma q)$$

$$+ \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha q}\right)\right) Cl(-p_\alpha q) + \prod_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right),$$

ou en faisant usage du résultat (51) et posant, pour abréger,

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) = C, \qquad \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right) = \eta_\gamma, \qquad {\scriptstyle (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)}$$

(b) $$C \equiv \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\eta_\beta \eta_\gamma\right) Cl(-p_\beta p_\gamma q)$$

$$+ \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\beta}{q}\right)\eta_\gamma\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{q}\right)\varepsilon_\beta\right) + \prod_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right).$$

Pour distinguer, considérons le cas

A. $$\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = \varepsilon;$$

les produits $\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{q}\right)$ étant positifs, on tire de (55)

$$Cl(-p_\beta p_\gamma q) \equiv 2\left(1 - \left(\frac{p_\beta}{q}\right)\right) = 2(1 - \varepsilon) \pmod 8,$$

et il vient, pour le module seize,

$$C \equiv 4(1 - \varepsilon) + 2(1 - \varepsilon) \sum_\alpha (1 - \varepsilon \eta_\beta \eta_\gamma) + (1 - \varepsilon) \sum_\alpha (1 - \varepsilon \eta_\beta)(1 - \varepsilon \eta_\gamma).$$

Pour $\varepsilon = 1$ on a évidemment $C \equiv 0 \pmod{16}$, et il ne reste que le cas de $\varepsilon = -1$, où on aura

$$C \equiv 8 + 4 \sum_\alpha (1 + \eta_\beta \eta_\gamma) + 2 \sum_\alpha (1 + \eta_\beta)(1 + \eta_\gamma).$$

On peut changer le signe de la troisième partie puisqu'elle est divisible par 8 et il s'ensuit

$$C \equiv 8 + 2 \sum (1 - \eta_\beta)(1 - \eta_\gamma) \pmod 8,$$

Si maintenant $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$, il vient

$$C \equiv 8 + 6(1-\eta)^2 \equiv 8 - 4(1+\eta) \equiv 4(1+\eta).$$

Dans le cas où $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\eta_3 = -\eta$, il vient le même résultat

$$C \equiv 4(1+\eta);$$

donc on a d'une manière générale

$$C \equiv 2(1-\varepsilon)(1+\eta),$$

η désignant le signe de la somme $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$.

Il nous reste encore le second cas, où

B. $$\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = -\left(\frac{p_3}{q}\right) = \varepsilon;$$

on aura, d'après (55),

$$Cl(-p_1 p_2 q) \equiv 2(1-\varepsilon), \qquad Cl(-p_1 p_3 q) \equiv 2(1-\eta_2),$$
$$Cl(-p_2 p_3 q) \equiv 2(1-\eta_1) \pmod 8,$$

et la congruence (b) devient

$$\begin{aligned} C \equiv \quad & 2(1-\varepsilon)(1+\varepsilon\eta_1\eta_2) + 2(1-\eta_2)(1-\varepsilon\eta_1\eta_3) + 2(1-\eta_1)(1-\varepsilon\eta_2\eta_3) \\ + \; & (1-\varepsilon)(1+\varepsilon\eta_2)(1-\varepsilon\eta_3) + (1-\varepsilon)(1+\varepsilon\eta_1)(1-\varepsilon\eta_3) \\ + \; & (1+\varepsilon)(1-\varepsilon\eta_1)(1-\varepsilon\eta_2). \end{aligned}$$

Si l'on a $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$, cette expression se simplifie comme il suit

$$4(1-\eta)(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)(1-\varepsilon\eta)^2 \equiv 2(1+\varepsilon)(1-\eta).$$

Si l'on a $\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3 = \eta$, il vient

$$\begin{aligned} C &\equiv 4(1-\eta)(1+\varepsilon) + 2(1-\varepsilon)(1+\varepsilon\eta)^2 + (1+\varepsilon)(1-\varepsilon\eta)^2 \\ &\equiv 2(1+\varepsilon)(1-\varepsilon\eta) \equiv 2(1+\varepsilon)(1-\eta). \end{aligned}$$

Si enfin $\eta_1 = \eta_3 = \eta$, $\eta_2 = -\eta$, on trouve pour le module 16

$$C \equiv 2(1-\varepsilon)[2 + (1+\eta) + (1-\varepsilon\eta)] + 2(1+\varepsilon)(1-\eta).$$

On n'altère pas la congruence en remplaçant la parenthèse [ ] par

$$-2 + (1 + \eta) + (1 + \eta) = 2\eta,$$

ou simplement par le nombre deux. Il vient ainsi

$$C \equiv 8 + 2(1 + \varepsilon)(1 + \eta) \pmod{16},$$

ce qu'on peut écrire, en vertu de la circonstance $\eta_1\eta_2 = -1$,

$$C \equiv 2(1 + \varepsilon)(1 - \eta\eta_1\eta_2) + 4(1 - \eta_1\eta_2).$$

Cette dernière formule reproduit les deux éventualités précédentes et reste définitive pour le cas B. On a ainsi le théorème suivant:

»Les quatre nombres premiers p_1, p_2, p_3, q satisfaisant à la condition $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, posons

$$\left(\frac{p_2}{p_3}\right) = \eta_1, \quad \left(\frac{p_3}{p_1}\right) = \eta_2, \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \eta_3, \quad \eta = \operatorname{sgn}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3);$$

on aura alors, pour le module seize

$$(57) \quad Cl(-p_1p_2p_3q) \equiv \begin{cases} 2(1 - \varepsilon)(1 + \eta), \quad \text{si} \ \left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = \varepsilon; \\ 2(1 + \varepsilon)(1 - \eta\eta_1\eta_2) + 4(1 - \eta_1\eta_2), \\ \quad \text{si} \ \left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = -\left(\frac{p_3}{q}\right) = \varepsilon. \end{cases}$$

14. La formule de Dirichlet (chap. II, (45))

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}D} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-4D)$$

permet d'étudier les restes, suivant les modules $4, 8, 16, \ldots$, des nombres de classes des discriminants pairs négatifs. Soient d'abord p, q deux nombres premiers qui satisfont à la condition $pq \equiv 1 \pmod 4$, et considérons la somme

$$A = \sum_{s=1}^{\frac{1}{4}pq} \frac{1 + \left(\frac{s}{p}\right)}{2} \, \frac{1 + \left(\frac{s}{q}\right)}{2} \left(\frac{s}{pq}\right)$$

qui évidemment est un entier. On a

$$4A = \sum_1^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{pq}\right) + \sum_1^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right) + \sum_1^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{q}\right)\left(\frac{s}{p^2}\right) + \sum_1^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p^2q^2}\right),$$

et la première somme a pour valeur

$$\sum_1^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{pq}\right) = \frac{1}{2}Cl(-4pq);$$

pour évaluer les autres, on doit distinguer les deux formes des nombres p, q, à savoir $4k+1$ et $4k+3$.

a) Soit d'abord $p \equiv q \equiv 1 \pmod 4$, on trouve aisément

$$\sum_1^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right) = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{2}\,Cl(-4p), \qquad \sum_1^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p^2q^2}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{4},$$

et par conséquent

$$4A = \frac{1}{2}Cl(-4pq) + \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{2}\left[Cl(-4p) + Cl(-4q)\right] + \frac{(p-1)(q-1)}{4};$$

en prenant les restes suivant le module 4, et faisant usage de la congruence connue

$$(58) \qquad Cl(-4p) \equiv \frac{p-1}{2} \equiv 1 - \left(\frac{2}{p}\right) \pmod 4,$$

on aura le théorème

$$(59) \qquad \frac{1}{2}Cl(-4pq) \equiv \frac{p-q}{4}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right) \equiv \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{2}{pq}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right) \pmod 4,$$

(p et q deux nombres premiers de la forme $4k+1$).

b) Soit maintenant $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$. On a d'abord

$$\sum_1^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right) = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right)\sum_1^{\frac{1}{4}p}\left(\frac{s}{p}\right).$$

et la formule suivante (chap. II, (31*))

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)=\frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\,Cl(-\Delta)$$

donne, pour $\Delta = p$,

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}p}\left(\frac{s}{p}\right)=\frac{\mathrm{I}+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}\,Cl(-p),$$

formule exacte aussi pour $p = 3$. Donc

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right)=\frac{\mathrm{I}+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}\left(\mathrm{I}-\left(\frac{q}{p}\right)\right)Cl(-p).$$

Enfin

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p^2q^2}\right)=\frac{(p-\mathrm{I})(q-\mathrm{I})}{4}+\mathrm{I},$$

et nous aurons

$$(60)\qquad \frac{\mathrm{I}}{2}\,Cl(-4pq)\equiv\frac{\mathrm{I}+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}\left[\mathrm{I}-\left(\frac{q}{p}\right)\right]+\frac{\mathrm{I}+\left(\frac{2}{q}\right)}{2}\left[\mathrm{I}-\left(\frac{p}{q}\right)\right]$$
$$+\frac{p-\mathrm{I}}{2}\,\frac{q-\mathrm{I}}{2}+\mathrm{I}\pmod 4$$

(p, q premiers de la forme $4k+3$).

Passons maintenant aux discriminants divisibles par huit. On a pour ce but la formule (42) du chap. II,

$$\sum_{\nu=\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\frac{\mathrm{I}}{2}\,Cl(-8\Delta),$$

lorsque $-\Delta$ est un discriminant fondamental, puis une formule équivalente à la formule (47) du même chapitre

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{3}{8}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{\mathrm{I}}{2}\,Cl(-8D),$$

pourvu que D soit un discriminant fondamental positif. On peut remplacer les deux formules par une seule

$$\text{(A)} \qquad \sum_1^{\frac{3}{8}P} \left(\frac{\nu}{P}\right) + \left(\frac{-4}{P}\right) \sum_1^{\frac{1}{8}P} \left(\frac{\nu}{P}\right) = \frac{1}{2} Cl(-8P),$$

P désignant un produit de nombre premiers impairs différents et positifs.

Rappelons encore le théorème établi à la fin de § 5

$$Cl(-8p) \equiv 1 - \left(\frac{2}{p}\right) \pmod 4,$$

p étant un nombre premier impair.

Cela étant, considérons la somme

$$A \quad \sum_1^{\frac{3}{8}pq} \frac{1+\left(\frac{s}{p}\right)}{2} \cdot \frac{1+\left(\frac{s}{q}\right)}{2} \left(\frac{s}{pq}\right) + \left(\frac{-4}{pq}\right) \sum_1^{\frac{1}{8}pq} \frac{1+\left(\frac{s}{p}\right)}{2} \cdot \frac{1+\left(\frac{s}{q}\right)}{2} \left(\frac{s}{pq}\right),$$

p et q étant deux nombres premiers impairs; cette somme se simplifie comme plus haut, et on a en particulier, faisant usage d'une écriture symbolique,

$$\left(\sum_1^{\frac{3}{8}pq} + \left(\frac{-4}{pq}\right) \sum_1^{\frac{1}{8}pq}\right) \left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right) = S\left(\frac{3q}{8}, \pm p\right) + \left(\frac{-4}{pq}\right) S\left(\frac{q}{8}, \pm p\right)$$
$$- \left(\frac{q}{p}\right) \left[S\left(\frac{3}{8}, \pm p\right) + \left(\frac{-4}{pq}\right) S\left(\frac{1}{8}, \pm p\right) \right],$$

le signe $\pm$ étant celui de $\left(\frac{-4}{p}\right)$. Je désigne par $B(p, q)$ le deuxième membre, puis j'emploie la formule

$$\left(\sum_1^{\frac{3}{8}pq} + \left(\frac{-4}{pq}\right) \sum_1^{\frac{1}{8}pq}\right) \left(\frac{s}{pq}\right) = \left[\frac{3pq}{8}\right] - \left[\frac{3p}{8}\right] - \left[\frac{3q}{8}\right]$$
$$+ \left(\frac{-4}{pq}\right) \left\{ \left[\frac{pq}{8}\right] - \left[\frac{p}{8}\right] - \left[\frac{q}{8}\right] \right\} - C,$$

pour obtenir la formule

$$4A = \frac{1}{2}Cl(-8pq) + B(p, q) + B(q, p) + C,$$

et nous allons déterminer les restes suivant le module quatre, des différents termes dont se compose le deuxième membre.

Soit d'abord $q \equiv 1 \pmod 8$, on aura, en écrivant simplement $S(x)$ au lieu de $S(x, \pm p)$, évidemment

$$B(p, q) = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{1}{2}Cl(-8p) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

Dans le cas, où $q \equiv 3 \pmod 8$, il vient

$$B(p, q) = -\left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right];$$

or, $S\left(\frac{1}{8}\right)$ étant un entier, on n'altère pas la congruence en changeant son signe et on a

$$B(p, q) \equiv \left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$
$$\equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right] \pmod 4$$

ou bien

$$B(p, q) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{-q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

Si l'on a $q \equiv 5 \pmod 8$, il vient d'abord

$$B(p, q) = S\left(\frac{7}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{5}{8}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right],$$

et si l'on fait usage de la relation (29) chap. II, à savoir

$$S(x) = - S(1 - x)\operatorname{sgn} D,$$

nous aurons dans notre cas

$$S(x) = \left(\frac{-4}{p}\right)S(1 - x),$$

de sorte que

$$B(p\,,q) = -\left(1 + \left(\frac{q}{p}\right)\right)\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

d'où

$$B(p\,,q) = -\left[1 + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\frac{1}{2}Cl(-8p) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

Soit enfin $q \equiv 7 \pmod 8$, nous aurons

$$B(p\,,q) = S\left(\frac{5}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{7}{8}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)\left[S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$= -\left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right],$$

d'où il suit

$$B(p\,,q) = -\left[1 + \left(\frac{-q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{-q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

En résumé, on a la congruence

$$B(p\,,q) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \varepsilon_q\left(\frac{p}{q}\right)\right] \pmod 4,$$

où

$$\varepsilon_q = -1 \quad \text{pour} \quad q \equiv 1 \pmod 8, \quad \text{et} \quad \varepsilon_q = 1 \quad \text{dans d'autres cas.}$$

Quant au nombre C, l'examen des différents cas vérifie les congruences suivantes, relatives au module quatre

$$C_{\rho,\sigma} \equiv \begin{cases} 1 - \left(\frac{-1}{p}\right), & \text{si } p \equiv q + 4 \pmod 8 \\ 1 - \left(\frac{2}{p}\right), & \text{si ou } p \equiv q \pmod 8, \text{ ou } p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Si l'on a $p \equiv \rho$, $q \equiv \sigma \pmod 8$, soit

$$\frac{1}{2}Cl(-8pq) \equiv J_{\rho,\sigma} \pmod 4;$$

on aura alors le tableau suivant des J:

$$
\begin{array}{llll}
J_{1,1} = 0, & J_{1,3} = 1 - \left(\frac{p}{q}\right), & J_{1,5} = 1 - \left(\frac{p}{q}\right), & J_{1,7} = 0, \\
 & J_{3,3} = 0, & J_{3,5} = 2, & J_{3,7} = 1 - \left(\frac{p}{q}\right), \\
 & & J_{5,5} = 2, & J_{5,7} = 1 - \left(\frac{p}{q}\right), \\
 & & & J_{7,7} = 0.
\end{array}
$$

Notons comme résultats particulièrement simples, relatifs au module huit,

$$
Cl(-8pq) \equiv \left\{
\begin{array}{l}
2\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right), \text{ si } p \equiv q + 4, \ \left(\frac{2}{p}\right) = 1; \\
\left(1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right), \text{ si } p \equiv q.
\end{array}
\right.
$$

Ces résultats, ainsi que ceux qu'on tire des formules (51), (59) et (60), ont été donnés par M. Hurwitz.[1] On pourrait continuer cette voie pour parvenir à des restes des nombres $Cl(-4pqr)$ et $Cl(-8pqr)$ pour le module seize, mais je me réserve d'y revenir à une autre occasion.

CHAPITRE IV.

1. Soient ξ, η, ξ_0, η_0 des quantités réelles et fractionnaires, qu'on peut supposer entre zéro et l'unité, alors les séries à double entrée qui figurent dans l'identité suivante

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
& v \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0 - (\xi+m)\eta_0]}}{(\eta+n)[(\xi+m)v + (\eta+n)w]} \\
& + w \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0 - (\xi+m)\eta_0]}}{(\xi+m)[(\xi+m)v + (\eta+n)w]} \\
& = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i(\xi+m)\eta_0}}{\xi+m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\eta+n)\xi_0}}{\eta+n}
\end{aligned}
\right.
$$

[1] Acta, t. 19.

seront convergentes, si v et w sont des quantités complexes dont le rapport ne soit pas réel.

La formule élémentaire

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\sigma k\pi i}}{u+k} = 2\pi i \frac{e^{2u(1-\sigma)\pi i}}{e^{2u\pi i}-1}, \qquad (0<\sigma<1), \tag{2}$$

permet de transformer les dites séries à double entrée en séries simples et à convergence rapide, en admettant toutefois que l'on peut, dans les séries doubles, intervertir l'ordre de sommation. Des considérations élémentaires que je me dispense de développer vérifient que cette dernière opération est légitime, et en remplaçant la formule (2) par la formule équivalente

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\sigma\pi i(u+k)}}{u+k} = \frac{2\pi i}{1-e^{-2u\pi i}}, \tag{2'}$$

nous concluons

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+m} \frac{e^{2\eta_0\pi i+\frac{2\pi i}{w}(v-\xi_0 v-\eta_0 w)(\xi+m)}}{e^{\frac{2v\pi i}{w}(\xi+m)+2\eta\pi i}-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta+n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\xi_0 v+\eta_0 w)(\eta+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\eta+n)+2\xi\pi i}-1}$$

$$= \frac{2\pi i e^{2\xi\eta\pi i}}{(e^{2\xi\pi i}-1)(e^{2\eta\pi i}-1)}. \tag{3}$$

Pour l'exactitude de cette relation les conditions $0<\xi_0<1$, $0<\eta_0<1$ sont encore nécessaires, mais les quantités ξ et η peuvent être quelconques.

Cette relation (3) n'est qu'un cas très particulier d'une formule de transformation de la transcendante qui figure au premier membre et dont la théorie a été ébauchée par Kronecker. Avant d'avoir eu l'occasion d'étudier le mémoire du grand géomètre, nous avons établi la formule (3) d'une manière différente [1] que je me permets de reproduire ici.

Soient v_1, v_2 deux quantités complexes dont le rapport ne soit pas réel, puis u_1 et u_2 deux quantités réelles contenues entre zéro et l'unité, enfin w_1, w_2, a des quantités complexes quelconques, et considérons l'intégrale

$$\int_{(c)} \frac{e^{2x\pi i(u_1 v_1+u_2 v_2)}}{(e^{2\pi i(v_1 x-w_1)}-1)(e^{2\pi i(v_2 x-w_2)}-1)} \frac{dx}{x+a}$$

[1] Rozpravy české Akademie, II[e] année, n° 23, p. 22 (1893).

prise le long d'une ligne fermée C ne passant par aucun des pôles de la fonction sous le signe somme. Ces pôles sont

$$x = -a\,,\ \frac{n + w_1}{v_1}\,,\ \frac{n + w_2}{v_2}\,,\quad (n = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots)$$

et on peut admettre qu'ils sont différents entre eux et simples, par conséquent. Une digression tout-à-fait simple permet de voir que l'on peut faire s'éloigner à l'infini la ligne C de la sorte que la fonction sous le signe somme devient infiniment petite le long de cette ligne-là, et que par conséquent, l'intégrale tend vers zéro. D'après le théorème de CAUCHY, la somme des résidus de la fonction intégrée tendra vers zéro et l'on a ainsi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_1 + av_1 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(w_1 v_2 - w_2 v_1 + n v_2)} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_2 + av_2 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_2}(w_2+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(w_2 v_1 - w_1 v_2 + n v_1)} - 1}$$

$$+ \frac{2\pi i e^{-2sa\pi i}}{(e^{-2\pi i(w_1 + av_1)} - 1)(e^{-2\pi i(w_2 + av_2)} - 1)} = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger, $s = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Les lettres u_1 et u_2 n'entrent pas directement en cette relation, d'où il suit que s est une variable indépendante assujettie à la condition que le point s soit à l'intérieur du parallélogramme $(0\,, v_1\,, v_1 + v_2\,, v_2)$. Faisant $a = 0$, changeons w_2 en $-w_2$ et, dans la seconde série, n en $-n$; il vient

$$\text{(a)}\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_1 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2v_2\pi i}{v_1}(w_1+n) + 2w_2\pi i} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_2 + n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(v_1 - s)(w_2+n) + 2w_1\pi i}}{e^{\frac{2v_1\pi i}{v_2}(w_2+n) + 2w_1\pi i} - 1}$$

$$= \frac{2\pi i}{(e^{2w_2\pi i} - 1)(1 - e^{2w_1\pi i})}.$$

Or l'équation (3), si l'on y fait $\xi_0 v + \eta_0 w = s$, s'écrira

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{2\eta\pi i + \frac{2\pi i}{w}(v - s)(\xi + m)}}{e^{\frac{2v\pi i}{w}(\xi+m) + 2\eta\pi i} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v}(\eta+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\eta+n) + 2\xi\pi i} - 1}$$

$$= \frac{2\pi i e^{2\eta\pi i}}{(e^{2\xi\pi i} - 1)(e^{2\eta\pi i} - 1)}$$

et elle devient identique avec l'équation (a), en faisant

$$w_2 = \xi, \qquad w_1 = \eta, \qquad v_1 = v, \qquad v_2 = w.$$

J'introduirai maintenant les variables

$$\omega = \frac{w}{v}, \qquad \frac{s}{v} = u,$$

en supposant que la *partie imaginaire de ω soit positive;* la quantité u est supposée telle que le point qui la représente soit à l'intérieur du parallélogramme aux sommets $(0, 1, 1+\omega, \omega)$. On aura, sous la forme définitive, la relation

$$(3^*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta + n} \frac{e^{2u\pi i(\eta+n)}}{e^{2\omega\pi i(\eta+n)+2\xi\pi i} - 1} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{2\eta\pi i + \frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i} - 1}$$
$$= -\frac{\pi i}{2} \frac{e^{\eta\pi i}}{\sin \eta\pi} \frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin \xi\pi}.$$

Nous allons nous en servir dans les cas où ξ et η sont réelles et contenues entre zéro et l'unité; sous cette hypothèse on pourra décomposer la seconde série qui figure au premier membre de (3^*),

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{2\eta\pi i + \frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i} - 1},$$

en séparant les termes $m \geq 0$ des termes $m < 0$; en écrivant $-m$ au lieu de m dans ces derniers, nous aurons les deux séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{\omega}u(\xi+m)}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)-2\eta\pi i}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \xi} \frac{e^{2\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(m-\xi)}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)+2\eta\pi i}}.$$

Nous allons les remplacer par des séries à double entrée qui résultent en remplaçant la quantité

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m\pm\xi)\mp 2\eta\pi i}}$$

par la série géométrique, convergente dans les conditions admises,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m\pm\xi)n \mp 2n\eta\pi i}.$$

Si, dans la seconde série ainsi obtenue, on met n au lieu de $n+1$, le résultat s'écrira

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+m} \frac{e^{2\eta\pi i+\frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i}-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m+\xi} e^{-2n\eta\pi i-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\sigma)(n+u)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m-\xi} e^{2n\eta\pi i-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\sigma)(n-u)}.$$

C'est sous la forme suivante ainsi vérifiée que nous allons employer la formule (3^*):

$$(4) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta+n} \frac{e^{2u\pi i(\eta+n)}}{e^{2\omega\pi i(\eta+n)+2\xi\pi i}-1}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m+\xi} e^{-2n\eta\pi i-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m-\xi} e^{2n\eta\pi i-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin \xi\pi}(\cot \eta\pi + i).$$

J'y pose $\eta = \frac{h}{\Delta}$, en désignant par Δ la valeur absolue d'un discriminant fondamental négatif, je multiplie de part et d'autre par le signe de Legendre $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ et j'ajoute les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, \Delta-1$.

Les sommations relatives à h dans les deux séries à double entrées s'effectuent directement au moyen des sommes de Gauss

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) e^{\pm\frac{2nh\pi i}{\Delta}} = \pm\left(\frac{-\Delta}{n}\right) i\sqrt{\Delta},$$

et pour obtenir sous forme simple la somme engendrée par la première série qui est à simple entrée, j'effectue la substitution $h + n\Delta = m$; on aura ainsi

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{sgn} m \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{1}{m} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|m|},$$

et le résultat suivant

$$\frac{\pi i}{2}\frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta}$$

$$\Delta\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|m|}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}-1}-i\sqrt{\Delta}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)}$$

$$+i\sqrt{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}.$$

En faisant usage de la formule de Lebesgue

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta}=\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta),$$

nous aurons donc la relation suivante

$$\text{(I)}\qquad -\frac{2\pi i}{\tau}Cl(-\Delta)\frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi}$$

$$=\sqrt{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|m|}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}-1}-i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)}$$

$$+i\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}$$

dont nous allons tirer plusieurs conséquences.

Je remplace Δ par Δ_1, τ par τ_1 en introduisant un nouveau discriminant fondamental négatif $-\Delta_2$ avec l'indice correspondant τ_2. Mais avant de commencer les calculs, nous devons transformer la première série qui figure au second membre. En l'écrivant d'abord

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta}+\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}-2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}-2\xi\pi i}}$$

on la transforme en des séries à double entrée, au moyen de l'identité

$$\frac{1}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}\pm 2\xi\pi i}}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{2mn\frac{\omega\pi i}{\Delta}\pm 2n\xi\pi i}.$$

On aura ainsi au lieu de (I)

$$
(\mathrm{I}^\circ)\quad
\left|
\begin{aligned}
&-\frac{2\pi i}{\tau_1}Cl(-\Delta_1)(\cot\xi\pi - i)\\
&= -\sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}+2n\xi\pi i+\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}}\\
&\quad+\sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}-2n\xi\pi i+\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}}\\
&\quad-i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)}\\
&\quad+i\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Je pose maintenant $\xi = \frac{h}{\Delta_2}$, et après avoir multiplié les deux membres par le signe de Legendre $\left(\frac{-\Delta_2}{h}\right)$, j'ajoute les résultats pour

$$h = 1,\ 2,\ \ldots,\ \Delta_2 - 1.$$

En effectuant la sommation dans les deux dernières séries au moyen de la substitution $h + m\Delta_2 = k$, resp. $-h + m\Delta_2 = k$, nous aurons la relation

$$
\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\tau_1\tau_2}Cl(-\Delta_1)\,Cl(-\Delta_2) &= \sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}+e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}}{2m}\\
&\quad+\sqrt{\Delta_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{n}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{k}\right)e^{-\frac{2nk\pi i}{\Delta_2\omega}}\frac{e^{\frac{2ku\pi i}{\Delta_2\omega}}+e^{-\frac{2ku\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2k}
\end{aligned}
$$

ou en mettant $\Delta_1\omega$ et $\Delta_1 u$ au lieu de ω et u,

$$
(\mathrm{II})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{\tau_1\tau_2}Cl(-\Delta_1)\,Cl(-\Delta_2)\\
&= \sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)e^{2mn\omega\pi i}\frac{e^{2mu\pi i}+e^{-2mu\pi i}}{2m}\\
&\quad+\sqrt{\Delta_2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta_1\Delta_2\omega}}\frac{e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}+e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2n}
\end{aligned}
\right.
$$

Ici on peut passer à la limite pour $u = 0$, je pose ensuite $\Delta_1 = \Delta_2$; la formule se simplifie comme il suit

$$\left(\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)\right)^2 \pi = \sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{mn}\right) \frac{1}{m} \left(e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta}} + e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta\omega}}\right)$$

où nous avons mis $\frac{\omega}{\Delta}$ au lieu de ω. En grouppant les termes suivant les valeurs du produit $m.n = k$, la somme $\sum \frac{1}{m}$ devient $\frac{1}{k}\Sigma n = \frac{\theta_1(k)}{k}$, si l'on convient de représenter par $\theta_1(k)$ la somme des diviseurs du nombre k.

On aura alors, en faisant pour abréger $\omega = ix$, la relation

$$\text{(III)} \qquad Cl(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\theta_1(n)}{n} \left(e^{-\frac{2nx\pi}{\Delta}} + e^{-\frac{2n\pi}{\Delta x}}\right),$$

d'où pour $x = 1$ la formule encore plus simple

$$\text{(III°)} \qquad Cl(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\theta_1(n)}{n} e^{-\frac{2n\pi}{\Delta}}.$$

L'importance pratique de cette relation n'est point considérable, puisque pour de grandes valeurs de Δ la convergence devient lente; mais cela ne veut pas dire qu'elle ne mérite pas d'intérêt.

Revenons sur la formule (II) en remettant les valeurs primitives ω et u des variables, à savoir

$$\frac{4\pi}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1)Cl(-\Delta_2)$$
$$= \sqrt{\Delta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}} \frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}} + e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}}{2m}$$
$$+ \sqrt{\Delta_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta_2\omega}} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}} + e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2n};$$

on peut effectuer l'une des deux sommations en faisant usage de la formule

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) x^{\mu} = \frac{Q(x)}{1 - x^{\Delta}},$$

$Q(x)$ étant le polynôme dont il a été question dans le chapitre III; il vient ainsi

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{4\pi}{\tau_1 \tau_2} Cl(-\Delta_1) Cl(-\Delta_2) \\ &= \sqrt{\Delta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right) \frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}} + e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}}{2m} \frac{Q\left(e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta_1}}, -\Delta_2\right)}{1 - e^{\frac{2m\Delta_2\omega\pi i}{\Delta_1}}} \\ &+ \sqrt{\Delta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}} + e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2n} \frac{Q\left(e^{-\frac{2n\pi i}{\Delta_2\omega}}, -\Delta_1\right)}{1 - e^{-\frac{2n\pi\Delta_1\pi i}{\Delta_2\omega}}}, \end{aligned} \right.$$

où l'on peut prendre $u = 0$. Posant par exemple $\Delta_1 = \Delta_2$, $\omega = i$, nous aurons

$$Cl(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{Q\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta}}\right)}{1 - e^{-2m\pi}}.$$

Mais on parvient à des formules plus importantes, si l'on effectue les sommations au moyen des relations

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) x^n = \frac{Q(x, -\Delta_2)}{1 - x^{\Delta_2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) \frac{x^n}{n} = \frac{1}{i\sqrt{\Delta_2}} \left(-\log c + \log \frac{A(x, -\Delta_2)}{B(x, -\Delta_2)}\right),$$

où $\log c$ est une constante numérique connue. Or

$$\frac{1}{i} \log \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{i} \log \frac{Y - i\sqrt{\Delta}\, Z}{Y + i\sqrt{\Delta}\, Z} = -2 \operatorname{arctg} \frac{Z\sqrt{\Delta}}{Y},$$

et on aura

$$\sqrt{\Delta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) \frac{x^n}{n} = \gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z(x, -\Delta_2)}{Y(x, -\Delta_2)}.$$

en faisant $i \log c = \gamma$. La formule (II) donne alors pour $u = 0$, $\omega = ix$

$$
\text{(V)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{4\pi}{\tau_1 \tau_2} Cl(-\Delta_1) Cl(-\Delta_2) \\
& = \sqrt{\Delta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m} \right) \frac{1}{m} \frac{Q\left(e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta_1}}, -\Delta_2\right)}{1 - e^{-\frac{2m\Delta_2 x\pi}{\Delta_1}}} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m} \right) \left\{ \gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta_2 x}}, -\Delta_2\right)}{Y\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta_2 x}}, -\Delta_2\right)} \right\},
\end{aligned}
\right.
$$

où la constante γ doit évidemment avoir la valeur

$$\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z(0, -\Delta_2)}{Y(0, -\Delta_2)},$$

c'est à dire

$$
\gamma = \begin{cases}
0 & \text{pour} \quad \Delta_2 > 4, \\
\frac{2\pi}{3} & \text{pour} \quad \Delta_2 = 3, \\
\pi & \text{pour} \quad \Delta_2 = 4.
\end{cases}
$$

En spécialisant Δ_2 on aura autant de formules pour le calcul de $Cl(-\Delta_1)$ que l'on voudra. Pour $\Delta_2 = 4$ on a

$$Q(z) = z - z^3, \qquad Y = 2z, \qquad Z = 1,$$

de sorte que

$$\frac{Q(z)}{1 - z^{\Delta_2}} = \frac{z}{1 + z^2}, \qquad \gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z}{Y} = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{z} = 2 \operatorname{arctg} z,$$

et par conséquent, la formule (V) donne en changeant x en $\frac{1}{2x}$,

$$
\text{(V}^0\text{)} \qquad
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2\tau} Cl(-\Delta) = & \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m} \right) \operatorname{arctg} e^{-\frac{mx\pi}{\Delta}} \\
& + \frac{1}{4} \sqrt{\Delta} \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m} \right) \frac{1}{m \cos\operatorname{hyp} \frac{m\pi}{x}},
\end{aligned}
$$

x désignant une quantité positive arbitraire.

Si l'on fait $\Delta_2 = 3$, on aura $Q(z) = z - z^2$, $Y = 2z + 1$, $Z = 1$, de sorte que

$$\frac{Q(z)}{1 - z^3} = \frac{z - z^2}{1 - z^3},$$

$$\gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z}{Y} = \frac{2\pi}{3} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2z + 1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{3}}{2 + z}$$

et la formule (V) donne

$$\frac{2\pi}{3\tau} Cl(-\Delta) = \sqrt{\Delta} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta}} - e^{-\frac{4mx\pi}{\Delta}}}{1 - e^{-\frac{6mx\pi}{\Delta}}}$$

$$+ 2 \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{e^{-\frac{2m\pi}{3x}}\sqrt{3}}{2 + e^{-\frac{2m\pi}{3x}}}$$

ou bien

$$(\mathrm{V}^1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\pi}{3\tau} Cl(-\Delta) &= \sqrt{\Delta} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{\sin \operatorname{hyp} \frac{mx\pi}{\Delta}}{\sin \operatorname{hyp} \frac{3mx\pi}{\Delta}} \\ &+ 2 \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1 + 2e^{\frac{2m\pi}{3x}}}. \end{aligned} \right.$$

Prenons encore $\Delta_2 = 8$, où l'on a

$$Q = z + z^3 - z^5 - z^7, \qquad Y = 2(z^2 - 1), \qquad Z = z,$$

et

$$\frac{Q}{1 - z^8} = \frac{z + z^3}{1 + z^4}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{2\pi}{\tau} Cl(-\Delta) = \sqrt{\Delta} \sum \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta}} + e^{-\frac{6mx\pi}{\Delta}}}{1 + e^{-\frac{8mx\pi}{\Delta}}}$$

$$+ 2 \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{m\pi}{4x}}}{1 - e^{-\frac{m\pi}{2x}}}$$

ou bien, en changeant x en $\frac{x}{2}$,

$$(\mathrm{V}^2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2\pi}{\tau} Cl(-\Delta) &= \sqrt{\Delta} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{\cos\operatorname{hyp}\dfrac{mx\pi}{\Delta}}{\cos\operatorname{hyp}\dfrac{2mx\pi}{\Delta}} \\ &\quad + 2 \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{m\pi}{2x}} - e^{-\frac{m\pi}{2x}}}. \end{aligned}\right.$$

2. Revenons sur l'équation (4). En représentant par D une discriminant fondamental positif, posons-y $\eta = \frac{h}{D}$, multiplions de part et d'autre par $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$. Il vient

$$\begin{aligned} D \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{e^{\frac{2mu\pi i}{D}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D} + 2\xi\pi i} - 1} &+ \sqrt{D} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{m+\xi} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} \\ &+ \sqrt{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{m-\xi} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)} = 0. \end{aligned}$$

Séparons, dans la première somme, les termes à m positif, et faisons usage de l'identité

$$\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{D}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D} + 2\xi\pi i} - 1} = -e^{\frac{2mu\pi i}{D}} - \frac{e^{\frac{2m\pi i}{D}(\omega+u) + 2\xi\pi i}}{1 - e^{\frac{2m\omega\pi i}{D} + 2\xi\pi i}};$$

cette transformation permettra de mettre la relation obtenue sous la forme suivante

$$(\mathrm{VI})\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} e^{\frac{2mu\pi i}{D}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{m+\xi} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{m-\xi} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)} \\ &\quad - \sqrt{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{e^{\frac{2m\pi i}{D}(\omega+u) + 2\xi\pi i}}{1 - e^{\frac{2m\omega\pi i}{D} + 2\xi\pi i}} - \sqrt{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{e^{\frac{2m\pi i}{D}(\omega-u) - 2\xi\pi i}}{1 - e^{\frac{2m\omega\pi i}{D} - 2\xi\pi i}}. \end{aligned}\right.$$

(D un discriminant positif fondamental, ω ayant sa partie imaginaire positive, puis $0 < \xi < 1$, et enfin u désignant une quantité de la forme $\sigma + \sigma'\omega$, où $0 < \sigma < 1$, $0 < \sigma' < 1$).

En passant à la limite pour $u = 0$, cette équation devient

$$(\mathrm{VI}^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}n(m+\xi)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}n(m-\xi)} \\ &-\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}\left(\frac{e^{2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}} + \frac{e^{-2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}-2\xi\pi i}}\right). \end{aligned}\right.$$

La première série à double entrée qui figure au second membre contient des termes qui pour $\xi = 0$ deviennent infinis; ce sont les termes où $m = 0$ et leur somme est

$$(\mathrm{a})\qquad \frac{1}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2n\xi\pi i}{\omega}} = \frac{1}{\xi}\,\frac{Q\left(e^{-\frac{2\xi\pi i}{\omega}}, D\right)}{1-e^{-\frac{2D\xi\pi i}{\omega}}}.$$

On peut passer à la limite pour $\xi = 0$ dans les termes qui restent, et il ne s'agit que de la limite de la quantité (a). Nous savons que pour les discriminants positifs la fonction $Q(x)$ a cette propriété que $Q(1) = 0$, $Q'(1) = 0$, et il s'ensuit que l'on aura

$$\lim_{\xi=0}\left\{\frac{1}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2n\xi\pi i}{\omega}}\right\} = \frac{\pi i}{D\omega}Q''(1, D) = \frac{\pi i}{D\omega}\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h(h-1).$$

A cause de la relation

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h = 0$$

cette quantité s'écrira

$$\frac{\pi i}{D\omega}\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2.$$

et notre conséquence de l'équation (VI°), relative au cas de $\xi = 0$, prend la forme

$$\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} = \frac{\pi i}{D\omega}\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mn\pi i}{\omega}}$$

$$2\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}}{1 - e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}}.$$

Le premier membre a pour valeur la quantité $Cl(D)\log E(D)$, et au second membre la série à double entrée devient une série simple, si l'on effectue la sommation relative à m, en faisant usage de la série logarithmique. Posant enfin $\omega = ix$, on aura la relation

$$(\mathrm{VI}^1)\qquad Cl(D)\log E(D) = \frac{\pi}{Dx}\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\log\left(1 - e^{-\frac{2n\pi}{x}}\right)$$

$$- 2\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\,\frac{1}{e^{\frac{2nx\pi}{D}} - 1},$$

x désignant une quantité positive arbitraire.

L'équation (VI°) fournit une formule plus commode pour le calcul numérique, si l'on y prend $\xi = \frac{1}{2}$; écrivant $2m + 1 = \lambda$, resp. $2m - 1 = \lambda$, elle devient d'abord

$$\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{\lambda n\pi i}{\omega}}$$

$$+ 2\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}}{1 + e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}},$$

où $\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots$ En faisant usage de la formule

$$2\sum_{\lambda}\frac{x^{\lambda}}{\lambda} = \log\frac{1 + x}{1 - x}$$

le second membre se simplifie et on aura, en posant comme précédemment $\omega = ix$, la formule cherchée

$$Cl(D)\log E(D) = 2\sum_{n=1}^{x}\left(\frac{D}{n}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{n\pi}{x}}}{1-e^{-\frac{n\pi}{x}}}$$

$$+\, 2\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\,\frac{1}{e^{\frac{2nx\pi}{D}}-1}\,.$$

Le mémoire présenté à l'Académie contient encore quelques applications de certains développements demiconvergents. Si je les supprime ici, c'est puisque j'ai en vue d'y revenir bientôt en leur ajoutant d'autres détails que j'ai dû supprimer dans le mémoire primitif.

ERRATA T. 29.

Page 344 et 345. Remplacer dans les symboles

$$\left(\frac{-\Delta}{ax^2+bxy+cy^2}\right) \text{ et } \left(\frac{-\Delta}{a\,,\,b\,,\,c}\right)$$

le numérateur $-\Delta$ par $-\Delta_1$.

Page 403, formule (31), mettre le signe »moins» devant $\left(\frac{4}{\Delta}\right)$.

LETTRE

A Monsieur le rédacteur de la Revue Générale des Sciences.

PAR

I. RICHARD

à DIJON.

Dans son numéro du 30 mars 1905, la *Revue* signale certaines contradictions qu'on rencontre dans la théorie générale des ensembles.

Il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à la théorie des nombres ordinaux pour trouver de telles contradictions. En voici une qui s'offre dès l'étude du continu, et à laquelle plusieurs autres se ramèneraient probablement:

Je vais définir un certain ensemble de nombres, que je nommerai l'ensemble E, à l'aide des considérations suivantes:

Ecrivons tous les arrangements deux à deux des vingt-six lettres de l'alphabet français, en rangeant ces arrangements par ordre alphabétique, puis, à la suite tous les arrangements trois à trois, rangés par ordre alphabétique, puis, à la suite, ceux quatre à quatre, etc. Ces arrangements peuvent contenir la même lettre répétée plusieurs fois, ce sont des arrangements avec répétition.

Quel que soit l'entier p, tout arrangement des vingt-six lettres p à p se trouvera dans ce tableau, et comme tout ce qui peut s'écrire avec un nombre fini de mots est un arrangement de lettres, tout ce qui peut s'écrire se trouvera dans le tableau dont nous venons d'indiquer le mode de formation.

La définition d'un nombre se faisant avec des mots, et ceux-ci avec des lettres, certains de ces arrangements seront des définitions de nombres. Biffons de nos arrangements tous ceux qui ne sont pas des définitions de nombres.

Soit u_1 le premier nombre défini par un arrangement, u_2 le second, u_3 le troisième, etc.

On a ainsi, rangés dans un ordre déterminé, *tous les nombres définis à l'aide d'un nombre fini de mots.*

Donc: Tous les nombres qu'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots forment un ensemble dénombrable.

Voici maintenant où est la contradiction. On peut former un nombre n'appartenant pas à cet ensemble.

«Soit p la $n^{\text{ième}}$ décimale du $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E; formons un nombre ayant zéro pour partie entière, et pour $n^{\text{ième}}$ décimale $p+1$, si p n'est égal ni à huit, ni à neuf, et l'unité dans le cas contraire.» Ce nombre N n'appartient pas à l'ensemble E. S'il était le $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E, son $n^{\text{ième}}$ chiffre serait le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ce nombre, ce qui n'est pas.»

Je nomme G le groupe de lettres entre guillemets.

Le nombre N est défini par les mots du groupe G, c'est à dire par un nombre fini de mots; il devrait donc appartenir à l'ensemble E. Or, on a vu qu'il n'y appartient pas.

Telle est la contradiction.

Montrons que cette contradiction n'est qu'apparente. Revenons à nos arrangements. Le groupe de lettres G est un de ces arrangements; il existera dans mon tableau. Mais, à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble E, et celui-ci n'est pas encore défini. Je devrai donc le biffer. Le groupe G n'a de sens que si l'ensemble E est totalement défini, et celui-ci ne peut l'être que par un nombre infini de mots. *Il n'y a donc pas contradiction.*

On peut encore remarquer ceci: L'ensemble de l'ensemble E et du nombre N forme un autre ensemble. Ce second ensemble est dénombrable. Le nombre N peut être intercalé à un certain rang k dans l'ensemble E, en reculant d'un rang tous les autres nombres de rang supérieur à k. Continuons à appeler E l'ensemble ainsi modifié. Alors le groupe de mots G définira un nombre N' *différent de* N, puisque le nombre N occupe maintenant le rang k, et que le $k^{\text{ième}}$ chiffre de N' n'est pas égal au $k^{\text{ième}}$ chiffre du $k^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E.

ON THE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION OF A LINEAR SUBSTITUTION

BY

T. J. I'A BROMWICH
in GALWAY, Ireland.

1. The equation in λ

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \dots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}-\lambda, & a_{2,3}, & \dots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}-\lambda, & \dots, & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \dots, & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

has been discussed by many writers; the following results are well known.

The roots are real in case all the numbers a are *real* and such that $a_{r,s}=a_{s,r}$; that is, if the matrix of a's is symmetric.[1]

The roots have the absolute value unity, if the matrix of a's belongs to a real orthogonal substitution.[2]

The roots are pure imaginaries or zero, in case the a's are *real* and $a_{r,r}=0$, $a_{r,s}=-a_{s,r}$; that is, if the matrix of a's is alternate.[3]

However, in spite of these results relating to special types of the matrix a, nothing was known of the nature of the roots for a general

[1] CAUCHY, 1829.

[2] BRIOSCHI, 1854.

[3] WEIERSTRASS, 1879.

matrix, until the problem was attacked by BENDIXSON[1] in 1900; he obtained upper and lower limits for the magnitude of the real and imaginary parts of the roots, taking all the numbers a to be real. The extension to the case of complex numbers a was made by HIRSCH[2] in 1902.

In what follows, we shall obtain narrower limits for the imaginary parts of the roots; incidentally, we also obtain BENDIXSON's and HIRSCH's limits for the real parts of the roots.

2. Take, in the first instance, all the a's to be *real;* and then write

$$\left.\begin{array}{lll} b_{r,r} = a_{r,r}, & b_{r,s} = \quad b_{s,r} = \frac{1}{2}(a_{r,s} + a_{s,r}), & \\ c_{r,r} = 0, & c_{r,s} = -c_{s,r} = \frac{1}{2}(a_{r,s} - a_{s,r}), & \\ A = \Sigma a_{r,s} x_r y_s, & B = \Sigma b_{r,s} x_r y_s, & C = \Sigma c_{r,s} x_r y_s. \end{array}\right\} \scriptstyle (r,s=1,2,\dots,n)$$

It is now obvious that $A = B + C$, and that the bilinear forms B, C, are, respectively, symmetric and alternate. Following FROBENIUS, let us also write E for the unit form $\Sigma x_r y_r$ and let $|A - \lambda E|$ denote the determinant written out at the beginning of § 1, while $|B - \lambda E|$, $|C - \lambda E|$, stand for similar determinants with b's, c's in place of a's.

Suppose that $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, are the (real) roots of $|B - \lambda E|$, it is then known from a theorem due to WEIERSTRASS[3] that a *real* linear substitution can be found which, when applied to the x's and y's, reduces B to the form $B_1 = \Sigma \lambda_r x_r y_r$, while it leaves E unchanged. This substitution will change C into C_1, another alternate form with real coefficients; but it will not alter the roots of the fundamental equation. Thus the equation $|B_1 + C_1 - \lambda E| = 0$ has the same roots as $|A - \lambda E| = 0$.

Suppose now that $\lambda = \alpha + i\beta$ is one of these roots; then the bilinear form $B_1 + C_1 - (\alpha + i\beta)E$ has the rank[4] $(n - 1)$ at most. Consequently values of $x_1, x_2, \dots, x_n$ can be chosen which make the form zero, whatever

[1] Öfversigt af K. Vet. Akad. Förh. Stockholm, 1900, Bd. 57, p. 1099; Acta Mathematica, t. 25, 1902, p. 359.

[2] Acta Mathematica, l. c., p. 367.

[3] Berliner Monatsberichte, 1858; Ges. Werke, Bd. 1, p. 243.

[4] Rang, according to FROBENIUS.

values may be taken for $y_1, y_2, \ldots, y_n$; naturally, the values for the x's will usually be complex, and some of them must be complex, unless β is zero. Write for these special values

$$x_r = p_r + iq_r, \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

and let us choose for the y's the conjugate complex numbers

$$y_r = p_r - iq_r, \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

it being understood that p_r and q_r are real. With these values for x_r, y_r, we find

$$B_1 = \Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2), \qquad E = \Sigma(p_r^2 + q_r^2); \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

further

$$x_r y_s - x_s y_r = -2i(p_r q_s - p_s q_r),$$

so that C_1 becomes a pure imaginary. But, according to what we have already explained,

$$\Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2) + C_1 - (\alpha + i\beta)\Sigma(p_r^2 + q_r^2) = 0;$$

thus, since C_1 is imaginary only, we have

$$\Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2) - \alpha\Sigma(p_r^2 + q_r^2) = 0.$$

Hence

$$\alpha = \frac{\Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2)}{\Sigma(p_r^2 + q_r^2)},$$

and consequently α *lies between the greatest and least of the numbers* λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, which is one of BENDIXSON's results (l. c. Theorem II).

We proceed next to obtain a corresponding theorem for β. Let us suppose that the non-zero roots of the equation $|C - \lambda E| = 0$ are given by $\lambda = \pm i\mu_1, \pm i\mu_2, \ldots, \pm i\mu_\nu$, where $2\nu < n$; so that there are $(n - 2\nu)$ zero roots of this equation. By a theorem of WEIERSTRASS,[1] stated in § 1, the numbers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ are all real; and they may be supposed positive without loss of generality. Further the invariant-factors of the determinant $|C - \lambda E| = 0$ are all *linear*.[1] It is then possible to find a

[1] WEIERSTRASS. Berliner Monatsberichte, 1870; Ges. Werke, Bd. 3, p. 139.

real linear substitution, which, when applied to the x's and y's, reduces C to the form

$$C_2 = \mu_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \mu_2(x_3y_4 - x_4y_3) + \ldots + \mu_\nu(x_{2\nu-1}y_{2\nu} - x_{2\nu}y_{2\nu-1}),$$

but leaves E unchanged.[1] Owing to the nature of this substitution, B is changed to B_2 another bilinear form which is symmetric and has real coefficients. Then, just as in the last case, values of the x's can be chosen so that $B_2 + C_2 - (\alpha + i\beta)E = 0$, for all values of the y's. Let these values of the x's be given by

$$x_r = p_r + iq_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

and take

$$y_r = p_r - iq_r. \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

Then

$$x_ry_r = p_r^2 + q_r^2, \qquad x_ry_s + x_sy_r = 2(p_rp_s + q_rq_s),$$

and consequently B_2 is real; but

$$x_ry_s - x_sy_r = -2i(p_rq_s - p_sq_r)$$

so that

$$C_2 = -2i[\mu_1(p_1q_2 - p_2q_1) + \ldots + \mu_\nu(p_{2\nu-1}q_{2\nu} - p_{2\nu}q_{2\nu-1})].$$

Hence, from the equation $B_2 + C_2 - (\alpha + i\beta)E = 0$ we deduce

$$\beta\Sigma(p_r^2 + q_r^2) = -2[\mu_1(p_1q_2 - p_2q_1) + \ldots + \mu_\nu(p_{2\nu-1}q_{2\nu} - p_{2\nu}q_{2\nu-1})].$$

But, in absolute value $2(p_1q_2 - p_2q_1)$ is not greater than $(p_1^2 + q_2^2) + (p_2^2 + q_1^2)$, and consequently

$$|\beta|\Sigma(p_r^2 + q_r^2) \leq [\mu_1(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + \ldots + \mu_\nu(p_{2\nu-1}^2 + q_{2\nu-1}^2 + p_{2\nu}^2 + q_{2\nu}^2)].$$

From which it is clear that *the absolute value of β cannot exceed the greatest of the numbers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$;* which is obviously analogous to Bendixson's Theorem II. We shall now see that *this theorem usually gives narrower limits for β than Bendixson's Theorem I, and cannot give wider limits.*

[1] That such a reduction is possible is contained implicitly in Kronecker's work on the reduction of a single bilinear form. For an explicit treatment, see my papers, Proc. Lond. Math. Soc., vol. 32, 1900, p. 321, § 4; vol. 33, 1901, p. 197, § 3; American Journal of Mathematics, vol. 23, 1901, p. 235.

For, since $\pm i\mu_1, \pm i\mu_2, \ldots, \pm i\mu_\nu$ are the non-zero roots of $|\lambda E - C| = 0$, it follows that

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_\nu^2$$

is equal to the coefficient of λ^{n-2} in the expanded form of the determinant; thus

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_\nu^2 = \frac{1}{2} \Sigma c_{r,s}^2. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

Hence, if g is the greatest coefficient in C, we have [1]

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_\nu^2 \leqq \frac{1}{2} n(n-1) g^2.$$

Thus it will usually happen that the greatest of $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ is less than $g\left[\frac{1}{2} n(n-1)\right]^{\frac{1}{2}}$; and the greatest μ can never exceed this value, which is the limit given in Bendixson's Theorem I.

3. Suppose now that the numbers a are *complex:* and write a' to denote the complex number conjugate to a. Then write

$$\left.\begin{aligned} b_{r,s} &= \frac{1}{2}(a_{r,s} + a'_{s,r}), & b_{s,r} &= \frac{1}{2}(a_{s,r} + a'_{r,s}), \\ ic_{r,s} &= \frac{1}{2}(a_{r,s} - a'_{s,r}), & ic_{s,r} &= \frac{1}{2}(a_{s,r} - a'_{r,s}), \end{aligned}\right| \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

so that,

$$b'_{r,s} = b_{s,r}, \qquad c'_{r,s} = c_{s,r}. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

Further, put

$$A = \Sigma a_{r,s} x_r y_s, \qquad B = \Sigma b_{r,s} x_r y_s, \qquad C = \Sigma c_{r,s} x_r y_s, \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

Then it is obvious that $A = B + iC$, and that the bilinear forms B, C are forms of Hermite's type.

Suppose now that $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are the roots of $|B - \lambda E| = 0$; it is known that these roots are all real and that the invariant-factors of the determinant are linear.[2] It is then possible to find a linear substitution

[1] There are only $n(n-1)$ non-zero coefficients in C, because $c_{r,r} = 0$.

[2] Christoffel, Crelle's Journal, Bd. 63, 1864, p. 252.

S (usually complex) such that when S is applied to the x's, and the conjugate substitution to the y's, the form B is reduced to $B_1 = \Sigma\lambda_r x_r y_r$, while E remains unchanged.[1] Further C is changed to C_1, another bilinear form of HERMITE's type, (in consequence of the relation between the substitutions on the x's and on the y's).

The determinantal equation then becomes $|B_1 + iC_1 - \lambda E| = 0$; thus, if a root is $\lambda = \alpha + i\beta$, we can choose the x's so as to make

$$B_1 + iC_1 - (\alpha + i\beta)E = 0,$$

whatever values we give to the y's. Suppose that these values for the x's are given by

$$x_r = p_r + iq_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

and then take

$$y_r = p_r - iq_r = x_r'. \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

Thus

$$B_1 = \Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2), \qquad E = \Sigma(p_r^2 + q_r^2);$$

also, if $C_1 = \Sigma\gamma_{r,s} x_r y_s$, we have that $\gamma_{r,s} x_r y_s$ and $\gamma_{s,r} x_s y_r$ are conjugate complex numbers, because $\gamma_{s,r} = \gamma_{r,s}'$, $x_s = y_s'$, $y_r = x_r'$; further $\gamma_{r,r} x_r y_r$ is real; hence B_1, C_1, E are all three *real*. Consequently the relation

$$B_1 + iC_1 - (\alpha + i\beta)E = 0$$

gives $B_1 = \alpha E$, so that

$$\alpha = \frac{\Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2)}{\Sigma(p_r^2 + q_r^2)}.$$

Thus, just as in § 2, α *lies between the greatest and least of* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. This is HIRSCH's Theorem II.

But it is now clear that, if $\lambda = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ are the roots of $|C - \lambda E| = 0$, we can similarly transform C into the form $C_2 = \Sigma\mu_r x_r y_r$, leaving E unchanged, while B becomes B_2 another HERMITE's form. Thus, by an exactly similar argument, we find that β *lies between the greatest and least of* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; which is the extension to complex coefficients of the theorem proved in § 2 for real coefficients.

We proceed now to show the connection between these theorems and

[1] See for example § 6 of the first, or § 5 of the last, of my papers quoted above.

HIRSCH's Theorem I. Since $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are the roots of the equation $|B - \lambda E| = 0$, by comparing coefficients of $\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}$, we find

$$\Sigma\lambda_r = \Sigma b_{r,r}, \qquad \Sigma\lambda_r\lambda_s = \Sigma(b_{r,r}b_{s,s} - b_{r,s}b_{s,r}). \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

Thus

$$\Sigma\lambda_r^2 = \Sigma b_{r,r}^2 + \Sigma b_{r,s}b_{s,r}.$$

Hence, if g_1 is the greatest absolute value of any coefficient in B, we have

$$\Sigma\lambda_r^2 \leq ng_1^2 + n(n-1)g_1^2,$$

or

$$\Sigma\lambda_r^2 \leq (ng_1)^2.$$

Now we have seen that α^2 is not greater than the greatest of $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$; and consequently α^2 is usually less than $(ng_1)^2$, while it can never be greater than this limit. That is, α *is not greater, numerically, than* ng_1. Similarly, if g_2 is the greatest absolute value of any coefficient in C, it can be proved that[1] β *is not greater, numerically, than* ng_2.

From the inequality proved above

$$\alpha^2 \leq \Sigma b_{r,r}^2 + \Sigma b_{r,s}b_{s,r} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

and the corresponding one

$$\beta^2 \leq \Sigma c_{r,r}^2 + \Sigma c_{r,s}c_{s,r},$$

we find

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq \Sigma(b_{r,r}^2 + c_{r,r}^2) + \Sigma(b_{r,s}b_{s,r} + c_{r,s}c_{s,r}).$$

Now

$$b_{r,r}^2 + c_{r,r}^2 = a_{r,r}a'_{r,r},$$

and

$$b_{r,s}b_{s,r} + c_{r,s}c_{s,r} = \frac{1}{2}(a_{r,s}a'_{s,r} + a_{s,r}a'_{r,s}),$$

so that

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq \Sigma a_{r,r}a'_{r,r} + \Sigma a_{r,s}a'_{s,r}. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

Thus, if g_3 is the greatest absolute value of any coefficient in A, we have

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq ng_3^2 + n(n-1)g_3^2,$$

[1] If it happens that the coefficients in C are pure imaginaries, so that $c_{r,r} = 0$, $c_{r,s} = -c_{s,r}$, it can be proved (as in § 2) that

$$|\beta| \leq g_2\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

or

$$|\alpha + i\beta| \leq ng_3.$$

That is, *the absolute value of* $(\alpha + i\beta)$ *is not greater than* ng_3.

The results

$$|\alpha| \leq ng_1, \qquad |\beta| \leq ng_2, \qquad |\alpha + i\beta| \leq ng_3$$

constitute HIRSCH's Theorem I, which is therefore included in the general theorem obtained previously.

4. I have also attempted to obtain some relation between the indices of the invariant-factors of $|A - \lambda E|$, and those of[1] $|\lambda B + \mu C|$; but hitherto I have not succeeded in finding any general theorem in this connection. The two following examples show that the relation (if there is one) is not very obvious.

If

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda, & 2, & 4 \\ 0, & 1-\lambda, & 6 \\ 0, & 0, & 1-\lambda \end{vmatrix}, \qquad \left[\textit{One}\text{ invariant-factor } (\lambda - 1)^3\right]$$

then

$$|\lambda B + \mu C| = \begin{vmatrix} \lambda, & \lambda+\mu, & 2(\lambda+\mu) \\ \lambda-\mu, & \lambda, & 3(\lambda+\mu) \\ 2(\lambda-\mu), & 3(\lambda-\mu), & \lambda \end{vmatrix}. \qquad \left[\textit{Three}\text{ invariant-factors } \lambda(\lambda^2 - 2\mu^2)\right]$$

Again if $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda, & -1 \\ 1, & -\lambda \end{vmatrix}$, then $|\lambda B + \mu C| = \begin{vmatrix} a\lambda, & -\mu \\ \mu, & 0 \end{vmatrix}$.

In this case both determinants have a squared invariant-factor if $a^2 = 4$; but if a has any other value, the first has two different invariant-factors $(\lambda^2 - a\lambda + 1)$, while the second has always a squared invariant-factor (μ^2).

Dublin, 11th October, 1904.

[1] It is obviously hopeless to use the invariant-factors of $|B - \lambda E|$ and $|C - \lambda E|$, because these are always *linear;* while $|A - \lambda E|$ may have invariant-factors of any degree up to n. In this paragraph the a's are supposed real, so that B and C are deduced from A according to § 2 (not § 3).

SUR LA RÉSOLUTION QUALITATIVE DU PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

PAR

T. LEVI-CIVITA

À PADOUE.

Dans le problème des trois corps (points matériels, qui s'attirent suivant la loi de NEWTON) les forces et par conséquent les équations différentielles du mouvement se comportent d'une façon analytique régulière tant que les positions des trois points restent distinctes.

D'après cela il est presque évident qu'il ne peut y avoir autre raison de singularité pour le mouvement en dehors de la circonstance que deux des trois corps (ou tous les trois) se rapprochent indéfiniment.

Plus précisément M. PAINLEVÉ[1] a démontré qu'à partir de conditions initiales données des singularités peuvent se présenter alors seulement qu'une au moins des distances mutuelles tend vers zéro pour t convergent vers une valeur finie t_1.

Quoi qu'il en soit, les résultats récents de M. MITTAG-LEFFLER sur les représentations des branches monogènes des fonctions analytiques permettent d'affirmer que:

Dans le problème des trois corps les coordonnées sont exprimables *en tout cas et pendant toute la durée du mouvement* par des séries jouissant des propriétés fondamentales des séries de TAYLOR.

Soit en effet x une quelconque de ces coordonnées. D'après la conclusion de M. PAINLEVÉ, rappelée tout à l'heure, la fonction $x(t)$ reste

[1] Voir ses »Leçons etc., professées à Stockholm», chez A. Hermann, Paris 1897, p. 583.

régulière pour toutes les valeurs de t, qu'il y a lieu de considérer: savoir de l'instant initial t_0 jusqu'à l'infini dans le cas général où il n'y a pas de choc au bout d'un temps fini; de t_0 à t_1 (ce dernier instant exclu) lorsque le choc intervient.

Dans les deux cas les intervalles de l'axe réel (t_0, ∞), (t_0, t_1) sont intérieurs à l'étoile de M. MITTAG-LEFFLER se rapportant au point t_0. Les équations du mouvement fournissent d'ailleurs, en fonction des données initiales, les dérivées successives de la fonction $x(t)$ au centre t_0 de l'étoile. Il suffit donc de construire, en se servant de ces valeurs, un des développements indiqués par M. MITTAG-LEFFLER pour en tirer une expression de $x(t)$, embrassant toute la durée du mouvement.

On peut dire que le problème est résolu. Mais (tout en restant dans le terrain théorique, où l'on fait abstraction de la complexité des moyens employés) ce n'est pas une résolution complète. Elle est, pour ainsi dire, aridement quantitative et ne nous laisse pas apercevoir la nature du mouvement.

A ce point de vue se pose d'abord la question de la prévision des chocs: conditions à être remplies par les circonstances initiales pour que deux des trois corps, ou tous les trois, se choquent au bout d'un temps fini.

La première partie de cette question, dont je m'étais occupé pour le cas particulier du problème restreint [1], vient d'être brillament discutée par M. BISCONCINI.[2]

La seconde attend encore une réponse. Mais, lors même qu'on en possèderait une, il ne serait pas encore permis de tirer des conséquences astronomiques. En effet les corps célestes ne sont pas des points matériels et il est loisible de les traiter ainsi pourvu seulement que leurs dimensions soient négligeables par rapport aux distances, c'est-à-dire (dimensions et degré d'approximation étant donnés) pourvu que leurs distances ne descendent pas au dessous d'une certaine limite ε. A cette condition seulement les résultats mathématiques seront acceptables.

En l'espèce, pour pouvoir affirmer qu'à partir d'un état initial donné, le mouvement se poursuivra régulièrement, il faudra être certain que les distances restent supérieures à l'ε susdit.

[1] *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, Annali di Matematica, Ser. III, T. 9, 1903.

[2] *Sur le problème des trois corps etc.*, dans ce même volume des Acta.

Reconnaître d'avance sur les données initiales quand il en est ainsi, voilà le but essentiel de l'analyse qualitatif de notre problème.

J'ai réussi à faire un petit pas pour le cas particulier du problème restreint. Voici d'une façon précise le contenu de ma recherche.

Rappelons d'abord qu'il s'agit dans le problème restreint du mouvement plan d'un corps P (de masse négligeable) attiré par deux autres S, J tournant uniformément autour de leur centre de gravité.

La distance $\overline{SJ}$ restant constante, on doit se préoccuper seulement de $\overline{PS}$, $\overline{PJ}$, et il suffit d'en envisager une, $\overline{PS}$ par exemple, puisque les mêmes considérations s'appliquent évidemment à l'autre.

Cela étant, je me suis proposé l'étude des trajectoires du système (courbes décrites par le point P) dans une région suffisamment petite D entourant le centre S.

Les équations différentielles du mouvement présentent, comme il est évident d'après la nature newtonienne de la force, des singularités au point S. Mais on peut les régulariser (le sens de ce mot n'a pas besoin d'explications) par une transformation convenable. On peut notamment, en ayant recours à l'équation de Hamilton-Jacobi, caractériser d'une façon très nette les trajectoires de la région D. On en tire sans peine une représentation sous forme holomorphe de tous les arcs de trajectoire A, possibles à l'intérieur de D. Aucun de ces arcs ne peut se rapprocher indéfiniment de S sans le rejoindre jamais, c'est-à-dire tout arc A, ne passant pas exactement au point S, en reste à une distance finie. La moindre distance δ du point S à l'arc A peut être exprimée en fonction (uniforme à l'intérieur de D) d'un quelconque des états de mouvement de P sur A.

Ou bien $\delta = 0$; c'est la condition du choc. Ou bien $\delta > 0$. On peut affirmer que sur l'arc A le mouvement se poursuit régulièrement. Si au surplus $\delta > \varepsilon$, il sera permis d'attribuer un sens physique au résultat mathématique.

Rien n'autorise toutefois des prévisions à longue échéance ($\delta > \varepsilon$, ni même $\delta > 0$ quel que soit t).

C'est là une remarque essentielle, que je dois à l'obligeance de M. Phragmén.

On conçoit en effet qu'on puisse, en suivant une trajectoire déterminée, sortir de D le long d'un arc A, et y rentrer le long d'un arc différent

A', et ainsi de suite, avec des nouveaux δ, ayant même zéro pour limite inférieure.

Il arrive sans doute — l'exemple étant offert (§ 8) déjà par le cas élémentaire, où la masse de J serait nulle — qu'une trajectoire pénètre dans D une infinité de fois par une série d'arcs A, qui, tout en étant en continuation analytique, se présentent à l'intérieur de D comme des éléments distincts.

Sur la limite inférieure des δ je ne puis rien dire: tous mes efforts dans cette direction ont complètement échoué.

L'analyse de ce qui se passe au voisinage de S ne suffit donc pas à épuiser la question tout en fournissant des renseignements dignes d'intérêt.

Pour résumer sous forme expressive on peut énoncer la conclusion suivante:

Si $\delta > \varepsilon$ il n'y a rien à craindre pour le moment du voisinage de S. Seuls des rapprochements *nouveaux* (c'est-à-dire précédés par des sorties de D) pourraient devenir dangereux.

Qu'il me soit permis de saisir l'occasion pour adresser tous mes remerciements à MM. Mittag-Leffler et Phragmén, qui ont honoré ma recherche de leur intérêt bienveillant.

§ 1. *Equations du mouvement. — Forme canonique usuelle.*

Soit P celui des trois corps, dont la masse est négligeable et n'exerce par conséquent aucune influence sur le mouvement des deux autres S, J. Ce mouvement est alors képlérien. On suppose qu'il soit le plus simple possible, c'est-à-dire que les deux corps S et J tournent uniformément autour de leur centre de gravité commun O. On suppose encore que le corps P se meut dans le plan, qui contient les deux orbites circulaires de S et de J.

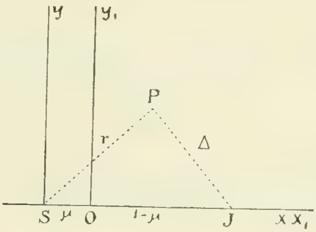
On est ramené de la sorte à un problème avec deux degrés de liberté: Mouvement plan d'un point P, sollicité par l'attraction newtonienne de deux centres variables S et J.

Convenons de prendre comme unité de masse la somme des masses des deux corps S et J; si μ désigne la masse de J, $\nu = 1 - \mu$ sera alors celle de S.

Convenons encore de prendre la distance constante $\overline{SJ}$ pour unité de distance et de fixer l'unité de temps de façon que la vitesse angulaire de la droite SJ soit égale à l'unité. Dès lors la constante de la gravitation universelle résulte, elle aussi, égale à l'unité, et le potentiel des forces agissantes sur l'unité de masse de P est

$$\frac{\nu}{r}+\frac{\mu}{\Delta},$$

en désignant par r et Δ les distances $\overline{PS}$ et $\overline{PJ}$.



Rapportons-nous pour un moment à deux axes mobiles Ox_1, Oy_1 ayant OJ comme direction positive de l'axe x_1, et, comme direction positive de l'axe y_1, celle qu'on obtient de OJ en tournant de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens de la rotation de la droite SJ.

Comme O est le centre de gravité de S et de J et $\overline{SJ}=1$, les coordonnées de S sont: $-\mu, 0$; celles de J: $1-\mu, 0$.

Ceci posé, d'après le théorème de Coriolis, les composantes de l'accélération absolue d'un point mobile quelconque P (ayant $x_1(t)$, $y_1(t)$ pour coordonnées par rapport à nos axes) seront

$$x_1''-2y_1'-x_1,$$
$$y_1''+2x_1'-y_1,$$

les accents indiquant des dérivations par rapport au temps t.

Les équations du mouvement s'obtiennent en égalant l'accélération à la force, qui agit sur l'unité de masse.

Elles sont donc ici:

$$x_1'' - 2y_1' - x_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta}\right),$$

$$y_1'' + 2x_1' - y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta}\right).$$

Passons maintenant de x_1, y_1 à un système d'axes parallèles x, y, ayant pour origine le point S.

Les formules de transformation

$$x_1 = x - \mu, \qquad y_1 = y$$

donnent

$$(1) \qquad \begin{cases} x'' - 2y' - x = -\mu + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{r} + \dfrac{\mu}{\Delta}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right), \\ y'' + 2x' - y = \qquad \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{r} + \dfrac{\mu}{\Delta}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right), \end{cases}$$

ayant posé pour abréger

$$V = \frac{1}{\Delta} - x.$$

Je pose encore

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = p + y, \\ y' = q - x, \end{cases}$$

et je puis alors écrire les équations (1) sous la forme:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \quad q + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right), \\ \dfrac{dq}{dt} = -p + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right). \end{cases}$$

Les deux équations du second ordre (1) se trouvent ainsi remplacées par le système équivalent d'équations du premier ordre (2), (3) aux quatre fonctions inconnues x, y, p, q.

C'est un système canonique, dont la fonction caractéristique est

$$(4) \qquad F = \frac{1}{2}\{(p+y)^2 + (q-x)^2\} - \left\{\frac{\nu}{r} + \frac{1}{2}r^2 + \mu V\right\},$$

et les variables conjuguées $x, p; y, q$.

On constate en effet immédiatement que les équations (2) et (3) sont bien identiques aux suivantes:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial q}; \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Il convient de remarquer:

1° que les auxiliaires p et q, définies par (2), ne sont que les composantes de la vitesse absolue du mobile (plus précisément de la vitesse de P par rapport à un système de direction invariable ayant l'origine en S);

2° que les équations (I) admettent l'intégrale (dite de Jacobi)

$$F = -C.$$

En désignant par v la grandeur de la vitesse relative (aux composantes x', y'), la dite intégrale s'écrit, d'après (4) et (2),

$$\text{(5)}\qquad \frac{1}{2}v^2 - \left\{\frac{\nu}{r} + \frac{1}{2}r^2 + \mu V\right\} = -C.$$

§ 2. *Autre forme canonique. — Régularisation au point S.*

Une transformation du système (I), qui donne lieu à des conséquences remarquables, s'obtient en posant

$$\text{(6)}\qquad x + iy = (\xi + i\eta)^2,$$

$$\text{(7)}\qquad p - iq = \frac{\varpi - i\chi}{2(\xi + i\eta)} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

où il est sous-entendu qu'on doit séparément égaler dans les deux membres les coefficients de i et les termes qui en sont indépendants.

Les deux séries conjuguées x, y ; p, q sont de la sorte liées aux deux nouvelles séries ξ, η ; ϖ, χ par une transformation de contact. Il suit en effet de (6)

$$dx + i\,dy = 2(\xi + i\eta)(d\xi + i\,d\eta),$$

d'où, en multipliant membre à membre avec l'équation (7),

$$(p - iq)(dx + idy) = (\varpi - i\chi)(d\xi + id\eta),$$

ce qui donne en particulier

$$pdx + qdy = \varpi d\xi + \chi d\eta.$$

En posant

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{8}$$

et en tenant compte que r n'est autre que $|\sqrt{x^2 + y^2}|$, on obtient aisément de (6) et (7)

$$\left\{\begin{aligned} r &= \rho^2, \\ p^2 + q^2 &= \frac{\varpi^2 + \chi^2}{4\rho^2}, \\ xp + yq &= \frac{1}{2}(\xi\varpi + \eta\chi), \\ yp - xq &= \frac{1}{2}(\eta\varpi - \xi\chi). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Appliquons maintenant le changement de variables (6) et (7) au système différentiel (I).

D'après l'identité

$$pdx + qdy = \varpi d\xi + \chi d\eta,$$

le système transformé en ξ, η, ϖ, χ sera encore canonique avec la même fonction caractéristique F, qu'on doit seulement exprimer par les nouvelles variables.

Nous aurons donc

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \varpi}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \chi}; \\ \frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi}, & \frac{d\chi}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \eta}. \end{aligned}\right. \tag{I'}$$

Quant à F, les (4) et (9) donnent après coup

$$F = \frac{1}{8\rho^2}\{(\varpi + 2\rho^2\eta)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2\} - \left\{\frac{\nu}{\rho^2} + \frac{1}{2}\rho^4 + \mu V\right\}, \tag{4'}$$

$V = \frac{1}{\Delta} - x$ étant une fonction régulière tant que $\overline{PS} < 1$, c'est-à-dire, d'après (6), tant que $\xi^2 + \eta^2 < 1$. Pour notre but il suffit d'ailleurs de retenir que c'est une fonction holomorphe pour $|\xi|, |\eta|$ assez petits.

Il ne me paraît pas sans intérêt de faire remarquer (tout en n'ayant pas à m'en servir dans ce qui va suivre) que le système (I') peut être régularisé au point S.

Voici de quelle façon.

Introduisons une variable auxiliaire τ d'après la position

$$d\tau = \frac{dt}{\rho^2}.$$

Tant que le mouvement se poursuit régulièrement $\rho^2 = r$ n'est pas nul (ni infini). Il y a donc correspondance biunivoque entre t et τ, et on peut bien considérer cette dernière, au lieu de t, comme variable indépendante. Faisons ce changement dans les équations différentielles (I'). On n'a qu'à y remplacer dt par $\rho^2 d\tau$, ce qui donne:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \varpi}, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \chi};$$

$$\frac{d\varpi}{d\tau} = -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}, \qquad \frac{d\chi}{d\tau} = -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Comme $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, et F a, pour toute solution de (I'), une valeur constante $-C$, on peut écrire:

$$\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial(\rho^2 F)}{\partial \xi} - 2\xi F = \frac{\partial(\rho^2 F)}{\partial \xi} + 2C\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}[\rho^2(F + C)].$$

De même

$$\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}[\rho^2(F + C)].$$

Il suffit donc de poser

$$H = \rho^2(F + C) = \frac{1}{8}\{(\varpi + 2\rho^2\eta)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2\} - \left\{\nu - C\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^6 + \mu\rho^2 V\right\}$$

pour pouvoir présenter le système précédent sous la forme

$$(\mathrm{I}'') \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \dfrac{\partial H}{\partial \varpi}, & \dfrac{d\eta}{d\tau} = \dfrac{\partial H}{\partial \chi}; \\[2ex] \dfrac{d\varpi}{d\tau} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi}, & \dfrac{\partial \chi}{d\tau} = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta}, \end{cases}$$

qui est encore canonique et parfaitement régulier au point S.

Toute solution de (I′) [ou de (I)] donne lieu à une solution de (I″), pour laquelle $H = 0$, et réciproquement (la constante C ayant même valeur dans les deux cas).

§ 3. *Équation de Hamilton-Jacobi. — Déduction d'une intégrale complète W.*

L'équation de Hamilton-Jacobi, relative au système (I′), s'obtient de suite en égalant la fonction caractéristique (4′) à une constante et en y entendant

$$\varpi = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \qquad \chi = \frac{\partial W}{\partial \eta}.$$

Je désignerai la constante par $-C$, et je pourrai écrire, en chassant le dénominateur ρ^2.

$$(10) \qquad \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + 2\rho^2\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - 2\rho^2\xi\right)^2\right\} = \nu - C\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^6 + \mu\rho^2 V.$$

L'équation analogue pour le système complètement régularisé (I″) serait

$$H = \text{const.},$$

ce qui revient encore à (10) lorsqu'on donne à la constante du second membre la valeur zéro.

Ceci remarqué en passant, faisons subir aux variables indépendantes ξ, η une substitution orthogonale

$$\xi + i\eta = e^{i\alpha}(\xi_1 + i\eta_1) \quad (\alpha \text{ constante réelle}).$$

Les binômes

$$\xi^2 + \eta^2,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$\eta \frac{\partial W}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial W}{\partial \eta}$$

sont des invariants et on peut écrire de suite comme transformée de l'équation précédente

$$(10') \quad \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + 2\rho^2\eta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta_1} - 2\rho^2\xi_1\right)^2\right\} = \nu - C\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^6 + \mu\rho^2 V_1,$$

où V_1 est ce que devient V en y remplaçant ξ, η par $\xi_1 \cos\alpha - \eta_1 \sin\alpha$, $\xi_1 \sin\alpha + \eta_1 \cos\alpha$. V_1 est donc une fonction de ξ_1, η_1, α, périodique par rapport à α et regulière tant que $|\xi_1|$, $|\eta_1|$ demeurent assez petits.

L'équation (10'), quadratique par rapport à $\frac{\partial W}{\partial \xi_1}$, a deux racines, se réduisant respectivement à $\pm\sqrt{8\nu}$ pour la valeur zéro des trois autres arguments ξ_1, η_1, $\frac{\partial W}{\partial \eta_1}$.

Le théorème général d'existence relatif aux équations aux dérivées partielles du premier ordre, nous permet ainsi d'affirmer qu'il existe deux intégrales de (10'), holomorphes au voisinage de $\xi_1 = \eta_1 = 0$ et se réduisant à zéro pour $\xi_1 = 0$. Leurs développements en série de puissances de ξ_1, η_1 peuvent être calculés de proche en proche, en partant de l'une ou de l'autre des deux expressions de $\frac{\partial W}{\partial \xi_1}$ fournies par (10').

Fixons par exemple celle, pour qui le radical $\sqrt{8\nu}$ a sa valeur arithmétique.

L'intégrale correspondante a nécessairement la forme

$$W = \sqrt{8\nu}\,\xi_1(1 + \mathfrak{P}_1),$$

où $\mathfrak{P}_1$ est une série de puissances de ξ_1, η_1, qui s'annule pour $\xi_1 = \eta_1 = 0$.

Comme les coefficients de l'équation (10') sont des fonctions périodiques du paramètre α, il en sera de même des coefficients de W et par suite de W elle-même.

Le champ de convergence de $\mathfrak{P}_1$, autour du couple $\xi_1 = \eta_1 = 0$, peut dépendre en particulier de la constante C et du paramètre α. Mais α ne dérange pas. On est assuré en effet par les remarques, qui précèdent, que, une fois fixée la valeur de C, on peut lui faire correspondre un domaine de l'espace complexe ξ_1, η_1, autour du couple $\xi_1 = \eta_1 = 0$, où la fonction W reste régulière quelle que soit la valeur (réelle) de α.

Abandonnons désormais les variables auxiliaires ξ_1, η_1, en reprenant nos variables ξ, η.

La fonction W, qu'on vient de définir, prend l'aspect

$$W = \sqrt{8\nu}(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha)\{1 + \mathfrak{P}(\xi, \eta, \alpha)\}, \tag{11}$$

où $\mathfrak{P}$ est une fonction périodique de α, qui s'annule pour $\xi = \eta = 0$ et reste régulière dans un certain domaine des ξ, η, qu'on peut supposer indépendant de α (mais non de C).

§ 4. *Sur une équation implicite dépendante de W.*

On tire de (11)

$$\frac{\partial W}{\partial\xi} = \sqrt{8\nu}\cos\alpha + \dots, \qquad \frac{\partial W}{\partial\eta} = \sqrt{8\nu}\sin\alpha + \dots,$$

$$\frac{\partial W}{\partial\xi} + i\frac{\partial W}{\partial\eta} = \sqrt{8\nu}\, e^{i\alpha} + \dots,$$

les termes non écrits contenant ξ ou η en facteur.

Introduisons, pour abréger l'écriture, l'expression (5) de la vitesse relative v, c'est-à-dire, en y remplaçant r par ρ^2,

$$\rho v = \left|\sqrt{2\nu - 2C\rho^2 + \rho^6 + 2\mu\rho^2 V}\right|, \tag{5'}$$

et posons

$$\frac{\frac{\partial W}{\partial\xi} + i\frac{\partial W}{\partial\eta} - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = e^{i\alpha}(1 + \mathfrak{Q}).$$

La fonction $\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \alpha)$ jouira — on le constate de suite — des mêmes propriétés que $\mathfrak{P}$, sauf bien entendu que ce n'est plus une fonction réelle.

Ceci posé, envisageons l'équation

$$(12)\qquad \frac{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} + i\dfrac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = k,$$

en y entendant par k un nombre de module égal à l'unité, et en y considérant: ξ, η comme des paramètres ayant des valeurs données ξ_0, η_0; α comme inconnue.

Le premier membre, c'est-à-dire $e^{i\alpha}(1 + \mathfrak{Q})$, est une fonction périodique de α, régulière pour $|\xi_0|$, $|\eta_0|$ assez petits.

On peut dire également, en remplaçant α par

$$\gamma = e^{i\alpha},$$

que le premier membre de l'équation (12) est une fonction uniforme de γ,

$$\psi(\gamma, \xi_0, \eta_0),$$

holomorphe pour tous les points du cercle $|\gamma| = 1$, tant que $|\xi_0|$, $|\eta_0|$ sont assez petits.

A cause de (10) et de (5'), on a l'identité

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} + i\dfrac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = \frac{2\rho v}{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} - i\dfrac{\partial W}{\partial \eta} + 2i\rho^2(\xi - i\eta)}.$$

L'équation (12) entraîne donc la suivante:

$$(12')\qquad \frac{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} - i\dfrac{\partial W}{\partial \eta} + 2i\rho^2(\xi - i\eta)}{2\rho v} = \frac{1}{k},$$

ce qu'on peut aussi énoncer en disant que l'équation (12) se transforme en elle même lorsqu'on y change i en $-i$, et k en $\frac{1}{k}$ (sans toucher aux autres quantités).

Mettons en évidence comme inconnue γ, au lieu de α, et appelons $\bar{\psi}$ ce que devient la fonction ψ lorsqu'on change i en $-i$ en laissant toute lettre inaltérée.

Les équations

$$\psi(\gamma, \xi_0, \eta_0) = k, \tag{12 bis}$$

$$\bar{\psi}\left(\frac{1}{\gamma}, \xi_0, \eta_0\right) = \frac{1}{k} \tag{12' bis}$$

ne seront pas distinctes, d'après ce qu'on vient de dire: toute valeur de γ satisfaisant à la première vérifie par là même aussi la seconde.

Attribuons en particulier la valeur zéro aux paramètres ξ_0, η_0. Il reste, au premier membre de (12), $e^{i\alpha}$. L'équation (12 bis) se réduit donc à

$$\gamma = k.$$

Or $\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}$ ne s'annule pas pour $\xi_0 = \eta_0 = 0$ (c'est l'unité).

Il existe partant un domaine autour du point $\xi = \eta = 0$, dans lequel l'équation (12 bis) définit univoquement une racine γ_1. Je dis qu'elle a l'unité pour module.

Je remarque pour cela qu'elle satisfait aussi à l'équation (12' bis), et par suite même à celle qu'on en déduit en remplaçant toute quantité par sa conjuguée.

Comme ξ_0, η_0 et les autres constantes C, μ, ν sont essentiellement réelles, la dite opération consiste dans la substitution de ψ à $\bar{\psi}$, $\frac{1}{\bar{\gamma}_1}$ et $\frac{1}{\bar{k}}$ à $\frac{1}{\gamma_1}$ et $\frac{1}{k}$.

Le module de k étant l'unité, $\frac{1}{\bar{k}} = k$, et l'on aura en définitive, à côté de

$$\psi(\gamma_1, \xi_0, \eta_0) = k,$$

aussi

$$\psi\left(\frac{1}{\bar{\gamma}_1}, \xi_0, \eta_0\right) = k.$$

Il en résulte que $\frac{1}{\bar{\gamma}_1}$ est racine de (12 bis) en même temps que γ_1.

Mais dans un certain domaine des ξ, η il n'y a qu'une seule racine: γ_1 et $\frac{1}{\bar{\gamma}_1}$ sont donc identiques, ce qui démontre bien que la racine de l'équation (12 bis) reste unimodulaire dans ce domaine.

Je le désignerai par D, en faisant ici encore remarquer qu'on peut le considérer comme fixe dès qu'on ne fait pas varier C. Tant que ξ, η appartiennent à ce domaine on peut satisfaire à l'équation (12) par un angle réel $\alpha = \frac{1}{i}\log\gamma_1$, et un seulement, puisqu'on ne doit naturellement considérer comme distincts ceux qui en diffèrent par des multiples entiers de 2π.

§ 5. *Solutions particulières. — Choix des paramètres.*

Revenons aux équations du mouvement en coordonnées cartésiennes x, y.

Une solution particulière quelconque reste déterminée d'une façon unique pourvu qu'on se donne l'état de mouvement (position et vitesse) correspondant à un instant quelconque t_0.[1]

Les quatre éléments déterminatifs des états de mouvement, appartenant à une même solution, sont toutefois liés à tout instant par la relation intégrale $F = -C$, et on pourra, pour fixer une solution particulière, se donner la valeur de la constante C, et trois des quatre quantités définissant la position P_0 et la vitesse à l'instant t_0.

En premier lieu, par exemple, les valeurs ξ_0, η_0 de ξ, η se rapportant à P_0. La connaissance de P_0 et de C définit sans ambiguité la valeur absolue v de la vitesse moyennant (5').

Comme quatrième élément déterminatif il y a lieu de prendre la direction de la vitesse.[2]

φ désignant l'angle, que ladite direction fait avec la direction positive de l'axe des abscisses,

$$k = e^{i\varphi}\frac{\xi_0 - i\eta_0}{\rho_0} \qquad \left(\rho_0 = \left|\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}\right|\right) \tag{13}$$

sera notre quatrième paramètre.

Pour fixer une trajectoire il suffit naturellement de se donner C, ξ_0, η_0, k en se passant de l'instant particulier t_0 auquel correspondent ces quatre valeurs. Mais le phénomène est réversible, ce qui se déduit analytique-

[1] Cela suppose naturellement que tout soit régulier et par suite que la position du mobile dans l'état envisagé ne soit ni S ni J.

[2] Je n'aurai pas à considérer le cas $v = 0$, et je puis partant parler de direction.

ment de la circonstance que les équations (1) ne changent pas lorsqu'on y change t en $-t$ en renversant en même temps les signes de x', y'.

Renverser le sens de la vitesse équivaut à changer φ dans $\varphi+\pi$ et par conséquent (la position restant la même) k dans $-k$.

Il s'en suit qu'aux deux états de mouvement

$$C\,,\ \xi_0\,,\ \eta_0\,,\ \ k\ \ ;$$

$$C\,,\ \xi_0\,,\ \eta_0\,,\ -k$$

correspondent les deux sens opposés d'une même trajectoire.

Il convient encore d'indiquer quelle est l'expression de k en fonction des variables conjuguées ξ, η, ϖ, χ (je supprime l'indice o pour abréger l'écriture).

Partons pour cela de l'identité

$$x' + iy' = ve^{i\varphi}.$$

On en tire

$$k = \frac{x' + iy'}{v}\frac{\xi - i\eta}{\rho}.$$

Transformons le second membre en profitant des (2), (6), (7), et il viendra

$$k = \frac{\varpi + i\chi - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v}. \tag{14}$$

§ 6. *Intégrales canoniques. — Leur validité effective au voisinage de S.*

Soit β une constante et envisageons les équations classiques de la méthode d'intégration de Jacobi

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta, \tag{II}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \varpi, \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \chi, \tag{III}$$

W étant l'intégrale complète, définie au § 3.

Supposons qu'elles soient satisfaites par des valeurs particulières ξ_0, η_0, ϖ_0, χ_0 de ξ, η, ϖ, χ.

Il est bien connu que les intégrales ξ, η, ϖ, χ de (I'), définies par les valeurs initiales $\xi_0, \eta_0, \varpi_0, \chi_0$ continuent à vérifier ces équations tant que le mouvement reste régulier.

Ceci rappelé, désignons par A un arc quelconque de trajectoire tout intérieur au domaine D.

On a le théorème suivant:

Quel que soit A, on peut toujours fixer les constantes α et β de façon que les équations (II), (III) soient remplies en tout point de A.

D'après ce qui précède, il nous suffit de le constater pour un point seulement, soit $P_0(\xi_0, \eta_0)$, qu'on supposera, bien entendu, distinct de S.

La vitesse est sans doute > 0,[1] et on peut compléter la définition de la trajectoire en associant à C, ξ_0, η_0 le quatrième paramètre k du paragraphe précédent.

Les valeurs de ϖ, χ, qui correspondent à la quaterne C, ξ_0, η_0, k sont les solutions des deux équations $F = -C$ et (14), v étant défini par (5') en fonction de C, ξ_0, η_0.

La première équation $F = -C$ peut s'écrire, à cause de (4') et de (5'),

$$\frac{1}{4}\{(\varpi + 2\rho^2\eta)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2\} = \rho^2 v^2,$$

qui, combinée avec (14), donne lieu au système linéaire:

$$\frac{\varpi + i\chi - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = k, \tag{14}$$

$$\frac{\varpi - i\chi + 2i\rho^2(\xi - i\eta)}{2\rho v} = \frac{1}{k}. \tag{15}$$

Considérons d'autre part la fonction W et supposons d'attribuer à α la valeur α_1, racine de l'équation (12), où l'on suppose bien entendu que C, ξ_0, η_0, k soient ceux qui appartiennent au point envisagé de notre A.

Les dérivées $\frac{\partial W}{\partial \xi}, \frac{\partial W}{\partial \eta}$ vérifient de la sorte (pour $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$) l'équation (12) et par là même (comme on l'a remarqué au § 4) aussi l'équa-

[1] En effet, parmi les conditions, qui doivent être satisfaites dans le domaine D, il y a la suivante: ρv c'est-à-dire $\left|\sqrt{2\nu - 2C\rho^2 + \rho^6 + 2\mu\rho^2 V}\right|$ reste uniforme. v ne peut donc pas s'annuler à l'intérieur de D.

tion (12'). La comparaison de ces deux équations (12), (12') avec le système (14), (15) donne immédiatement (pour l'état de mouvement C, ξ_0, η_0, k)

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \varpi, \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \chi.$$

Les équations (III) sont donc remplies au point P_0 de A, dès qu'on donne à α la valeur α_1. Il en est de même dè (II), pourvu qu'on prend β égal à la valeur du premier membre. C. Q. F. D.

Remarque. Rien n'empêche de suivre une trajectoire aussi hors de D, tant que le mouvement reste régulier. On peut encore affirmer que les équations (II), (III) resteront vérifiées, en entendant par W la continuation analytique, obtenue en suivant la trajectoire, de la détermination valable dans D (et uniforme dans ce domaine). Mais cela ne nous aide pas grande chose, puisqu'il nous est inconnu comment se comporte W hors de D.

En particulier si une trajectoire rentre dans D après en être sortie, la continuation de W, correspondante à la rentrée, soit W_1, tout en étant toujours une intégrale de (9), peut fort bien différer de la détermination $\sqrt{8\nu}\,(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) + \ldots$: celle-ci était en effet caractérisée par une condition initiale, qui n'est pas invariante vis-à-vis d'une continuation analytique.

On peut ajouter que cette circonstance gênante de la non-uniformité de W n'est pas seulement à craindre, mais se présente en réalité. Voici un exemple bien simple.

Supposons que la masse μ du centre J soit nulle. P n'est alors soumis qu'à l'attraction de S, et l'on est reconduit au problème élémentaire du mouvement d'un point P, attiré suivant la loi de Newton par un centre S, qu'on peut considérer fixe.

Par rapport à des axes fixes le mouvement de P est képlérien et admet les deux intégrales des forces vives et des aires. Celle de Jacobi n'en est qu'une combinaison linéaire, et, h, c, C désignant respectivement les constantes des forces vives, des aires et de Jacobi, on trouve

$$C = -h + c.$$

Si h est négative, la trajectoire (absolue) de P est une ellipse; son axe a et son paramètre p sont exprimés par les formules

$$a = -\frac{1}{h}, \qquad p = c^2.$$

Par rapport aux axes mobiles x, y, qui tournent uniformément, tout se passe comme si (les axes étant fixes) l'ellipse tournait autour du foyer S, dans le sens opposé, pendant que P la parcourt d'un mouvement képlérien.

Laissons de côté les valeurs particulières de h, pour qui le moyen mouvement serait commensurable avec la vitesse de la rotation (fictive) de l'ellipse, c'est-à-dire rationnel, puisque cette vitesse a la valeur -1.

Un petit raisonnement, bien souvent employé dans des cas analogues, permet alors de conclure que la trajectoire relative de P remplit entièrement[1] la couronne circulaire définie par les distances aphélie et périhélie de l'orbite absolue.

Il suffit donc que le domaine D (correspondant à une valeur donnée quelconque de la constante C) renferme à son intérieur quelque point d'une de ces trajectoires (provenant des orbites elliptiques) pour qu'il doive nécessairement contenir une infinité d'arcs A appartenant tous à cette même trajectoire.

Pour constater qu'il en bien ainsi, donnons à C une valeur positive, d'ailleurs quelconque, et rappelons l'identité $C = -h + c$.

On y satisfait en prenant par exemple c très petit, et par conséquent $-h$ très voisin à C, avec la précaution que $(-h)^{\frac{3}{2}}$ ne soit pas rationnel.

L'orbite absolue est alors une ellipse de moyen mouvement $(-h)^{\frac{3}{2}}$ irrationnel et de paramètre $p = c^2$ très petit.

Rien n'empêche évidemment de supposer c assez petit pour que la région périhélie tombe bien à l'intérieur de D.

§ 7. *Conséquences de la représentation holomorphe des trajectoires à l'intérieur de D. — Conditions de choc et de sûreté mécanique. — Portée relative de ces conditions.*

Théorème: Si un arc A se rapproche indéfiniment de S, il y passe. D'après le paragraphe précédent l'équation (II) sera vérifiée en tout point

[1] Plus précisément la courbe est condensée dans la couronne, c'est-à-dire qu'il y a des points de la courbe si près que l'on veut de tout point fixé d'avance à l'intérieur (ou sur le contour) de la couronne.

de A pour des valeurs convenables des constantes α et β. Par hypothèse l'arc possède des points si près de S que l'on veut. Dans ces points la fonction

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \sqrt{8\nu}\,(-\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha) + \dots$$

prend des valeurs, qu'on peut rendre plus petites que toute quantité assignée d'avance. Mais $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ a, tout le long de A, la valeur constante β. On doit en conclure $\beta = 0$, ce qui démontre bien que A passe par S.

Si, pour un A quelconque, $\beta \gtrless 0$, la courbe ne peut pas se rapprocher indéfiniment de S. C'est une conséquence évidente du résultat obtenu tout à l'heure. Mais il y a plus.

Le minimum ∂ des distances des points de A à S est une fonction de C, α, β, périodique par rapport à α et s'annulant avec β. On en conclu, d'après le paragraphe précédent, que ce ∂ est une fonction uniforme des circonstances initiales. Soient en effet C, ξ_0, η_0, k les quatre paramètres définissant l'état initial C_0 (le point ξ_0, η_0 étant toujours supposé à l'intérieur de D).

Considérons d'autre part la fonction $\partial(C, \alpha, \beta)$. On doit y remplacer α par la racine α_1 de l'équation (12) et β par sa valeur

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_{\xi = \xi_0, \eta = \eta_0, \alpha = \alpha_1}.$$

∂ devient ainsi une fonction uniforme de C, ξ_0, η_0, k; mais on peut encore substituer à C et à k leurs valeurs F et (14), et on aura de la sorte une fonction uniforme des paramètres canoniques $\xi_0, \eta_0, \varpi_0, \chi_0$ de l'état E_0.

Occupons-nous maintenant des courbes

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0,$$

qui passent simplement par le point S.

Aux conditions, imposées à D au § 4, imaginons ajoutée, comme il est évidemment permis, encore la suivante:

D doit être assez petit pour que la courbe

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0$$

n'ait à l'intérieur de D que l'unique branche régulière passant par S; et cela quelle que soit la valeur (réelle) de α.

On est alors assuré que la longueur de l'arc de la dite courbe, compris entre P_0 et S, est finie.

D'ailleurs, dans le domaine D, ρv est toujours > 0 et diffère autant moins de $|\sqrt{2\nu}|$ qu'il s'agit de points plus près de S.

Le mouvement ne peut donc pas changer de sens sur l'arc $\widehat{P_0 S}$; de plus la vitesse croît indéfiniment lorsqu'on s'approche de S. Le temps nécessaire au mobile pour parcourir cet arc $\widehat{P_0 S}$ reste partant fini et tend même vers zéro plus rapidement que l'arc lui même.

On pourrait préciser cette remarque en ayant recours à la dernière intégrale canonique

$$\frac{\partial W}{\partial C} = t + \text{const.};$$

mais nous n'avons pas à discuter les lois du mouvement.

Il nous suffit de rappeler que sur toute trajectoire le mouvement est possible dans les deux sens, pour pouvoir conclure de ce qui précède:

Chacun des arcs $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0$ est à la fois trajectoire de collision et trajectoire d'éjection; $\beta = 0$ (ou, si l'on veut, $\partial = 0$) est donc la condition caractéristique d'un choc P, S.

Ainsi qu'il a été remarqué plus généralement à propos de la fonction $\partial(C, \alpha, \beta)$, on peut exprimer β en fonction uniforme des circonstances initiales, c'est-à-dire de C, ξ_0, η_0, k, ou bien encore de la quaterne canonique $\xi_0, \eta_0, \varpi_0, \chi_0$. Il serait aisé de calculer autant de termes que l'on veut du développement (convergent à l'intérieur de D) de $\beta(C, \xi_0, \eta_0, k)$ en série de puissances de ξ_0, η_0.

J'omets le calcul en renvoyant à mon mémoire »Traiettorie singolari etc.» cité dans l'introduction, où j'ai explicité la condition du choc sous une forme un peu différente.

Les données étant encore C, ξ_0, η_0, k, on peut se proposer de reconnaître si le choc, caractérisé par la condition $\beta = 0$, est passé ou futur.

Voyons pour cela ce qui se passe au voisinage immédiat du point S. Toute A est une courbe régulière ayant en S une tangente bien déterminée. Si l'on a affaire à un choc passé, le rayon vecteur SP a du être dirigé,

à l'instant de l'éjection, précisément comme la tangente à A dans le sens du mouvement. On a donc alors à la limite $\varphi = \vartheta$, en désignant par ϑ l'anomalie du rayon vecteur, et, comme au § 5, par φ l'inclinaison de la vitesse sur la direction positive de l'axe des abscisses.

Si l'on a affaire a un choc futur, la relation limite sera au contraire $\varphi = \vartheta + \pi$.

Ceci posé, comme les états, qu'on considère, correspondent à des positions très voisines de S, il est bien évident que, la relation $\beta = 0$ étant satisfaite, φ doit différer très peu: ou bien de ϑ, ou bien de $\vartheta + \pi$. Dans le premier cas il s'agit d'une éjection, dans le second d'une collision.

Au point de vue physique l'absence de choc ne suffit pas à garantir la régularité du mouvement: pour qu'il soit légitime de le retenir conforme aux prévisions du calcul, il faut que les corps ne se rapprochent pas au délà d'un certain ε.

Lorsque le mobile est à l'intérieur de D on peut encore décider, par la connaissance de l'état de mouvement à un instant quelconque, s'il en sera ainsi ($\delta > \varepsilon$). Toutefois ni cette condition de sûreté, ni l'autre moins restrictive, qui exclut simplement le choc, embrassent toute la durée du mouvement.

Elles sont bien valables tant que le mobile reste en D; mais si le mobile y rentre après en être sorti, elles ne permettent a priori aucune prévision. Cela tient à ce que l'on rentre dans D avec une détermination inconnue W_1 de W, pouvant donner lieu à un nouveau arc $\frac{\partial W_1}{\partial \alpha} = \beta$.

Quoi qu'il en soit, il reste toujours un résultat positif se rapportant à la région D: Si $\delta > \varepsilon$, il n'y a rien à craindre pour le moment du voisinage de S. Seuls des rapprochements nouveaux (c'est-à-dire précédés par des sorties de D) pourraient devenir dangereux.

§ 8. *Remarque.*

Tout arc de trajectoire intérieur à D satisfait effectivement aux équations

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta$$

et (III).

Comme il a déjà été substantiellement remarqué, en éliminant α et C de $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ on obtient une fonction uniforme f de ξ, η, ϖ, χ.

On a donc pour tout arc A

$$f(\xi, \eta, \varpi, \chi) = \beta.$$

La fonction f est distincte de F, puisque, en se rapportant par exemple aux variables C, ξ, η, k, on a $F = -C$, tandis que

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{8\nu}(-\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha) + \ldots \\ &= \sqrt{8\nu}\left(-\xi \frac{k - \frac{1}{k}}{2i} + \eta \frac{k + \frac{1}{k}}{2}\right) + \ldots \end{aligned}$$

n'est pas une fonction de la seule C.

Voilà une intégrale autre que $F = \text{const.}$ uniforme pour quelque système de valeurs de ξ, η, ϖ, χ et par suite aussi des variables cartésiennes x, y, x', y', qui en sont des fonctions algébriques.

A première vue la conclusion est choquante, puisqu'elle paraît en contradiction avec le théorème bien connu de M. Poincaré, qui exclut l'existence d'intégrales uniformes en déhors de $F = \text{const.}$

Il n'en est rien toutefois, et on peut s'en convaincre aisément en ayant égard aux limites de validité des deux résultats.

Celui de M. Poincaré établit la non-existence d'intégrales uniformes par rapport aux variables képlériennes, ce qui implique l'uniformité au voisinage de *tous* les états de mouvements x, y, x', y', qui appartiennent à une même orbite osculatrice (elliptique).

On ne peut pas exclure, d'après cette proposition, l'existence d'intégrales uniformes, pour quelque portion de l'orbite seulement, ni non plus au voisinage des états de mouvement, qui ne seraient elliptiques du tout.

Notre intégrale $f = \beta$, qui est uniforme dans le domaine D, se trouve précisément dans l'une ou dans l'autre de ces conditions.

Padoue, septembre 1904.

SUR LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LE PROBLÈME DU CONTINU

PAR

I. KÖNIG

à BUDAPEST.

Après de longues hésitations, je me décide à publier cet article. Quel que soit l'accueil réservés aux vues que j'y expose, je crois que les questions qu'il soulève sont de celles que la théorie des ensembles ne saurait éluder dans ses développements ultérieurs.

Que le mot »ensemble» ait été employé indistinctement pour désigner des concepts très différents et que ce soit là origine des paradoxes apparents de la théorie des ensembles; que d'autre part cette théorie, comme toute science exacte, ne puisse se passer d'axiomes, et que le choix des axiomes, plus profond ici qu'ailleurs, soit dans une certaine mesure arbitraire (comme il arrive pour toutes les sciences): tout cela est bien connu. Néanmoins je pense présenter sur ces questions quelques points de vue nouveaux. En particulier, je crois que la théorie *spéciale* des ensembles bien ordonnées ne saurait être regardée comme entièrement fondée tant que l'on n'aura pas éclairci les questions soulevées au § 4.

1. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots,$ une série infinie dénombrable (de type ω) d'entiers positifs, et soit la suite

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$$

un élément de l'ensemble appelé »continu». Si l'on est préalablement parti d'une autre définition du continu, alors les $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ sont des symboles qui, d'une part, déterminent univoquement chacun des éléments du continu, et d'autre part distinguent ces éléments les uns des autres.

Nous dirons qu'un élément du continu a une »définition finie« si (nous servant pour fixer notre pensée scientifique d'une langue appropriée) nous pouvons en un temps fini définir une opération (loi de formation) conduisant à distinguer spécifiquement l'élément donné d'un autre élément quelconque, c'est à dire démontrant pour un entier quelconque k l'existence d'un et d'un seul élément a_k.

Il faut observer que la distinction spécifique dont il est ici question n'implique pas que la *détermination* de a_k puisse être faite au moyen d'une opération bien définie ou même finie.

On montre facilement que les éléments du continu dont la définition est finie forment un ensemble partiel de puissance $\aleph_0$. Nous désignerons cet ensemble par E.

Une définition finie doit s'exprimer tout entière au moyen d'un nombre fini de mots et de signes de ponctuation. L'ensemble des définitions finies peut être ordonné de telle sorte qu'à l'une quelconque de ces définitions corresponde un et un seul entier positif comme nombre ordinal fini.

A tout élément du continu ayant une définition finie correspond une suite d'entiers positifs (puisqu'un tel élément peut admettre et admet en effet une pluralité de définitions finies). Dans cette suite il y a un entier qui est plus petit que tous les autres. Cet entier déterminera donc d'une manière univoque l'élément correspondant (à définition finie) du continu. Ainsi l'ensemble E est équivalent à un ensemble partiel pris dans l'ensemble des entiers positifs. D'ailleurs si l'on se donne une suite

$$(a , a , \ldots , a , \ldots),$$

où a prend des valeurs entières positives quelconques, cette suite constitue un élément du continu à définition finie. On déduit de ces remarques que

$$e = \aleph_0 ,$$

en désignant par e la puissance de l'ensemble E.

Mais comme le continu, par définition, n'est pas dénombrable, il y a nécessairement des éléments du continu dont la définition n'est pas finie.

2. Quoique cette exposition ne puisse encore prétendre à une rigueur parfaite, il faut néanmoins préciser les axiomes qui sont intervenus jusqu'ici dans mon raisonnement.

a) En premier lieu nous admettons comme un fait que notre conscience est le théâtre de processus qui obéissent aux lois formelles de la logique et constituent la »pensée scientifique». Nous admettons aussi que parmi ces processus il s'en trouve qui correspondent univoquement aux processus par lesquels nous formons les suites de symboles définies plus haut.

»Comment» se produit cette correspondance et »jusqu'où» elle va, ce sont là des questions que nous ne soulevions pas. (*Axiome métalogique.*)

b) Le concept de »suite arbitraire (de type ω) de nombres entiers positifs», et le concept de »l'ensemble de toutes ces suites», que nous appelons »continu», sont des »concepts possibles», c'est-à-dire des concepts qui ne renferment aucune contradiction logique. (*Axiome du continu.*)

Une analyse plus approfondie de ces axiomes se trouve, je crois, dans le memoire qu'a présenté M. HILBERT au III[e] Congrès international des Mathématiciens (C. R. du Congrès, p. 174).

La définition du continu sur laquelle je m'appuie implique, en particulier, que la puissance du continu est $\aleph_0^{\aleph_0}$.

On a en outre $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$. Pour le prouver on peut se référer à ma note *Zum Kontinuum Problem*, publiée dans les Math. Annalen, t. 60, p. 177.

En admettant ces données, je me mets sciemment en opposition avec la doctrine d'après laquelle il serait interdit aux analystes de s'aventurer hors du domaine des »lois finies». Une telle doctrine entraîne selon moi la négation de l'existence du continu et du problème du continu. Mon point de vue consiste au contraire à admettre qu'il y a des éléments du continu que nous ne pouvons pas penser »jusqu'au bout», et qui, malgré cela, sont exempts de contradiction. Ce sont, si l'on me passe cette nouvelle acception du mot, des éléments »idéaux».

c) Les axiomes précédents nous donnant le droit de parler d'un élément »quelconque» du continu, nous invoquons en dernier lieu l'*Antithèse logique:* »Ou un élément quelconque du continu a une définition finie, ou ce n'est pas le cas.» Les axiomes a) et b) une fois admis, l'axiome c) ne saurait pas ne pas l'être. On peut d'ailleurs, sans rien changer à nos déductions, lui donner une forme subjective: »Pour un élément quelconque du continu, on peut sûrement trouver une définition finie, ou ce n'est pas le cas».

3. Les données admises ci-dessus vont me permettre de prouver, d'une manière extraordinairement simple, que *le continu ne peut pas être bien ordonné.*

Supposons que les éléments du continu forment un ensemble bien ordonné, et considérons parmi ces éléments ceux qui n'ont pas une définition finie. Ces derniers constituent un ensemble partiel de l'ensemble bien ordonné, et cet ensemble partiel, étant lui-même bien ordonné, a un et un seul premier élément.

Or, d'après les données admises plus haut, le continu, comme tout ensemble bien ordonné, définit une suite bien enchaînée (sans lacune, »lückenlos») de nombres ordinaux déterminés, en sorte qu'à chaque élément du continu correspond un et un seul nombre ordinal et inversement. Dès lors »le nombre ordinal correspondant à un élément à définition finie du continu», de même que »l'élément du continu correspondant à un nombre ordinal à définition finie de la suite considérée», a lui-même une définition finie. Notre raisonnement nous forcerait dès lors à conclure que dans une suite de nombres ordinaux il y a un nombre qui est le premier de la suite et qui n'a pas de définition finie. Cela est manifestement impossible.

On a en effet un ensemble déterminé, bien ordonné, de nombres ordinaux à définition finie qui forment une suite bien enchaînée (lückenlos). »Le nombre ordinal qui, d'après son ordre de grandeur, se range immédiatement après la suite en question» est bien un nombre à définition finie, et cependant notre hypothèse initiale conduit à conclure qu'il n'a pas de définition finie.

Ainsi l'hypothèse d'après laquelle le continu pourrait être bien ordonné conduit, comme je l'avais annoncé, à une contradiction.

4. On suspectera sans doute la valeur du raisonnement précédent en faisant observer qu'il s'applique mot pour mot à *tout* ensemble bien ordonné non dénombrable. Il équivaudrait donc à prouver qu'il n'existe pas de tels ensembles. Or on connait un ensemble bien ordonné non dénombrable défini sans contradiction: c'est la classe de nombres $Z(\aleph_0)$ de M. Cantor, ou »l'ensemble de tous les types ordinaux des ensembles bien ordonnés de puissance $\aleph_0$». On voudra arguer de ce paradoxe qu'une faute

a été commise dans le raisonnement que j'ai exposé. Il ne *faut* pas, qu'il en soit ainsi, comme je vais le montrer en entrant dans quelques détails.

L'acception du mot »ensemble» diffère totalement dans les deux cas.

Lorsque nous construisons le concept du continu, notre point de départ, notre base est la suite »arbitraire» $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$. En tant que nous remplaçons $a_1, a_2, \ldots$ par des entiers positifs déterminés, nous faisons de cette suite une suite »déterminée», un élément du continu qui, s'il est défini, est dans notre entendement distingué de tous les autres éléments. En tant que nous nous représentons ensuite *l'ensemble* de tous ces éléments »bien distincts», nous sommes conduits au continu.

Il en est tout autrement de la classe de nombres $Z(\aleph_0)$. Les »éléments» de cette classe sont définis par la »propriété» qu'ils ont d'être les types ordinaux d'ensembles bien ordonnés de puissance $\aleph_0$. Nous connaissons à vrai dire de tels éléments, par exemple: $\omega, \omega + 1, \ldots$. Mais la propriété qui les définit n'est qu'une abstraction; à mettre les choses au mieux, elle fournit un moyen de distinguer entre les objets qui appartiennent à la classe considérée et les autres objets; mais elle ne donne aucune indication sur la manière dont on pourra effectivement former *chacun* des éléments de $Z(\aleph_0)$. C'est ici un »concept collectif» qui est notre base, et c'est en partant de ce concept que nous construisons *après coup* des éléments. C'est pourquoi je voudrais qu'avec M. CANTOR on appelât $Z(\aleph_0)$ une »classe» en non un »ensemble».

Mais que la seconde classe de nombres $Z(\aleph_0)$ puisse être définie comme ensemble explicite formé d'éléments bien distingués (distincts par leur nature), cela ne saurait actuellement être regardé comme vraisemblable. Et précisément, si l'on accepte la démonstration que j'ai donnée plus haut, on en déduira que la seconde classe de nombres ne saurait être conçue comme étant un ensemble donné explicitement, c'est-à-dire comme ensemble d'éléments parfaitement distingués et séparés les uns des autres.[1]

---

[1] Là se trouve, je crois, l'origine des paradoxes de la théorie des nombres ordinaux, que M. BURALI-FORTI a signalés le premier.

J'ajouterai encore quelques remarques qui facilitent peut-être la compréhension du § 4.

L'ensemble des nombres entiers positifs n'est lui aussi originairement donné que comme »classe». C'est également ainsi que M. HILBERT définit (l. c.) le »plus petit

En terminant cet exposé fragmentaire, je me plais à reconnaître que, bien qu'opposés à certaines vues de M. Cantor, mes résultats, s'ils sont exacts, ne mettent que mieux en lumière la haute valeur des créations géniales de l'illustre analyste. Ce ne sont d'ailleurs que certaines présomptions de M. Cantor qui seraient infirmées par ce travail: le contenu des propositions *démontrées* par lui subsiste intact.

Je remarque enfin que la distinction établie ici entre les »ensembles» et les »classes» éclaircit entièrement les paradoxes bien connus de la théorie des ensembles (ensemble de tous les ensembles etc.).

Les principaux résultats exposés ci-dessus ont été présentés à l'Académie Hongroise des Sciences le 20 juin 1905.

infini». Mais il semble qu'ici le postulat qui consiste à assimiler la classe à un ensemble explicitement donné soit possible, c'est-à-dire exempt de contradiction.

Au contraire, d'après ce qui précède, on devrait regarder le continu comme étant exclusivement un »ensemble explicitement donné», et la seconde classe de nombres comme étant exclusivement une classe ou (si l'on me permet l'expression) un »ensemble en puissance», (werdende Menge).

Je veux encore signaler un concept collectif très élémentaire que sûrement on n'a pas le droit de considérer comme ensemble explicitement donné.

Partons de l'ensemble de tous les nombres décimaux finis, mais regardons ces nombres comme ayant une infinité de décimales, cela en ajoutant à leur droite une infinité de zéros.

Imaginons que dans les nombres ainsi écrits nous échangions deux chiffres quelconques. Toutes les places sont disponibles, c'est-à-dire que si nous remplaçons un chiffre quelconque par un autre chiffre quelconque, nous obtenons un nombre qui appartient encore à la classe considérée.

Et cependant il n'est aucunement permis de parler de l'ensemble de tous les places, comme places disposibles; car alors on omettrait manifestement de faire intervenir le principe restrictif auquel satisfait la loi de formation de nos nombres. Ce principe est le suivant: »La place de rang k est disponible; mais il existe nécessairement un entier positif $l > k$, tel qu'à partir de la place de rang l toutes les places soient occupées par le chiffre 0.»

Pour répondre à la question: »Combien y a-t-il de places disponibles simultanément?» les nombres cardinaux (au sens de M. Cantor) sont inadéquats: il faut créer un nouveau concept.

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ET SÉRIES DE TAYLOR

PAR

P. FATOU

à PARIS.

Introduction.

Le présent travail a pour objet l'étude de certaines questions d'ordre général concernant les séries trigonométriques et les séries de TAYLOR; il a été entrepris, en grande partie, dans le but de montrer le parti que l'on peut tirer dans ces questions des notions nouvelles de mesure des ensembles et d'intégrale définie généralisée.

Le problème de la mesure des ensembles a été abordé pour la première fois par M. G. CANTOR; ses définitions ont été précisées et complétées par M. JORDAN dans son cours d'analyse; mais c'est M. E. BOREL [1] qui a donné pour la première fois à cette notion de mesure une portée assez générale pour la rendre vraiment utile au point de vue des applications. M. BOREL a posé le problème sous une forme qui équivaut à celle-ci: [2]

Attacher à tout ensemble borné ponctuel (supposé à une dimension) un nombre positif ou nul qu'on appellera sa mesure et qui satisfasse aux conditions suivantes:

[1] E. BOREL. *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars, 1898).

[2] LEBESGUE. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904).

1°) Deux ensembles égaux ont même mesure.

2°) L'ensemble somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures des ensembles composants.

3°) La mesure de l'ensemble de tous les points du segment (0 , 1) est 1. Le problème ainsi posé est susceptible d'une solution unique, sinon pour tous les ensembles que l'on peut concevoir comme existant, du moins pour tous ceux que l'on a pu effectivement nommer. La mesure, au sens de M. Borel, est d'ailleurs la même que la mesure au sens de M. Cantor, dans le cas d'un ensemble fermé; mais si l'on considère un ensemble dénombrable et dense, par exemple l'ensemble des points à abscisse rationnelle compris entre zéro et 1, la définition de M. Borel conduira à lui attribuer comme mesure, le nombre zéro, tandis que d'après M. Cantor sa mesure serait 1.

Dans sa thèse (intégrale, longueur, aire), parue dans les Annali di Matematica (1902), M. H. Lebesgue a repris et complété le problème de la mesure d'après M. Borel et en a fait une application des plus importantes à la définition de l'intégrale; la notion d'intégrale, d'après M. Lebesgue, s'applique à toutes les fonctions discontinues que l'on peut nommer (par exemple à toutes les fonctions représentables analytiquement), au moins quand ces fonctions sont bornées; elle coïncide d'ailleurs avec l'intégrale au sens de Riemann, quand celle-ci est applicable, et jouit de toutes les propriétés essentielles de l'intégrale de Riemann.

Il semble que l'introduction de ces notions de mesure et d'intégrale généralisée, qui constitue un progrès important dans l'étude des ensembles ponctuels et des fonctions de variables réelles, peut également servir à résoudre des problèmes qui se posent dans des branches anciennement cultivées de l'analyse.

Déjà M. Lebesgue, dans un mémoire paru dans les Annales de l'École normale supérieure, avait appliqué sa notion d'intégrale à l'étude des séries trigonométriques, et démontré entre autres choses, que si une série trigonométrique est convergente et représente une fonction bornée les coefficients de cette série sont donnés par les formules d'Euler-Fourier où les intégrales sont prises au sens généralisé du mot. Or il existe effectivement des fonctions bornées, non intégrables au sens de Riemann, qui sont représentables par une série trigonométrique convergente en tout point:

ce résultat permet donc de mettre plus d'unité et de généralité dans la théorie de la série de FOURIER.

Dans ce travail je démontre un résultat analogue relatif à l'intégrale de POISSON: si une fonction harmonique régulière à l'intérieur d'un cercle y reste bornée, elle peut s'exprimer à l'aide d'une intégrale de POISSON, l'intégrale étant prise au sens de M. LEBESGUE.

J'ai déduit de là une propriété générale concernant la façon dont se comporte une branche de fonction analytique uniforme au voisinage d'une coupure isolée; *si la fonction est bornée au voisinage de cette coupure (ou devient bornée par une transformation homographique), en tous les points de la coupure, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle, la fonction prend une valeur déterminée, quand on s'approche de l'un de ces points suivant un chemin non tangent à la coupure.* Il y a donc dans tout intervalle, des points en infinité non dénombrable, sur la coupure, pour lesquels la fonction prend une valeur déterminée, en excluant, au besoin, les chemins tangents à celle-ci. Or on sait que, dans d'autres cas, des circonstances tout autres peuvent se présenter: la fonction modulaire, par exemple, est indéterminée en tous les points d'abscisse irrationnelle de l'axe des quantités réelles, même lorsqu'on s'approche de ces points normalement à la coupure; la propriété énoncée n'est donc pas une banalité.

C'est encore l'étude de l'intégrale de POISSON généralisée, qui m'a permis de démontrer l'existence de *fonctions analytiques uniformes possédant, sur une coupure, une infinité non dénombrable de zéros qui peut être dense dans tout intervalle.*

Les mêmes méthodes m'ont permis, dans un cas il est vrai très particulier, d'aborder l'étude des séries trigonométriques données par la loi de leurs coefficients. On peut chercher, dans ce cas, des critères de convergence, ou supposant que la convergence ait lieu, chercher des propriétés des fonctions ainsi définies; ces problèmes qui paraissent difficiles, ont été peu étudiés. Le principal résultat que j'aie obtenue dans cet ordre d'idées est le suivant: *Si na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'ensemble des points de divergence de la série $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est de mesure nulle.* Il en résulte que si l'on a plusieurs séries de cette espèce, en nombre fini ou en infinité dénombrable, il y a dans tout intervalle, des points où elles convergent toutes simultanément.

Si, renonçant à la convergence au sens ordinaire du mot, on cherche dans quel cas une série est sommable par les procédés de la moyenne arithmétique, comme l'a fait M. Féjer,[1] on peut énoncer des conditions de sommabilité plus générales: Si par exemple on a

$$|a_n| < \frac{C}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}, \qquad |b_n| < \frac{C}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

on trouve que la série est au plus »doublement indéterminée», sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, et représente une fonction absolument intégrable dans l'ensemble des points où elle est définie.

J'espère aussi avoir montré que l'intérêt qui s'attache aux travaux de Riemann sur les conditions de représentation d'une fonction par une série trigonométrique, est loin d'être épuisé; j'ai pu facilement, déduire de l'un des théorèmes généraux de Riemann, ce fait qu'une série de Taylor dont les coefficients tendent vers zéro et dont le rayon de convergence est égal à un, est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence, ce qui n'avait été démontré que dans des cas particuliers.

J'ai divisé ce travail en deux parties, dans la première j'étudie l'intégrale de Poisson lorsque la fonction donnée sur le contour est discontinue; dans la deuxième partie j'applique les résultats de cette étude à quelques questions concernant les séries trigonométriques et la façon dont se comportent les séries de Taylor sur leur cercle de convergence et je fais connaître quelques propriétés des séries entières à coefficients entiers.

Enfin dans une note additionnelle je donne une démonstration simplifiée du théorème de Cantor sur l'impossibilité de la convergence en tout point d'une série trigonométrique dont les coefficients ne tendent pas vers zéro et quelques remarques générales sur la convergence de ces séries.

Qu'il me soit permis de remercier ici les personnes qui ont bien voulu m'encourager à entreprendre ce travail: MM. Painlevé et Borel et tout particulièrement mon ami H. Lebesgue qui n'a cessé de s'intéresser à mes recherches et dont les conseils m'ont été fort utiles.

[1] L. Féjer (*Sur les fonctions bornées et intégrables*, Comptes Rendus, 10 décembre 1900) et Mathematische Annalen (tome 57, 1904).

L'intégrale de Poisson.

1. On sait que la solution du problème de DIRICHLET dans le cas du cercle est donnée par l'intégrale

$$(1) \qquad F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u) du$$

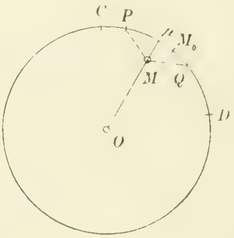
qui définit une fonction harmonique régulière à l'intérieur du cercle de rayon 1, et prenant sur la circonférence, en un point d'argument u_0 la valeur $f(u_0)$.[1] Ce dernier fait n'est d'ailleurs exact, en général, que moyennant la continuité de la fonction périodique $f(u)$, mais il importe de remarquer que, sous la seule condition que $f(u)$ soit une fonction *sommable* en valeur absolue, au sens que M. LEBESGUE attribue à ce mot, l'intégrale précédente conserve un sens et définit toujours une fonction harmonique; mais alors, lorsque le point (r, θ) se rapproche d'un point $(1, u_0)$ de la circonférence, la fonction F ne tend pas nécessairement vers une valeur déterminée. C'est l'étude des différentes particularités qui peuvent se présenter, quand $f(u)$ présente des discontinuités ou devient infini qui fait l'objet du présent chapitre.

Faisons d'abord une remarque générale: la façon dont se comporte au voisinage du point $(1, u_0)$ de la circonférence la fonction $F(r, \theta)$, ne dépend que des valeurs de la fonction $f(u)$ dans un intervalle aussi petit qu'on le veut, comprenant le point u_0 à son intérieur. En effet, partagons l'intégrale (1) en deux parties, l'une relative à l'intervalle (a, b) comprenant le point u_0, l'autre relative à l'arc complémentaire S de la circonférence; la deuxième intégrale partielle tend vers zéro quand le point $M(r, \theta)$ tend vers le point $(1, u_0)$, car le dénominateur: $1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2$, qui représente le carré de la distance d'un point de l'arc S au point M finit par devenir supérieur à un nombre positif fixe et comme par hypothèse

[1] V. p. ex.: PICARD, *Traité d'analyse*, tome I.

$\int_S |f(u)|\,du$ a une valeur finie, il en résulte que notre intégrale tend vers zéro comme $1 - r^2$, de telle sorte que les valeurs de $f(u)$ à l'extérieur de (a, b) n'ont aucune influence sur les valeurs limites de la fonction harmonique.

2. Supposons maintenant qu'au point $u = u_0$, la fonction $f(u)$ devienne infinie en restant positive, de telle sorte qu'elle soit continue pour $u = u_0$, à condition de lui attribuer en ce point la valeur $+\infty$. Il est facile de montrer dans ce cas que $F(r, \theta)$ tend vers $+\infty$ quand le point $M(r, \theta)$ vient à se confondre avec le point $M_0(1, u_0)$. En effet la fonction $f(u)$ sera positive dans un intervalle fini CD entourant le point M_0.



Il suffit d'étudier la partie de l'intégrale de Poisson relative à l'arc CD. Du point M comme centre avec $(1 - r)\sqrt{2}$ comme rayon décrivons un arc de cercle qui coupe CD en deux points P et Q. On voit aisément que l'on a:

$$\text{arc } PQ = 2(1 - r) \quad [\text{à une quantité près de l'ordre de } (1 - r)^2]$$

et

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} > \frac{1 - r^2}{2(1 - r)^2} > \frac{1}{2(1 - r)}, \quad \text{pour tous les points de } PQ$$

de sorte que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{PQ} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)\,du > \frac{M}{2\pi},$$

si la fonction $f(u)$ est constamment plus grande que M dans le champ

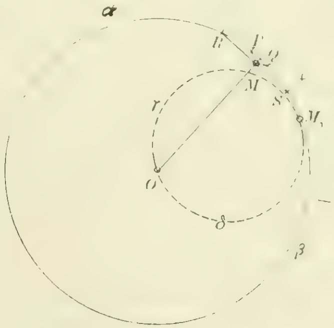
d'intégration. Choisissons alors un nombre positif δ tel que dans l'intervalle $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$, on ait: $f(u) > M$, et prenons:

$$1 - r < \frac{\delta}{2},$$

$$|\theta - u| < \frac{\delta}{2}.$$

Dans ces conditions, tous les points de PQ étant intérieurs à l'intervalle $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$, l'intégrale précédente sera plus grande que $\frac{M}{2\pi}$ et il en sera de même à fortiori si on étend l'intégrale à tous les points de l'arc CD. Il en résulte que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)du$ devient plus grande que toute quantité donnée quand le point M tend par un chemin quelconque vers le point M_0.

Examinons ensuite le cas où $f(u)$ devient infinie, en changeant brusquement de signe lorsque u traverse la valeur u_0.



Il est bien facile de prévoir que dans ce cas la fonction harmonique est indéterminée au voisinage du point M_0 et peut s'approcher autant qu'on le veut de tout nombre réel. Pour nous en assurer menons la corde RS perpendiculaire à OM et supposons que le point M_0 soit extérieur

à RS, ce qui aura lieu si M est extérieur au cercle décrit sur OM_0 comme diamètre. Pour tous les points extérieurs à RS, on aura

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} < 1$$

et la partie correspondante de l'intégrale de Poisson restera moindre que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(u)|\,du$ et sera donc bornée. Si les points R, P, Q, S se trouvent du côté de M_0 où la fonction $f(u)$ prend des valeurs infinies positives les intégrales:

$$\int_{QP} \quad \text{et} \quad \int_{SR}$$

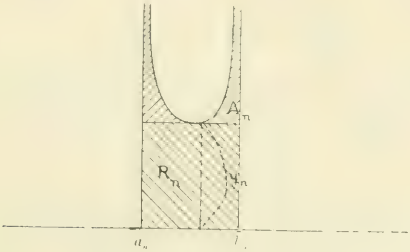
prennent d'après ce qui précède des valeurs infiniment grandes positives quand M tend vers M_0, et il en est de même de l'intégrale de Poisson étendue à toute la circonférence.

Ainsi quand M tend vers M_0 en restant compris dans l'angle $\gamma M_0 \alpha$ des deux circonférences, $F(r, \theta)$ tend vers $+\infty$; au contraire si M tendant vers M_0 reste dans l'angle $\delta M_0 \beta$, $F(r, \theta)$ tend vers $-\infty$. D'autre part $F(r, \theta)$ étant continue à l'intérieur du cercle de rayon 1, il est clair qu'elle pourra s'approcher autant qu'on le veut de toute valeur donnée à l'avance au voisinage du point M_0.

Nous donnerons une application intéressante de ces considérations en construisant une fonction harmonique régulière et constamment positive à l'intérieur d'un cercle C, et *devenant infinie au voisinage d'une infinité non dénombrable de points de la circonférence.*

Considérons, sur une droite, un ensemble parfait, de mesure nulle dont tous les points soient à distance finie. Nous savons qu'un tel ensemble a la puissance du continu. Nous savons aussi qu'il peut s'obtenir en enlevant d'un segment AB une infinité dénombrable d'intervalles, sans point commun deux à deux, et dont la somme des longueurs est égale à la longueur de AB. On les appelle ordinairement d'après M. Baire les intervalles *contigus* à l'ensemble considéré E. Ceci rappelé, je dis qu'il est possible de déterminer une fonction continue, positive, devenant infinie en tous les points de l'ensemble E et qui soit intégrable dans l'intervalle AB.

Soit (a_n, b_n) un intervalle contigu à E. Je définis dans cet intervalle une fonction continue positive, devenant infinie aux deux extrémités (a_n, b_n) et intégrable entre ces limites. Soit $\varphi_n(x)$ cette fonction que nous représenterons par une courbe.



Nous poserons:

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) \quad \text{dans} \quad (a_n b_n)$$

et

$$\varphi(x) = +\infty \text{ pour tous les points de } E.$$

Pour que la fonction $\varphi(x)$ soit intégrable il faut que la série

$$\int_{a_1}^{b_1}\varphi_1(x)dx + \int_{a_2}^{b_2}\varphi_2(x)dx + \ldots + \int_{a_n}^{b_n}\varphi_n(x)dx + \ldots$$

soit convergente. Pour que $\varphi(x)$ soit continue aux points de E, il faut que le minimum y_n de $\varphi_n(x)$ dans $(a_n b_n)$ devienne infini avec n. Il est aisé de voir que ces conditions ne sont pas contradictoires.

En effet, posons:

$$\text{long. } a_n b_n = s_n$$

l'intégrale $\int_{a_n}^{b_n}\varphi_n(x)dx$ est égale à $s_n y_n$ (qui représente l'aire du rectangle R_n), augmenté de l'aire A_n du domaine compris entre la courbe: $y = \varphi_n(x)$, les deux asymptotes verticales et la tangente au point le plus bas.

Or il est possible de choisir les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ augmentant indéfiniment avec n et tels que la série:

$$s_1 y_1 + \ldots + s_n y_n + \ldots$$

soit convergente, car la série $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$ étant convergente on peut trouver une série à termes positifs également convergente dont les termes deviennent infiniment grands par rapport à ceux de la première.[1] Ayant ainsi déterminé l'ordonnée du point le plus bas de chacune de nos courbes: $y = \varphi_n(x)$, nous devons les construire de telle sorte que la somme des aires

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

ait une valeur finie. Or il est clair que nous pouvons tracer nos courbes de façon que chacune de nos aires A_n soit aussi petite que nous voulons.[2] Il est d'ailleurs permis de faire telle hypothèse que l'on voudra sur la nature analytique de la fonction $y = \varphi_n(x)$, à l'intérieur de l'intervalle (a_n, b_n).

La fonction $\varphi(x)$ étant ainsi bien définie dans l'intervalle AB, sera intégrable dans AB; en outre elle sera continue: cela est évident pour les points qui n'appartiennent pas à E. Soit x' un point de E, $x_1, x_2, \dots$, $x_n, \dots$, des points tendant vers x'. Si x_n appartient à E, on a:

$$\varphi(x_n) = \varphi(x') = +\infty.$$

Si $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ appartiennent à des intervalles contigus à E, il faut, ou bien qu'ils appartiennent à des intervalles de rang de plus en plus élevés et alors $\varphi(x_n)$ tend vers l'∞, en vertu de la façon dont nous avons choisi les minima des fonctions $\varphi_n(x)$. Si au contraire les x_n restent dans des intervalles de rang fini, il faut qu'ils tendent vers l'extrémité de l'un de ces intervalles, et $\varphi(x_n)$ devient encore infini.

Ainsi la fonction $\varphi(x)$, qui est intégrable ne cesse pas d'être continue aux points de E, où elle prend la valeur $+\infty$.

[1] Voir par exemple: Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, (Paris, Gauthier-Villars, 1902).

[2] Si l'on choisit, par exemple, des axes tels que les deux asymptotes soient les droites: $x = \pm 1$, l'origine étant le point le plus bas de la courbe, en posant:

$$y = \frac{\varepsilon x^2}{+\sqrt{1 - x^2}}$$

on a une courbe telle que l'aire comprise entre elle, ses deux asymptotes et l'axe des x est égale à $\frac{\pi}{2}\varepsilon$ et peut être rendue aussi petite que l'on veut en choisissant covenablement ε.

Soit donc E un ensemble parfait de mesure nulle de points de la circonférence du cercle C de rayon 1; nous construisons comme il vient d'être expliqué une fonction continue, périodique, devenant infinie aux points de E et sommable, et nous envisageons l'intégrale de Poisson:

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)\,du$$

qui représente bien une fonction harmonique continue sur C, et prenant la valeur $+\infty$ aux points de E; de plus elle reste positive à l'intérieur de C.

3. Pour aller plus loin dans l'étude de l'intégrale de Poisson prenons la dérivée par rapport à θ des différents termes des égalités:

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)\,du$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction harmonique:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - r^2)2r\sin(u - \theta)}{[1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2]^2} f(u)\,du$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} nr^n (-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta).$$ [1]

Nous allons démontrer que si en un point u_0, la fonction $f(u)$ admet une dérivée finie $f'(u_0)$, la fonction $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ tend vers $f'(u_0)$ quand le point (r, θ) se rapproche indéfiniment du point $(1, u_0)$, suivant le rayon qui y aboutit. Nous donnons donc à θ une valeur constante (on peut prendre $\theta = 0$) et nous cherchons si l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - r^2)2r\sin u}{[1 - 2r\cos u + r^2]^2} f(u)\,du$$

[1] La dérivation sous le signe $\int$ pour $r < 1$ se justifie très aisément.

tend vers une limite quand r tend vers 1. En faisant $f(u) = u$ (dans $(-\pi, +\pi)$) la fonction $F(r, \theta)$ est connue et l'on trouve ainsi que l'intégrale précédente a pour valeur:

$$\frac{2r}{1 + r}$$

et tend vers 1 en même temps que r. On conclut de là qu'on peut sans restreindre la généralité, supposer:

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Posant pour abréger l'écriture

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos u + r^2} = H$$

nous écrirons l'intégrale précédente sous la forme:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H \frac{2r \sin u}{1 - 2r\cos u + r^2} f(u)du.$$

Or si dans l'expression $\dfrac{2r\sin u}{1 - 2r\cos u + r^2}$ on pose $r = 1$, elle devient $\dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{u}{2}}$,

et l'intégrale se réduit à:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H \frac{f(u)}{\operatorname{tang}\frac{u}{2}} du$$

qui tend vers zéro avec $1 - r$, car $f(u)$ ayant une dérivée nulle pour $u = 0$, $\dfrac{f(u)}{u}$ ou $\dfrac{f(u)}{\operatorname{tang}\frac{u}{2}}$ tend vers zéro avec u, de sorte que la fonction qui multiplie H dans l'intégrale ci-dessus étant continue pour $u = 0$, on se trouve dans le cas classique de l'intégrale de Poisson.

Tout revient donc a démontrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H \left\{ \frac{2r\sin u}{1 - 2r\cos u + r^2} - \frac{\sin u}{1 - \cos u} \right\} f(u)du$$

a aussi une limite nulle, ce qui se voit aisément en la mettant sous la forme

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H \frac{(1-r)^2}{1-2r\cos u+r^2} \frac{f(u)}{\operatorname{tang}\frac{u}{2}} du$$

car le second facteur qui figure sous le signe $\int$ étant toujours compris entre 0 et 1 l'intégrale précédente est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H \left|\frac{f(u)}{\operatorname{tang}\frac{u}{2}}\right| du$$

qui tend vers zéro d'après un raisonnement que nous venons de faire.

Il est à remarquer que le résultat établi subsiste lorsqu'on suppose seulement que:

$$\lim_{a=0} \frac{f(0+a)-f(0-a)}{2a}$$

existe et est finie; c'est ce qu'on voit facilement en réunissant, dans les intégrales qui précèdent, les éléments qui correspondent à des valeurs égales et de signe contraire de u. On voit aussi sans peine qu'il n'y a rien de changé si cette limite est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.

Supposons maintenant que la fonction dérivée $f'(u)$ existe dans tout un intervalle et soit continue en un point u_0 de cet intervalle. Nous allons montrer que, dans ces conditions, la fonction harmonique $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ prend la valeur $f'(u_0)$ au point u_0, quel que soit le chemin par lequel on parvient à ce point.

En effet la fonction $f'(u)$ étant finie et continue en u_0 est bornée dans un intervalle fini $s=[A, B]$ enfermant ce point; soit S l'arc complémentaire de s: l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S} \frac{(1-r^2)2r\sin(u-\theta)}{[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]^2} f(u)du$$

a pour limite zéro, comme le montre un raisonnement déjà employé, et l'on a d'autre part

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{(1-r^2)2r\sin(u-\theta)}{[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]^2}f(u)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(u-\theta)}f(u)\right]_A^B+\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(u-\theta)}f'(u)du$$

l'intégration par parties étant justifiée par ce fait que dans s la fonction $f'(u)$ est bornée et admet son intégrale indéfinie comme fonction primitive. La partie tout intégrée s'évanouit à la limite et l'autre tend vers $f'(u_0)$ lorsque le point (r, θ) tend vers le point $(1, u_0)$.

En résumé, étant donnée une fonction $f'(u)$ égale à la dérivée d'une fonction continue $f(u)$ de période 2π,[1] il est possible de déterminer une fonction harmonique régulière à l'intérieur d'un cercle et satisfaisant aux conditions suivantes:

1°) en tout point d'argument u_0 de la circonférence, tel que $f'(u_0)$ ait une valeur déterminée, finie ou infinie, la fonction harmonique prend la valeur $f'(u_0)$ quand on s'approche de ce point suivant le rayon;

2°) en tout point u_0 pour lequel $f'(u)$ est finie et continue la fonction harmonique prend la valeur $f'(u_0)$, quel que soit le chemin suivi.

Remarquons d'ailleurs que $f'(u)$ n'étant pas nécessairement bornée peut n'être pas intégrable, de sorte que la solution de problème de Dirichlet (étendu) que nous venons d'obtenir, ne peut pas toujours se mettre sous la forme d'une intégrale de Poisson.

Les résultats qui précèdent vont nous permettre d'étudier l'intégrale de Poisson lorsque la fonction $f(u)$ est une fonction périodique, bornée et sommable; en effet, d'après un théorème de M. Lebesgue, pour un ensemble de valeurs de u dont le complémentaire est de mesure nulle, $f(u)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie $F(u)$ (on peut supposer $F(u)$ périodique, en retranchant de $f(u)$ la constante $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)du$. On peut alors employer l'intégration par parties et écrire

[1] On peut évidemment supposer que $f(u)$ présente des infinis ou des discontinuités isolées pourvu qu'elle soit absolument intégrable.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u)du = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial H_1}{\partial u}F(u)du = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial H_1}{\partial \theta}F(u)du;\ ^1$$

on voit alors que pour tous les points u_0 où $f(u)$ est la dérivée de $F(u)$, l'intégrale de Poisson tend vers $f(u_0)$, quand r tend vers 1, θ restant égal à u_0 (c. a. d. lorsqu'on chemine suivant un rayon).

Réciproquement d'ailleurs, si la fonction harmonique $F(r, \theta)$, régulière à l'intérieur du cercle de rayon 1, y reste plus petite en module qu'un nombre fixe, et si l'on a:

$$\lim_{r=1} F(r, \theta) = f(\theta)$$ [sauf peut être pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ]

la fonction F est celle qui est donnée par l'intégrale de Poisson.

En effet: soit $r < R < 1$. Nous avons

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{+\pi} F(R, u)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(u - \theta)}du.$$

Laissant r et θ fixes, faisons tendre R vers l'unité; la fonction sous le signe $\int$ reste inférieure en valeur absolue à un nombre positif fixe, et tend vers $\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - u)}f(u)$, [sauf pour un ensemble de mesure nulle]. Nous sommes donc en droit d'appliquer le théorème de M. Lebesgue sur l'interversion des signes *lim* et $\int$,[2] et nous pouvons écrire:

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u)du.$$

Ainsi, le problème de Dirichlet dans le cas du cercle (avec le sens élargi que nous lui attribuons) n'a qu'une solution, si l'on assujettit la fonction harmonique inconnue à être bornée à l'intérieur du cercle. Des considérations analogues vont nous permettre de donner, en passant, une démonstration simple d'une identité importante, se rattachant à la multiplication des séries de Fourier.

---

[1] Nous appelons H_1 ce que devient H quand on y remplace u par $(u - \theta)$: H_1 est donc fonction de r, θ, u.

[2] *Leçons sur l'intégration et les fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars 1904), page 114.

Nous avons:

$$F(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \qquad (r < 1)$$

les a_n et b_n étant les coefficients de la série de Fourier de $f(\theta)$.

Multiplions les deux membres de cette égalité par $F(r, \theta)$ et intégrons de $-\pi$ à $+\pi$; il est permis d'intégrer terme à terme, car la série du second membre est uniformément convergente si $r < 1$; on a ainsi:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta) d\theta = a_0 \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) d\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n r^n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta)\cos n\theta d\theta + b_n r^n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta)\sin n\theta d\theta\right].$$

Or on a évidemment:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta)\cos n\theta d\theta = a_n r^n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta)\sin n\theta d\theta = b_n r^n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) d\theta = 2a_0.$$

La formule précédente devient donc:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta) d\theta = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) r^{2n}.$$

Faisons tendre r vers 1; d'après ce qui a été dit plus haut, le premier membre tend vers:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(\theta) d\theta.$$

Il en résulte que la série de puissances de r, à coefficients positifs, qui figure au second membre, reste convergente pour $r = 1$, car dans le cas contraire elle deviendrait infinie pour r tendant vers 1; l'application du second théorème d'Abel sur les séries de puissances nous donne alors:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(\theta) d\theta = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

égalité qui remonte à PARSEVAL et sur laquelle M. HURWITZ est revenu dans un article récent des Mathematische Annalen;[1] elle est démontrée ici sous la seule condition que $f(\theta)$ soit une fonction bornée, sommable au sens de M. LEBESGUE. Essayons d'étendre ce résultat au cas où la fonction $f(u)$ est une fonction non bornée dont le carré est intégrable; ayant choisi des nombres $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ croissant de 0 à $+\infty$, nous regardons $f(u)$ comme la limite des fonctions $f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u), \ldots$ égales à zéro dans l'ensemble mesurable $E_n[|f(u)| > l_n]$ et à $f(u)$ pour les autres valeurs de u; nous considérons également les intégrales de POISSON $F_1(r, \theta) \ldots F_n(r, \theta) \ldots$ correspondant à $f_1(u), f_2(u), \ldots$. Quand l_n tend vers l'infini, $\int_{-\pi}^{+\pi} f_n(u)du$ tend vers $\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)du$, et $\int_{-\pi}^{+\pi} f_n^2(u)du$ tend en croissant vers $\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)du$; de même, pour des valeurs fixes de r et θ, $F_n(r, \theta)$ tend vers $F(r, \theta)$ et comme on a toujours

$$|F_n(r, \theta)| < \frac{2}{\pi}\frac{1 + r}{1 - r}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(u)|du$$

on peut écrire, d'après un théorème connu sur l'intégration:

$$\lim \int_{-\pi}^{+\pi} F_n^2(r, \theta)d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta)d\theta. \tag{1}$$

Mais $f_n(u)$ étant une fonction bornée, nous avons d'après ce qui précède:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F_n^2(r, \theta) < \int_{-\pi}^{+\pi} f_n^2(u)du < \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)du$$

d'où, en vertu de l'égalité (1)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta)d\theta < \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)du$$

c'est à dire:

$$2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)r^{2n} < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)du$$

[1] *Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Functionen* (Mathematische Annalen, tome 57, 1903). — Voir aussi STEKLOFF (Comptes Rendus, 10 nov. 1902). — PARSEVAL, sav. étr. (tome I, 1806).

on en conclut que la série en r du premier membre; devant rester bornée, converge encore pour $r = 1$, et l'on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)\,du \geqq 2a_0^2 + \sum_1^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

En réalité l'égalité a bien lieu, mais ce point est un peu plus délicat à démontrer. Nous y reviendrons ultérieurement.

Dans tous les cas, pour toute fonction bornée ou non bornée, dont le carré est intégrable, la série formée par les carrés des coefficients de sa série de Fourier est convergente.[1]

4. Considérons maintenant la fonction harmonique obtenue en dérivant deux fois l'intégrale de Poisson par rapport à l'argument

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial^2 H_1}{\partial\theta^2} f(u)\,du.$$

Je vais démontrer que si pour une valeur u_0 de u, la fonction $f(u)$ admet une dérivée seconde généralisée, c'est à dire si:

$$\lim_{\Delta u = 0}\frac{f(u_0 + \Delta u) + f(u_0 - \Delta u) - 2f(u_0)}{\Delta u^2} = \varphi(u_0)$$

on a également:

$$\lim_{r-1}\frac{\partial^2 F(r\,,\,u_0)}{\partial\theta^2} = \varphi(u_0).$$

On verra sans peine qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer

$$u_0 = f(u_0) = \varphi(u_0) = 0.$$

L'intégrale précédente, en posant: $\theta = 0$, se met alors aisément sous la forme:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\pi}\frac{2r(1-r^2)}{\Delta^2}\left[2r\sin^2 u + 2r - (1+r^2)\cos u\right]\left[f(u) + f(-u)\right]du,$$

$$\Delta = 1 + r^2 - 2r\cos u,$$

[1] Il peut être utile de remarquer que si la série $\Sigma a_n^2 + b_n^2$ est convergente, les séries $\sum\frac{a_n}{n^a}$, $\sum\frac{b_n}{n^a}$ sont absolument convergentes pour $a > \frac{1}{2}\cdot$

et l'on a.

$$\lim_{u=0}\frac{f(u)+f(-u)}{u^2}=0 \qquad \text{par hypothèse.}$$

Il s'agit de prouver que cette intégrale tend vers zéro avec $1-r$. Nous poserons encore pour abréger l'écriture:

$$f(u)+f(-u)=g(u),$$

$$\frac{1-r^2}{\Delta}=H.$$

Nous décomposons I en plusieurs termes. Soit d'abord

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}H\frac{4r^2\sin^2 u}{\Delta^2}g(u)du.$$

Pour $r=1$, le second facteur sous le signe $\int$ devient:

$$\frac{4\sin^2 u}{4(1-\cos u)^2}=\frac{1}{\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}}$$

et comme $\dfrac{g(u)}{\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}}$ tend vers zéro avec u, c'est à dire est continue pour $u=0$, on en conclut que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}H\frac{g(u)}{\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}}du$$

tend vers zéro avec $1-r$.

On a d'ailleurs:

$$\frac{4r^2\sin^2 u}{\Delta^2}-\frac{\sin^2 u}{(1-\cos u)^2}=\frac{(1-r)^2}{\Delta}\,\frac{(1+r)^2-4r\cos u}{\Delta}\,\frac{1}{\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}},$$

$$\frac{(1-r)^2}{\Delta}<1,\quad \frac{(1+r)^2-4r\cos u}{\Delta}=\frac{\Delta+2r(1-\cos u)}{\Delta}<2$$

de sorte que le terme complémentaire de I_1 est plus petit en valeur absolue que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H\left|\frac{2g(u)}{\tang^2\frac{u}{2}}\right|du$$

qui a pour limite zéro d'après un raisonnement plusieurs fois employé. On a donc

$$\lim_{r=1} I_1 = 0.$$

Considérons maintenant le terme

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H\left[\frac{4r^2 - 2r(1+r^2)\cos u}{\Delta^2}\right]g(u)du$$

pour $r = 1$, le facteur entre parenthèses devient:

$$\frac{1}{1-\cos u} = \frac{1}{2\sin^2\frac{u}{2}}$$

et nous voyons comme plus haut que l'intégrale

$$\int_0^\pi H\frac{g(u)}{\tang^2\frac{u}{2}}du$$

tend vers zéro.

Il ne reste donc plus à considérer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H\left[\frac{4r^2 - 2r(1+r^2)\cos u}{\Delta^2} - \frac{1}{1-\cos u}\right]g(u)du$$

qui se met aisément sous la forme

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H\frac{(1-r)^2}{\Delta^2(1-\cos u)}[\Delta + 2r\sin^2 u]g(u)du$$

et que nous décomposons encore en deux parties correspondant aux deux termes de la parenthèse. Nous aurons d'abord à considérer l'intégrale:

$$\int_0^\pi H \frac{(1-r)^2}{\Delta} \frac{g(u)}{1-\cos u} du$$

dont on voit de suite que sa limite est nulle. Puis:

$$\int_0^\pi H \left[\frac{2r(1-r)^2 \sin^2 u}{\Delta^2}\right] \frac{g(u)}{1-\cos u} du.$$

Or le second facteur reste borné quand r tend vers 1, car on a

$$\frac{(1-r)^2 \sin u^2}{\Delta^2} = \left[\frac{(1-r)\sin u}{\Delta}\right]^2 = \left[\frac{(1-r)\sin u}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{u}{2}}\right]^2.$$

La quantité élevée au carré est donc plus petit que

$$\frac{\sin u}{1-r}, \quad \text{d'une part}$$

et que

$$\frac{(1-r)}{2r \operatorname{tang}\frac{u}{2}}, \quad \text{d'autre part,}$$

et reste bornée.

On en déduit que l'intégrale précédente est comparable à

$$\int_0^\pi H \frac{|g(u)|}{u^2} du$$

et a par suite pour limite zéro, et notre proposition se trouve complètement démontrée.[1]

Nous pouvons aussi démontrer que si dans un certain intervalle (A, B) la dérivée seconde généralisée $\varphi(u)$ de $f(u)$ est bornée, et continue en un

[1] On peut l'exprimer de cette façon: si $f(u)$ est la dérivée seconde généralisée d'une fonction périodique et continue: $g(u)$, on a:

$$f(u) = \lim_{r=1} [-A_1 r - 4A_2 r^2 - \ldots - n^2 A_n r^n - \ldots]$$

$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$ étant la série de Fourier de $g(u)$.

point u_0 de cet intervalle, la fonction harmonique $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ prend au point $(1, u_0)$, suivant tous les chemins qui y aboutissent, une valeur limite égale à $\varphi(u_0)$. Pour cela il suffit de remarquer comme nous l'avons fait plus haut, que la fonction $\varphi(u)$ est sommable dans l'intervalle AB, et qu'en outre

$$\int_a^u \int_a^v \varphi(w)\,dw\,dv$$

est égal à $f(u)$, à un terme linéaire près, comme le démontre M. Lebesgue dans son mémoire sur les séries trigonométriques.[1]

On pourra alors appliquer à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{AB} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \theta^2} f(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{AB} \frac{\partial^2 H_1}{\partial u^2} f(u)\,du$$

deux intégrations par parties ce qui nous ramènera à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{AB} H_1 \varphi(u)\,du$$

à laquelle s'applique le raisonnement classique de M. Schwarz. Si l'on remarque que les parties tout intégrées s'évanouissent à la limite et qu'il en est de même de

$$\int_{C(AB)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \theta^2} f(u)\,du \quad \text{(étendue à l'arc complémentaire de } AB\text{)}$$

on obtient le résultat annoncé.

Nous aurons l'occasion, tout à l'heure, de tirer plusieurs conséquences intéressantes des propositions des paragraphes 3 et 4.

[1] Annales de l'École normale, t. 20, p. 491. M. Lebesgue remarque que $\varphi(u)$ étant bornée, il en est de même du rapport

$$\frac{f(u+a) + f(u-a) - 2f(u)}{a^2}$$

à cause d'une extension, qu'il donne, du théorème des accroissements finis à la dérivée seconde généralisée. Partant de la relation

$$\varphi(u) = \lim \frac{f(u+a) + f(u-a) - 2f(u)}{a^2}$$

il intègre deux fois de suite les deux membres, en intervertissant, comme il est permis, les signes lim et $\int$. On a ainsi le résultat énoncé dans le texte.

Mais faisons voir encore que les résultats obtenus sur les valeurs limites de la fonction $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ subsistent lorsqu'on considère, au lieu de chemins normaux à la circonférence, des chemins faisant des angles finis avec celle-ci. Reprenons donc l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(1-r^2)2r\sin(u-\theta)}{[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]^2}f(u)du=\frac{\partial}{\partial\theta}F(r,\theta)$$

et supposant toujours $f(0)=f'(0)=0$, faisons tendre θ et $1-r$ vers zéro, en supposant que le rapport $\frac{\theta}{1-r}$ reste borné et inférieur à K.

D'après ce qui a été dit plus haut, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-u)+r^2}\,\frac{\sin u}{1-\cos u}f(u)du$$

tend vers zéro quand $1-r$ et θ tendent vers zéro.

Il suffira donc de considérer:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H_1\left[\frac{2r\sin(u-\theta)}{1+r^2-2r\cos(u-\theta)}-\frac{\sin u}{1-\cos u}\right]f(u)du.$$

La quantité entre parenthèse s'écrit;

$$\frac{2r\sin(u-\theta)+2r\sin\theta-(1+r^2)\sin u}{(1-\cos u)[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]}$$

$$=\frac{2r[\sin(u-\theta)+\sin\theta-\sin u]}{(1-\cos u)[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]}-\frac{(1-r)^2}{1+r^2-2r\cos(u-\theta)}\,\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{u}{2}}.$$

Le second terme du second membre donnera lieu à une intégrale tendant vers zéro avec $1-r$, d'après un raisonnement connu.

Le premier terme s'écrit:

$$\frac{2r\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{u-\theta}{2}}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{u-\theta}{2}}\,\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}<\frac{Kr(1-r)\sin\frac{u-\theta}{2}}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{u-\theta}{2}}\,\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}$$

(en valeur absolue)

il est donc plus petit en valeur absolue, d'une part que:

$$\frac{K\sin\frac{u-\theta}{2}}{1-r}\,\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}$$

et d'autre part que:

$$\frac{K(1-r)}{4\sin\frac{u-\theta}{2}}\,\frac{1}{\sin\frac{u}{2}};$$

donc, dans tous les cas, il est inférieur à $\dfrac{K}{\sin\frac{u}{2}}$. On en conclut que l'intégrale qu'il faut démontrer tendre vers zéro est comparable à celle-ci:

$$\frac{K}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H\left|\frac{f(u)}{\sin\frac{u}{2}}\right|du$$

dont l'évanouissement à la limite résulte du raisonnement classique de M. Schwarz.

Il importe d'ailleurs de remarquer que ce qui précède suppose l'existence de la dérivée de $f(u)$ et non pas seulement de la dérivée généralisée

$$\left[\lim\frac{f(u+\Delta u)-f(u-\Delta u)}{2\Delta u}\right].$$

5. On pourrait étudier d'une façon analogue la façon dont se comportent au voisinage de la circonférence les dérivées du premier et du second ordre de $F(r, \theta)$ par rapport à la variable r; mais ce qui sera plus intéressant pour nous, ce sera l'étude de la fonction harmonique conjuguée de F, et représentant la partie imaginaire de la série de Taylor dont F serait la partie réelle; cette fonction $\Phi(r, \theta)$ est définie, à une constante additive près, qui reste arbitraire, par la relation:

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{2r\sin(u-\theta)}{1+r^2-2r\cos(u-\theta)}f(u)du.$$

Supposant d'abord $f(u)$ finie, continue et périodique nous allons rechercher à quelle condition $\Phi(r, \theta)$ tend vers une limite quand r tend vers l'unité, θ restant fixe, et quelle est cette limite.

Posons:

$$f(\theta + t) - f(\theta - t) = \varphi(t),$$

$$t = u - \theta,$$

$$1 + r^2 - 2r\cos t = \Delta$$

nous aurons à étudier ce que devient l'intégrale:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\pi} \frac{2r \sin t}{\Delta}\varphi(t)dt$$

quand $1 - r$ tend vers zéro. Nous posons: $\varepsilon = \arcsin(1 - r)$, et nous divisons le champ d'intégration en deux parties $(0, \varepsilon)$ et $(\varepsilon, +\pi)$.

L'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{2r \sin t}{\Delta}\varphi(t)dt$$

est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{1 - r} \times \text{max. de } |\varphi(t)| \text{ dans l'intervalle } (0, \varepsilon)$$

et tend vers zéro avec ε, et même uniformément quel que soit θ, à cause de la continuité de f.

Nous avons ensuite

$$(1) \quad -\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{2r \sin t}{\Delta}\varphi(t)dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{tang}\frac{t}{2}}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{(1-r)^2}{\Delta}\frac{\sin t}{1 - \cos t}\varphi(t)dt = I_1 + I_2.$$

La deuxième intégrale tend vers zéro avec ε ou $1-r$, et même uniformément; on a en effet

$$\Delta = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2},$$

$$\frac{(1-r)^2}{\Delta}\,\frac{\sin t}{1-\cos t} < \frac{(1-r)^2\cos\frac{t}{2}}{4r\sin^3\frac{t}{2}} \qquad (0 \leq t \leq \pi)$$

d'où:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\eta \frac{(1-r)^2}{\Delta}\,\frac{\sin t}{1-\cos t}\,dt < \frac{1}{2\pi r}\left[\left(\frac{1-r}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2\right]_\eta^\varepsilon < \frac{1}{2\pi r}$$

Si nous prenons $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, nous pourrons donc décomposer l'intégrale I_2 en deux parties correspondant aux intervalles $\left(\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ et $\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}, +\pi\right)$.

La première partie sera plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{2\pi r}$, multiplié par le maximum de $|\varphi(t)|$ dans l'intervalle $\left(\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ et tendra uniformément vers zéro avec ε.

La seconde partie sera plus petite que:

$$\frac{1}{2\pi r}\left(\frac{1-r}{2\sin\frac{\eta}{2}}\right)^2 . M$$

M désignant le module maximum de $\varphi(t)$ dans $(0, \pi)$; le facteur élevé au carré ayant une limite nulle, cette deuxième partie tend aussi vers zéro uniformément. *Donc pour que $\Phi(r, \theta)$ ait une limite pour $r = 1$, il faut et il suffit que l'intégrale*

$$\int_\varepsilon^{+\pi} [f(\theta+t) - f(\theta-t)] \operatorname{cotang}\frac{t}{2}\,dt \tag{2}$$

ait une limite quand ε tend vers zéro par valeurs positives et pour que $\Phi(r, \theta)$ tend uniformément vers la limite quand r tend vers l'unité il faut et il suffit que l'intégrale (2) *tende uniformément vers la limite.*

Si cette condition est remplie, la fonction harmonique $\Phi(r, \theta)$ prendra

sur le cercle de rayon 1, une suite de valeurs continues et bien déterminées représentées au facteur $\frac{1}{2\pi}$ près, par la limite de l'expression (2) quand ε tend vers zéro; ce sera encore, si l'on veut, la valeur principale (au sens de CAUCHY) de l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta+t)\operatorname{cotang}\frac{t}{2}\,dt.$$

On voit en particulier que si $f(u)$ est à nombres dérivés bornés ou encore satisfait à la condition:

$$|f(u+\delta)-f(u)|<k|\delta|^a \tag{3}$$

k et a étant des constantes positives, la fonction $\Phi(r,\theta)$ sera uniformément continue à l'intérieur du cercle et sur le cercle.

Je dis de plus que $f(u)$ satisfaisant à la condition (3); la fonction conjuguée:

$$\varphi(u)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{+\pi}[f(t)-f(u)]\operatorname{cotang}\frac{t-u}{2}\,dt \text{ [1]}$$

satisfera à une condition analogue.

Donnons à u l'accroissement Δu, nous aurons:

$$\varphi(u+\Delta u)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(t)-f(u+\Delta u)]\operatorname{cotang}\frac{t-u-\Delta u}{2}\,dt,$$

$$\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u) \tag{4}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{f(t)-f(u+\Delta u)}{\operatorname{tang}\frac{t-u-\Delta u}{2}}-\frac{f(t)-f(u)}{\operatorname{tang}\frac{t-u}{2}}\right]dt.$$

La fonction sous le signe $\int$ peut s'écrire

$$\frac{f(t)-f(u+\Delta u)}{\sin\frac{t-u}{2}\sin\frac{t-u-\Delta u}{2}}\sin\frac{\Delta u}{2}+\frac{f(u)-f(u+\Delta u)}{\operatorname{tang}\frac{t-u}{2}}. \tag{5}$$

[1] La fonction sous le signe $\int$ est dans le cas actuel absolument intégrable; il est donc inutile de parler ici de valeur principale.

Intégrons d'abord de $-\pi$ à $u-h$, et de $u+h$ à $+\pi$, en supposant:

$$h > 2\,|\Delta u|. \tag{6}$$

$$u-h \qquad u \quad u+\Delta u \qquad u+h$$

On aura alors, t variant dans l'un de ces intervalles,

$$\frac{1}{\sin\frac{t-u}{2}\,\sin\frac{t-u-\Delta u}{2}} < \frac{C}{\sin^2\frac{t-u}{2}} = 2C\frac{d}{dt}\left(-\operatorname{cotang}\frac{t-u}{2}\right)$$

C étant une constante positive, car les deux sinus du dénominateur seront toujours de même signe et du même ordre de grandeur.

En outre $f(u)$ étant bornée, on voit que le premier terme de (5) intégré de $-\pi$ à $u-h$, et de $u+h$ à $+\pi$, donnera pour l'intégrale (4) une contribution moindre en valeur absolue que:

$$C'.\,|\Delta u|.\operatorname{cotang}|h|$$

ou simplement

$$C'.\,|\Delta u|.\frac{1}{|h|}$$

où C' désigne une constante fixe.

Ensuite, le second terme de (5), intégré toujours entre les mêmes limites, donnera comme résultat zéro.

Il nous reste a évaluer une limite supérieure de l'intégrale (4) quand les limites d'intégrations sont $u-h$ et $u+h$. En tenant compte de la relation (3) on trouve facilement que les termes ainsi obtenus ont une somme moindre en valeur absolue que:

$$C''.\,|h|^a.$$

On a donc en définitive:

$$|\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)| < C'\frac{|\Delta u|}{|h|} + C''|h|^a.$$

Si l'on prend par exemple:

$$|h| = |\Delta u|^{a+1}$$

(ce qui est compatible avec la condition 6, pour Δu suffisamment petit) on obtient:

$$|\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)|<(C'+C'')|\Delta u|^{\frac{a}{a+1}}.$$

Une condition de la forme (3) s'appelle généralement condition de LIPSCHITZ; nous pouvons donc dire que *si la partie réelle d'une série de Taylor est continue sur son cercle de convergence et satisfait à une condition de Lipschitz, la partie imaginaire est également continue et satisfait à une condition de même forme.*[1]

Nous avons supposé dans ce qui précède la fonction $f(u)$ finie et continue de 0 à 2π; on voit sans peine que nos conclusions subsistent si la fonction $f(u)$, supposée intégrable, n'est continue que dans un certain intervalle.

Les raisonnements précédents montrent aussi que si $f(u)$ est une fonction bornée et sommable, à laquelle correspond la fonction harmonique $F(r, \theta)$, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction harmonique conjuguée $\Phi(r, \theta)$ reste bornée à l'intérieur du cercle de convergence est que l'intégrale

$$\int_{\varepsilon^2}^{\pi}[f(\theta+t)-f(\theta-t)]\operatorname{cotang}\frac{t}{2}\,dt$$

reste bornée quels que soient ε et θ. La fonction f ne peut pas dans ce cas, avoir des discontinuités de première espèce, car si f présente une telle discontinuité au point θ, $\Phi(r, \theta)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand r tend vers 1.

En résumé, nous avons pu, grâce, surtout à l'extension si importante de la notion d'intégrale due à M. LEBESGUE, faire l'étude de l'intégrale de POISSON dans des cas bien plus étendus que ceux qui avaient été examinés jusqu'ici.

Des différents résultats acquis dans ce chapitre, nous retiendrons particulièrement le suivant: *l'intégrale de Poisson, correspondant à une fonction périodique, bornée et sommable, représente une fonction harmonique qui, en tous les points de la circonférence, (sauf peut-être aux points d'un ensemble*

[1] La série est alors uniformément convergente sur son cercle de convergence, comme il résulte de l'étude des séries de FOURIER.

de mesure nulle) prend une valeur bien déterminée lorsqu'on tend vers l'un de ces points en suivant un chemin non tangent à la circonférence.

Le fait serait d'ailleurs évident si la fonction $f(u)$ était intégrable au sens de RIEMANN, car ses points de discontinuité formeraient alors un ensemble de mesure nulle; mais nous verrons combien il est nécessaire de se placer au point de vue tout à fait général que nous avons adopté.

DEUXIÈME PARTIE.

Étude de la série de Taylor sur son cercle de convergence.

1. Considérons une série de TAYLOR dont nous supposerons dans tout ce qui suit le rayon de convergence égal à l'unité; soit

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots. \tag{1}$$

Si nous posons:

$$c_n = a_n - ib_n,$$

$$z = re^{i\theta}$$

elle se mettra sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(z) &= P(r, \theta) + iQ(r, \theta), \\ P(r, \theta) &= \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n, \\ Q(r, \theta) &= -b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Les coefficients a_n et b_n sont donnés par les formules: [1]

[1] Voir au sujet de ces formules: HARNACK, *Fundamentalsätze der Functionentheorie* Math. Annalen, tome 21.

$$
(3)\quad \begin{cases}
a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} P(r,\theta)d\theta, \\[2ex]
b_0 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} Q(r,\theta)d\theta, \\[2ex]
a_n = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} P(r,\theta)\cos n\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} Q(r,\theta)\sin n\theta d\theta \\[2ex]
b_n = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} P(r,\theta)\sin n\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} -Q(r,\theta)\cos n\theta d\theta
\end{cases}
$$

dans lesquelles on donne à r une valeur plus petite que 1. Si, lorsque r tend vers 1, $P(r,\theta)$ et $Q(r,\theta)$ tendent uniformément vers $f(\theta)$ et $g(\theta)$ (fonctions continues de θ), autrement dit si la série de Taylor $f(z)$ est uniformément continue à l'intérieur de son cercle de convergence et sur le cercle, on peut écrire, en faisant tendre r vers l'unité dans les formules (3):

$$
(4)\quad \begin{cases}
a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{-\pi} f(\theta)d\theta, \\[2ex]
b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{+\pi} -g(\theta)d\theta, \\[2ex]
a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\sin n\theta d\theta, \\[2ex]
b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} -g(\theta)\cos n\theta d\theta
\end{cases}
$$

ce qui revient à dire que $P(r,\theta)$, $Q(r,\theta)$ sont exprimables à l'aide de la formule de Poisson:

$$
(4')\quad \begin{cases}
P(r,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(u-\theta)+r^2} f(u)du, \\[2ex]
Q(r,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(u-\theta)+r^2} g(u)du
\end{cases}
$$

et l'on voit aussi que, dans ce cas, l'étude de la convergence de la série de TAYLOR sur son cercle de convergence est ramenée à l'étude de séries de FOURIER correspondant aux fonctions $f(u)$ et $g(u)$.

Mais nous allons voir que les formules (4) et (4') sont applicables dans des cas beaucoup plus étendus que celui dont nous venons de parler.[1]

Supposons simplement que $\varphi(z)$ soit bornée à l'intérieur de son cercle de convergence, mais ne faisons *à priori* aucune hypothèse sur l'existence de valeurs limites de $\varphi(z)$ pour les points du cercle. Nous allons voir que les formules (4) et (4') sont encore applicables.

Il est un peu plus commode de supposer $c_0 = 0$, nous aurons alors

$$\varphi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots .$$

Considérons également la série de TAYLOR:

$$\psi(z) = \frac{c_1 z}{1} + \frac{c_2 z^2}{2} + \ldots + \frac{c_n z^n}{n} + \ldots = \int_0^z \frac{\varphi(z)}{z} dz. \tag{5}$$

Elle représente une fonction de z qui reste bornée à l'intérieur du cercle de convergence; qui en outre, est uniformément continue à l'intérieur du cercle de convergence et sur ce cercle, comme il résulte de l'inégalité:

$$|\psi(z') - \psi(z'')| = \left| \int_{z'}^{z''} \frac{\varphi(z)}{z} dz \right| < |z' - z''| \cdot M, \tag{6}$$

M désignant le module maximum de $\frac{\varphi(z)}{z}$.

Si donc on pose

$$\psi(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$$

on pourra exprimer U et V par les formules:

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u - \theta) + r^2} h(u) du,$$

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u - \theta) + r^2} k(u) du,$$

[1] Comptes Rendus, février 1905.

$h(u)$ et $k(u)$ étant des fonctions continues de u. Mais, en appliquant l'inégalité (6) aux points du cercle de convergence, on voit immédiatement que $h(u)$ et $k(u)$ sont des fonctions de u à nombres dérivés bornés. Elles admettent donc une dérivée pour un ensemble de valeurs de u, dont le complémentaire est de mesure nulle.

Mais nous avons les relations:

$$P(r, \theta) = \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta},$$

$$Q(r, \theta) = -\frac{\partial U(r, \theta)}{\partial \theta}.$$

Il résulte donc du chapitre précédent que pour toutes les valeurs u_0 de u pour lesquelles les fonctions $h(u)$ et $k(u)$ ont des dérivées, les fonctions harmoniques P et Q prennent des valeurs bien déterminées quand le point (r, θ) tend vers le point $(1, u_0)$ suivant un chemin non tangent à la circonférence. On pourra, en outre, appliquer les formules (4'), dans lesquelles $f(u)$ et $g(u)$ désignent non plus des fonctions continues, mais des fonctions bornées et sommables qui représentent, en général, la valeur limite de $P(r, \theta)$, $Q(r, \theta)$ pour $r = 1$. On peut si l'on veut, pour définir ces fonctions avec précision, admettre qu'elles représentent toujours la plus grande limite, ou la plus petite limite des fonctions P et Q pour r tendant vers l'unité. Nous ferons en général cette hypothèse.

D'ailleurs ces deux fonctions f et g ne sont pas indépendantes et nous savons qu'elles doivent satisfaire à cette condition que les intégrales:

$$\int_{\varepsilon^2}^{+\pi} \{f(\theta + t) - f(\theta - t)\} \operatorname{cotg} \frac{t}{2} dt \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon^2}^{\pi} \{g(\theta + t) - g(\theta - t)\} \operatorname{cotg} \frac{t}{2} dt$$

restent bornées quel que soient ε et θ.

Nous voyons aussi que les coefficients a_n et b_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et même que la série

$$\sum_0^\infty (a_n^2 + b_n^2) = \sum_0^\infty |c_n|^2$$

est convergente. Si donc, pour une série de TAYLOR, de rayon de convergence égal à un, cette condition n'est pas remplie, on peut affirmer

qu'elle n'est pas bornée, c-est-à-dire qu'elle prend des valeurs infiniment grandes, au voisinage de certains points de son cercle de convergence.

En tout point régulier du cercle de convergence, les fonctions $f(u)$ et $g(u)$ ayant des dérivées, leurs séries de Fourier sont convergentes; il en résulte que $\varphi(z)$ est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence.

Aux points u_0 pour lesquels $|f(u)-f(u_0)|$, $|g(u)-g(u_0)|$ sont les dérivées de leur intégrale indéfinie, c'est-à-dire *presque partout*, la série est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, ainsi qu'il résulte d'une proposition de M. Lebesgue (C. R. de l'Académie des Sciences, 22 mai 1905).

2. Nous allons donner immédiatement une application de ces généralités en montrant qu'elles permettent d'ajouter un complément intéressant à la célèbre proposition d'Eisenstein, concernant le développement en série des fonctions algébriques.[1] Hermite, dans son cours de la Faculté des Sciences, a donné à cette proposition la forme suivante: Si une série de Taylor à coefficients rationnels, représente une branche de fonction algébrique, on peut toujours ramener cette série à avoir ses coefficients entiers (sauf le premier), en multipliant la variable par un entier convenable.

Considérons une série de Taylor à coefficients entiers; je dis qu'*elle ne peut représenter une fonction algébrique que si son rayon de convergence est plus petit que l'unité, à moins qu'elle ne soit égale à une fraction rationnelle dont tous les pôles sont des racines de l'unité.*

Supposons en effet que:

$$y = f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots,$$

où $c_0, c_1, c_2, \dots$ sont des entiers et où $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$, satisfasse à une équation algébrique irréductible:

$$F(y, z) = 0;$$

F sera nécessairement à coefficients entiers. Soit $P(z)$ le coefficient de la plus haute puissance de y dans F; la fonction algébrique $u = y \cdot P(z)$ n'aura pas de pôle à distance finie; donc en multipliant le polynôme à coefficients entiers $P(z)$ par la série à coefficients entiers $f(z)$, on obtient

[1] Comptes Rendus, février 1904.

une série de Taylor $\varphi(z)$, de rayon de convergence égal à un et qui doit rester bornée à l'intérieur de son cercle de convergence; il faut pour cela que les coefficients de $\varphi(z)$ tendent vers zéro quand leur rang augmente indéfiniment et comme ces coefficients sont des entiers, cela ne peut se produire que s'ils sont constamment nuls à partir d'un certain rang, et $\varphi(z)$ se réduisant à un polynôme, on voit que $f(z)$ est égale à une fraction rationnelle.

Proposons nous maintenant de déterminer toutes les fractions rationnelles

$$\frac{A(z)}{B(z)}$$

développables en série entière en z, à coefficients entiers, de rayon de convergence égal à un. — A et B sont supposés à coefficients entiers, on suppose en outre qu'ils n'ont pas de diviseur commun. On peut alors déterminer deux polynômes à coefficients entiers A_1 et B_1 tels que l'on ait

$$AA_1 + BB_1 = N$$

N étant un entier différent de zéro. Si $\frac{A}{B}$ se développe en série entière à coefficients entiers, il en sera de même de:

$$A_1\frac{A}{B} + B_1 = \frac{N}{B} = \frac{\nu}{\alpha + \beta z + \ldots + \lambda z^q}.$$

Nous supposons les entiers $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \nu)$ premiers dans leur ensemble. Soit donc:

$$(7) \qquad \frac{\nu}{\alpha + \beta z + \ldots + \lambda z^q} = a_0 + a_1 z + \ldots$$

par suite:

$$\nu = a_0\alpha$$

et soit p un diviseur premier de α. On peut supposer que les entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ne sont pas tous divisibles par p, sinon on aurait une égalité de même forme en divisant par p les deux membres de (7). Soit a_n le premier coefficient non divisible par p. On peut écrire:

$$\nu = (\alpha + \beta z + \ldots + \lambda z^q)(a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1})$$
$$+ (\alpha + \beta z + \ldots + \lambda z^q)(a_n z^n + \ldots).$$

On en déduit que la série

$$(\alpha + \beta z + \ldots + \lambda z^q)(a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots)$$

une fois ordonnée aura tous ses coefficients divisibles par p:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha a_n \equiv 0 \\ \alpha a_{n+1} + \beta a_n \equiv 0 \\ \alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \gamma a_n \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right| \pmod{p}$$

et comme par hypothèse on a:

$$\alpha \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{et} \quad a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

on déduit de là de proche en proche,

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \gamma \equiv 0 \pmod{p}, \quad \ldots .$$

Les coefficients $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \nu)$ ne seraient donc pas premiers dans leur ensemble. Il faut donc que l'on ait $p = 1$, et par suite α doit être égal à l'unité. Autrement dit $B(z)$ est égal à un facteur constant près à:

$$1 + \beta z + \gamma z^2 + \ldots + \lambda z^q$$

où $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont des entiers. Le produit des modules des zéros de ce polynôme est égal à $\pm\frac{1}{\lambda}$; mais comme d'autre part les pôles de $\frac{A(z)}{B(z)}$ doivent avoir des affixes supérieures ou égales en module à l'unité, puisque le rayon de convergence doit être égal à l'unité, il faut que l'on ait:

$$\lambda = \pm 1$$

et que toutes les racines de $B(z)$ aient pour module 1. Mais, d'après un théorème de Kronecker, un nombre entier algébrique qui a pour module 1, ainsi que tous les nombres conjugués, est une racine de l'unité. Donc $B(z)$ est un polynôme de division du cercle ou un produit de plusieurs polynômes de cette espèce et la fraction $\frac{A(z)}{B(z)}$ pourra par suite se ramener à la forme

$$\frac{P(z)}{(1 - z^k)^h}. \tag{8}$$

Ainsi, les seules fractions rationnelles développables en série entière à coefficients entiers, avec un rayon de convergence égal à 1, sont les fractions rationnelles de la forme (8).

Considérons maintenant une série de Taylor dont les coefficients n'ont qu'un nombre limité de valeurs, par exemple 0 et 1, on a alors

$$f(z) = z^\alpha + z^\beta + \dots + z^\lambda + \dots$$

$\alpha, \beta, \lambda, \dots$ étant des entiers croissants. Appelons point singulier isolé d'ordre fini d'une fonction analytique, un point singulier isolé z_0 au voisinage duquel on a:

$$|\varphi(z)| < \left| \frac{k}{(z - z_0)^\alpha} \right|$$

α et k étant des constantes. Cela étant, je dis que la série de Taylor $f(z)$ a nécessairement sur son cercle de convergence d'autres points singuliers que des points singuliers isolés d'ordre fini. En effet, s'il n'en était pas ainsi, en multipliant $f(z)$ par un polynôme ayant pour zéros les points singuliers en question avec des ordres de multiplicité convenables, on aurait une nouvelle série de Taylor qui devrait rester bornée à l'intérieur du cercle de rayon 1, et dont les coefficients devraient donc tendre vers zéro. Or ces coefficients n'ayant aussi qu'un nombre limité de valeurs, cela est impossible s'ils ne sont pas constamment nuls à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si $f(z)$ n'est pas égale à une fraction rationnelle.

On voit en particulier que $f(z)$ ne peut pas être algébroïde dans un cercle de rayon plus grand que 1.[1]

Nous avons, dans ce qui précède, quelques exemples des liaisons qui existent entre la nature arithmétique des coefficients d'une série de Taylor et la nature analytique de la fonction qu'elle représente.

Donnons maintenant quelques extensions de la proposition énoncée au début de ce chapitre. Soit D un domaine limité par un contour simple C et dont on puisse faire la représentation conforme sur le cercle (ce qui aura lieu par exemple si C est formé d'arcs réguliers de courbes analytiques) et $f(z)$ une fonction analytique régulière et bornée dans D. En

[1] Relativement aux séries entières à coefficients entiers, je rappelle que M. Borel a obtenu un résultat très intéressant (v. p. exemple, ses leçons sur les fonctions méromorphes, Paris, Gauthier-Villars, 1903).

tous les points de C, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, $f(z)$ prend une valeur déterminée suivant les chemins non tangents à C et l'on pourra par suite appliquer la formule de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C} \frac{f(u)}{u - z} du.$$

Enfin on peut étendre encore la proposition au moyen d'une transformations homographique effectuée sur $f(z)$. S'il existe un nombre A tel que $f(z) - A$ reste supérieure en module à un nombre positif fixe, la fonction $\frac{1}{f(z) - A}$ sera régulière et bornée à l'intérieur de D, de telle sorte qu'on pourra lui appliquer la proposition précédente; par suite $f(z)$ aura aussi, en général, une valeur déterminée, finie ou infinie, aux points du contour mais il n'est pas certain que la même propriété s'applique à la partie réelle et à la partie imaginaire de $f(z)$ considérées séparément; il faudrait démontrer pour que cela fût vrai, que $f(z)$ ne peut prendre une valeur infinie qu'en un ensemble de mesure nulle de points de contour, et bien que cela paraisse très vraisemblable, nous n'avons pas réussi à en donner une démonstration générale.

Comme applications considérons la série $\sum \frac{A_n}{z - a_n}$, les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des points du segment $0 - 1$ de l'axe réel, partout denses, et la série $\sum |A_n|$ étant convergente. C'est un cas particulier des séries étudiées par M. Borel dans sa thèse,[1] en vue de l'extension de la notion de prolongement analytique. La série que nous considérons définit une fonction analytique qui admet le segment $0 - 1$ comme ligne singulière essentielle.

Supposons les A_n positifs et donnons à z une valeur, $x + iy$, y étant positif. Si l'on pose $z - a_n = \rho_n e^{i\omega_n}$, la partie imaginaire de $\varphi(z)$ est égale à

$$+ i \sum - \frac{A_n}{\rho_n} \sin \omega_n$$

et comme on a $0 < \omega_n < \pi$, le coefficient de i est négatif; donc lorsqu'on reste, par exemple, dans le demi-plan supérieur $\varphi(z)$ reste bornée *projective-*

[1] E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, première partie (Annales de l'Ecole normale, 1895) et *Leçons sur la théorie des fonctions*.

ment. On en conclut que tous les points du segment $0 - 1$, sauf ceux d'un ensemble de mesure nulle, sont des points où $\varphi(z)$ prend, au sens déjà souvent expliqué, une valeur déterminée, ce qui concorde avec les résultats de M. Borel.

Au contraire, la première des fonctions uniformes affectées de coupure qui se soit présentée en analyse, la fonction modulaire, présente une indétermination becaucoup plus complète au voisinage de cette coupure, ainsi qu'il résulte des recherches de Riemann et Dedekind.[1]

3. *Etude de l'intégrale de Poisson lorsque la fonction $f(u)$ qui figure sous le signe $\int$ est une fonction non bornée, intégrable en valeur absolue.*[2]

Cette étude peut se faire comme lorsque $f(u)$ est une fonction bornée. Car $f(u)$ étant, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, égale à la dérivée de son intégrale indéfinie, on pourra raisonner exactement de la même manière que lorsque $f(u)$ est bornée, et l'on arrivera aux mêmes conclusions que dans le premier chapitre. Toutefois nous préférons rattacher ce cas à celui où $f(u)$ est bornée, la méthode indirecte que nous emploierons conduisant à quelques résultats nouveaux; nous supposerons que non seulement $f(u)$ est intégrable entre $-\pi$ et $+\pi$ mais qu'il en est de même de son carré. Posons donc

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(u - \theta) + r^2} f(u) du$$

et supposons d'abord que $f(u)$ soit une fonction positive, dont le carré est intégrable.

On a vu dans le premier chapitre que si l'on écrit:

$$P(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin \theta) r^n$$

[1] On pourra lire à ce sujet une lettre d'Hermite à Stieltjes (17 décembre 1886). — (Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris, Gauthier-Villars 1905, page 196.)

[2] Nous n'avons pas placé cette étude dans la première partie, parce que nous avons dû nous servir du théorème établi dans le § 1 de la seconde partie.

la série

$$2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$$

est convergente. Soit $Q(r, \theta)$ la fonction harmonique conjuguée de $P(r, \theta)$

$$Q(r, \theta) = b_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n$$

et soit:

$$\varphi(z) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta), \qquad (z = re^{i\theta}).$$

On a:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P^2(r, \theta) d\theta = 2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) r^{2n},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Q^2(r, \theta) d\theta = 2b_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) r^{2n},$$

d'où:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^\infty (a_n^2 + b_n^2) r^{2n}$$

et comme la série du second membre converge encore pour $r = 1$, on voit que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

reste bornée quand r tend vers 1. Il en résulte qu'on ne peut avoir

$$\lim_{r=1} |\varphi(re^{i\theta})| = +\infty$$

que pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ, sinon on démontrerait par un raisonnement analogue à celui qu'emploie M. Lebesgue,[1] que l'intégrale qui précède devrait croître indéfiniment.

Mais d'autre part, $P(r, \theta)$ étant constamment positive, la fonction analytique $\frac{1}{\varphi(z) + 1} = \frac{1}{P + iQ + 1}$ est bornée dans C; on en déduit comme

[1] *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, page 114.

on vient de le voir que, $\varphi(z)$ a, en général,[1] une valeur limite déterminée suivant les rayons et comme cette valeur est en général finie, on voit bien que $P(r, \theta)$, $Q(r, \theta)$ ont, sauf pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ une valeur limite bien déterminée pour $r = 1$.[2]

Posons

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f_1(\theta)$$

dans l'ensemble des valeurs de θ où cette limite existe.

Je dis que l'on a en général:

$$f_1(\theta) = f(\theta).$$

Pour le démontrer établissons d'abord le lemme suivant:

Si des fonctions positives, bornées sommables: $f_1(x), f_2(x), \ldots$ tendent vers une fonction bornée ou non $f(x)$ et si

$$\int_a^b f_n(x)dx$$

reste, quel que soit n, inférieur à un nombre fixe, la fonction $f(x)$ est intégrable, et l'on a:

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \text{lim. inf.} \int_a^b f_n(x)dx.$$

La fonction $f(x)$ est mesurable. Soit E l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a:

$$f(x) < L.$$

Considérons la fonction:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= f_n(x) \text{ pour l'ensemble des valeurs de } x \text{ telles que: } f_n(x) \leqq L, \\ \varphi_n(x) &= f(x) \text{ pour l'ensemble des valeurs de } x \text{ telles que: } f_n(x) > L. \end{aligned}$$

Pour les points de E les fonctions $\varphi_n(x)$ sont bornées dans leur ensemble et tendent vers $f(x)$, on aura donc

$$\lim \int_E \varphi_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

---

[1] Pour abréger, nous dirons souvent: »en général», au lieu de »sauf exception pour un ensemble de mesure nulle de points ou de valeurs de la variable.»

[2] Il résulte de ce raisonnement que si une fonction harmonique est régulière et bornée à l'intérieur d'un cercle, elle pourra être mise sous la forme d'une intégrale de Poisson.

Mais comme on a toujours dans E $\varphi_n \leqq f_n$, on en déduit:

$$\int f(x)dx \leqq \text{lim. inf.} \int_E f_n(x)dx \leqq \text{lim. inf.} \int_a^b f_n(x)dx < k.$$

Donnons à L des valeurs positives de plus en plus grandes; nous voyons que l'intégrale $\int_E f(x)dx$ tend vers une limite finie, qui sera égale à $\int_a^b f(x)dx$, et l'on a bien:

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \text{lim. inf.} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Si pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de x, $f_n(x)$ n'a pas de limite ou a une limite infinie, il n'y a rien à changer à ce qui précède.

On peut se rendre compte sur des exemples, que l'on peut avoir

$$\int_a^b f(x)dx < \text{lim. inf.} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Je dois cette remarque à M. Lebesgue.

Ceci dit, revenons à l'intégrale de Poisson

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u)du$$

et considérons la fonction positive $f(u)$ comme limite de la fonction bornée sommable $f_n(u)$, égale à $f(u)$ dans l'ensemble $E_n[f(u) \leqq l_n]$ et égale à zéro dans l'ensemble complémentaire. On aura:

$$P_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f_n(u)du < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u)du = P(r, \theta).$$

Mais $f_n(u)$ étant bornée, on aura sauf pour un ensemble F_n de mesure nulle:

$$\lim_{r=1} P_n(r, \theta) = f_n(\theta)$$

d'où:

$$\text{lim. inf.}_{r=1} P(r, \theta) \geqq f_n(\theta).$$

Mais on a $f_n(\theta) = f(\theta)$ pour tous les points de l'ensemble E_n. Or l'en-

semble des points communs à tous les ensembles $C(E_n)$ a une mesure nulle; il en est de même de l'ensemble $(F_1 + F_2 + \ldots + F_n + \ldots)$. On aura donc:

$$\lim_{r=1} \text{inf.}\, P(r, \theta) \geqq f(\theta)$$

sauf dans un ensemble de mesure nulle; et par suite

(9) $$f_1(\theta) \geqq f(\theta)$$

dans l'ensemble des points où $P(r, \theta)$ a, pour $r = 1$, une limite: $f(\theta)$.

Mais d'après le lemme que nous venons de démontrer: on a

$$\lim.\text{inf.} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta) d\theta \geqq \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) d\theta$$

et comme on a toujours:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta) d\theta = 2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta$$

on en conclut:

(10) $$\int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) d\theta \leqq \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta$$

et par suite, en vertu de l'inégalité (9):

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (f_1 - f) d\theta = 0$$

la fonction intégrée étant constamment positive ou nulle (dans l'ensemble complémentaire d'un ensemble de mesure nulle), on conclut de là facilement

$$f_1(\theta) = f(\theta) \quad \text{(en général)}.$$

Car chacun des ensembles $E\left(\frac{1}{n+1} \leqq f_1 - f < \frac{1}{n}\right)$ aura une mesure nulle et il en sera de même de la somme de tous ces ensembles.

En résumé, si $f(u)$ est une fonction non bornée, positive, dont le carré est sommable, et si l'on considère l'intégrale de Poisson:

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Hf(u) du$$

on a en général: $\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta)$.

Du cas de $f(u)>0$, on passe facilement au cas de $f(u)<0$, et aussi au cas de $f(u)$ bornée supérieurement ou inférieurement.

Si maintenant $f(u)$ n'est bornée ni supérieurement ni inférieurement on peut la regarder successivement comme limite des fonctions bornées supérieurement, puis comme limite de fonctions bornées inférieurement et définies toujours de la façon suivante: ayant choisi des nombres $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ échelonnés de 0 à $+\infty$, on posera:

1° $f_n(u)=f(u)$ dans l'ensemble $E_n[f(u)\leqq l_n]$ et $f_n(u)=0$, partout ailleurs;

$$P_n(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H_1 f_n(u)\,du<P(r,\theta)$$

2°) $f_n^1(u)=f(u)$ dans l'ensemble $E_n^1[f(u)\geqq -l_n]$, et $f_n^1(u)=0$ partout ailleurs;

$$P_n^1(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H_1 f_n^1(u)\,du\geqq P(r,\theta).$$

On aura alors les inégalités:

$$\lim_{r=1}.\inf.\,P(r,\theta)\geqq\lim_{r=1}.\sup.\,P_n(r,\theta),$$

$$\lim_{r=1}.\sup.\,P(r,\theta)\leqq\lim_{r=1}.\inf.\,P_n^{(1)}(r,\theta).$$

En appliquant des raisonnements déjà employés, on en déduira facilement:

$$\lim_{r=1}P(r,\theta)=f(\theta)$$

sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle. [1]

Ceci va nous permettre de compléter ce que nous avons dit au sujet de la formule de Parseval, dans le cas où l'on considère une fonction non bornée dont le carré est sommable. Nous avons démontré que l'on a:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(u)\,du\geqq 2a_0^2+\sum_1^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Mais d'autre part puisque l'on a, en général,

$$\lim_{r=1}P(r,\theta)=f(\theta)$$

[1] Indiquons encore brièvement une déduction facile de la méthode employée dans le texte: *toute fonction harmonique régulière et limitée inférieurement dans C est la somme d'une intégrale de Poisson et d'une fonction harmonique qui reste positive dans C et qui prend la valeur zéro sur C, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle.*

on en déduit en appliquant le lemme établi plus haut:

$$\lim \int_{-\pi}^{+\pi} P^2(r, \theta) d\theta \geqq \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du,$$

c'est-à-dire:

$$2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) \geqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du.$$

On a donc, dans tous le cas, quand $f(u)$ est une fonction dont le carré est sommable:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du = 2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2),$$

a_n, b_n étant les constantes d'EULER-FOURIER attachées à $f(u)$. Soient maintenant deux fonctions périodiques dont le carré soit sommable: $f(u)$ et $g(u)$. On voit aisément que $(f(u) + g(u))^2$ est aussi sommable, et qu'il en est de même de $(f(u) - g(u))^2$. Appliquant l'égalité précédente à $f + g$ et $f - g$, comme le fait M. HURWITZ dans le mémoire déjà cité, on obtient par soustraction:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) g(u) du = 2a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n)$$

les c_n, d_n étant les coefficients de la série de FOURIER de $g(u)$.[1]

4. Les méthodes précédentes conduisent également à un résultat intéressant relatif à la convergence des séries trigonométriques données par la loi de leurs coefficients et dont voici l'énoncé: *Si na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'ensemble des points de divergence de la série:*

$$\sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

est de mesure nulle.

Il y aura donc des points de convergence dans tout intervalle. Considérons en effet la fonction harmonique:

$$F(r, \theta) = a_0 + (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) r + \ldots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n + \ldots.$$

[1] Voici une conséquence de la formule de PARSEVAL: soient a_n, b_n les constantes de FOURIER de $f(u)$; si la série $\sum n(a_n^2 + b_n^2)$ est convergente, $f(u)$ est développable en série de FOURIER sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de u; pratiquement cette proposition ne paraît pas bien utile.

Il est clair que la série $\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$, est convergente puisque ses termes sont à partir d'un certain rang inférieurs à $\frac{1}{n^2}$. Il resulte alors de l'égalité de PARSEVAL que l'intégrale:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P^2(r, \theta) d\theta$$

reste bornée, quel que soit le nombre $r < 1$. Il en sera de même de:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |P(r, \theta)| d\theta.$$

Intégrons terme à terme la série qui représente $P(r, \theta)$ (il est un peu plus commode de supposer $a_0 = 0$, pour que l'intégration n'introduise pas de terme apériodique). Nous obtenons ainsi:

$$U(r, \theta) = \sum_1^\infty \left(\frac{a_n}{n} \sin n\theta - \frac{b_n}{n} \cos n\theta\right) r^n$$

et comme $\frac{a_n}{n}$ et $\frac{b_n}{n}$ sont plus petits à partir d'un certain rang que $\frac{1}{n^2}$, la série du second membre est absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de θ, et pour toutes les valeurs de r comprises entre 0 et 1. Elle est donc continue à l'intérieur du cercle de rayon un et sur le cercle, et l'on peut mettre U sous la forme

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(u - \theta) + r^2} g(u) du,$$

$g(u)$ étant une fonction continue périodique.

Je dis en outre que $g(u)$ est à variation bornée entre $-\pi$ et $+\pi$. En effet soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ des valeurs croissantes de l'argument; la somme:

$$|g(\theta_1) - g(\theta_2)| + |g(\theta_2) - g(\theta_3)| + \ldots + |g(\theta_{p-1}) - g(\theta_p)|$$

différera aussi peu que l'on veut, en prenant r suffisamment voisin de 1, de la suivante:

$$|U(r, \theta_1) - U(r, \theta_2)| + |U(r, \theta_2) - U(r, \theta_3)| + \ldots$$
$$+ |U(r, \theta_{p-1}) - U(r, \theta_p)|$$

et dense de points de divergence; d'ailleurs on ne détruira pas cette propriété en ajoutant à une telle série, une autre série partout convergente par exemple $\Sigma a_n \sin nx$, où les a_n sont positifs, décroissants et tendent vers zéro — on déduira de là différentes séries de TAYLOR ayant leur cercle de convergence comme coupure.

Indiquons maintenant le rôle que jouent dans l'étude de la convergence des séries trigonométriques les points de convergence absolue. Soit x_0 un point de convergence absolue de la série

$$f(x) = \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

On aura:

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = -4 \sum A_n^0 \sin^2 \frac{nh}{2}$$

en posant

$$A_n^0 = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0.$$

La série du second membre est donc absolument et uniformément convergente puisque la série $\sum |A_n^0|$ est convergente; elle représente donc une fonction continue de h. On en déduit que si la série est convergente, ou continue au point $(x_0 + h)$, elle est convergente ou continue au point $(x_0 - h)$, c'est à dire que les points de continuité, de convergence, de divergence, de convergence absolue sont deux à deux symétriques par rapport aux points de convergence absolue.

Si la série a deux points de convergence absolue dont la différence des arguments est incommensurable à π, on en déduira l'existence de tels points dans tout intervalle.

Voici dans le même ordre d'idées une question qui me paraît intéressante et dont je n'ai pu trouver de solution: considérons une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro; nous avons vu qu'elle peut avoir des points de divergence dans tout intervalle, mais l'ensemble des points pour lesquels nous pouvons démontrer la divergence, quand elle a lieu, est toujours de mesure nulle. Peut-on alors donner un exemple de série trigonométrique, à coefficients tendant vers zéro, et qui soit divergente pour toutes les valeurs de l'argument ou seulement pour un ensemble de mesure non nulle de valeurs de l'argument? Il semble que cela puisse avoir lieu par exemple pour des séries présentant un grand nombre de lacunes, mais nous n'en avons aucune preuve rigoureuse.

Donnons à x la valeur $1-\frac{1}{\nu}$. Les termes qui viennent après le $\nu^{\text{ième}}$ auront une somme inférieure à ε_ν, et la somme de ceux qui précèdent:

$$c_0 + c_1\left(1-\frac{1}{\nu}\right) + \ldots + c_\nu\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

peut se mettre sous la forme

$$(c_0 + c_1 + \ldots + c_\nu) - \left(c_1\frac{\delta_1}{\nu} + \frac{2c_2\delta_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu c_\nu \delta_\nu}{\nu}\right)$$

$\delta_1, \delta_2, \ldots$ désignant des nombres compris entre zéro et un. Le terme écrit dans la seconde parenthèse peut s'écrire:

$$\delta\frac{|c_1| + 2|c_2| + \ldots + \nu|c_\nu|}{\nu}$$

δ étant un nombre dont le module est plus petit que un. Or le produit νc_ν tendant vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$, il en est de même de sa valeur moyenne, de sorte que, pour que $\varphi\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$ ait une limite, il est nécessaire que

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_\nu$$

ait la même limite, ce qui établit la proposition.[1]

Soit donc θ une valeur de l'argument pour laquelle $g(\theta)$ admet une dérivée $g'(\theta)$. Nous aurons:

$$\lim_{r=1}\left[(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)r + \ldots + (a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)r^n + \ldots\right] = g'(\theta)$$

donc en vertu du théorème de M. Pringsheim, la série

$$(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta) + \ldots + (a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) + \ldots$$

est convergente. C. Q. F. D.

Faisons quelques remarques au sujet de ce critère de convergence. D'abord il est clair que la convergence d'une série trigonométrique, en tout point, ne saurait résulter d'une condition de la forme:

$$\lim\varphi(n)a_n = 0, \qquad \lim\varphi(n)b_n = 0$$

[1] Nous avons pour plus de commodité donné à x une suite dénombrable de valeurs de la forme $1-\frac{1}{\nu}$; il est facile de voir que cette restriction est insignifiante.

si la fonction positive $\varphi(n)$ est telle que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit divergente, ce qui a lieu pour $\varphi(n) = n$. Il est d'ailleurs possible de former des séries trigonométriques pour lesquelles na_n et nb_n tendent vers zéro et qui ont une infinité dénombrable de points de divergence; tout au plus pourrait-on, peut-être, dans notre énoncé, remplacer les mots: ensemble de mesure nulle, par ensemble dénombrable.

En outre la convergence des séries trigonométriques semble dépendre beaucoup moins de la rapidité de la décroissance des coefficients, que de la régularité avec laquelle ils tendent vers zéro; je ne pense donc que l'on puisse donner de critères de convergence de même nature que celui que nous venons de donner et qui soit beaucoup plus compréhensif. Ce critère s'applique d'ailleurs à toutes les séries trigonométriques obtenues en intégrant terme à terme une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro. Voici une conséquence de cette remarque; nous savons que les coefficients d'une série de Fourier tendent toujours vers zéro; en outre, M. Lebesgue, dans son mémoire déjà cité, a montré, en généralisant un théorème de Du Bois-Reymond,[1] qu'une telle série est intégrable terme à terme c'est-à-dire que si

$$a_0 + (a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) + \ldots + (a_n \sin n\theta + b_n \sin n\theta) + \ldots$$

est la série de Fourier correspondant à $f(\theta)$, on a

$$\int_\alpha^\theta f(\theta)\,d\theta = a_0(\theta - \alpha) + \sum \frac{1}{n}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta - a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha).$$

Mais puisque la série $\sum \frac{1}{n}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$ a des points de convergence dans tout intervalle, on peut supposer que $\theta = \alpha$ soit un tel point et écrire simplement:

$$\int_\alpha^\theta f(\theta)\,d\theta = a_0\theta + C + \sum \frac{1}{n}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta);$$

par suite la série $\sum \frac{1}{n}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$ est toujours convergente, et

[1] Voir aussi l'article déjà cité de M. A. Hurwitz.

c'est à une constante près, la série de FOURIER de la fonction continue, périodique, à variation bornée:

$$\varphi(\theta) = \int_{\alpha}^{\theta} [f(\theta) - a_0] d\theta \qquad \left(a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta \right).$$

Elle est donc uniformément convergente.

Nous pouvons donc simplifier un peu le résultat précité de M. LEBESGUE: il est inutile en effet quand on intègre terme à terme une série de FOURIER, de retrancher une constante de l'intégrale indéfinie de chaque terme, pour assurer la convergence de la série obtenue.

Faisons encore remarquer que si l'on part d'une série trigonométrique pour laquelle $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ est convergente (et alors en l'intégrant une fois on obtient une série trigonométrique uniformément convergente entre 0 et 2π) on peut affirmer que la fonction harmonique associée à la série proposée:

$$P(r, \theta) = \sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

se comporte, au point de vue de l'indétermination sur le cercle de convergence, comme les fonctions bornées. C'est ce qui résulte de la démonstration précédente. On peut même ajouter que, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, la série

$$\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, ainsi que le prouve l'extension qu'a donné M. FEJER lui-même de son théorème, aux fonctions dérivées.[1]

Par exemple si l'on a:

$$a_n^2 + b_n^2 < \frac{1}{n \log n \,.\, \log_2 n \,.\,.\,.\, (\log_k n)^{1+\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

on se trouve en présence d'une série trigonométrique qui est sommable par ce procédé.

---

[1] Il résulte en effet des recherches de M. FEJER, que la fonction dérivée d'une fonction continue $f(u)$ dans l'ensemble des points où elle existe, est représentable par la série dérivée de la série de FOURIER de $f(u)$, sommée par une double application de la moyenne arithmétique.

Nous avons vu que si $\lim na_n = 0$, $\lim nb_n = 0$, la série:

(I) $f(\theta) = a_0 + (a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) + \ldots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \ldots$

est convergente pour toutes les valeurs de θ pour lesquelles la fonction:

(II) $$g(\theta) = a_0\theta + \sum \frac{a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta}{n}$$

admet une dérivée $g'(\theta)$, et a précisément pour somme $g'(\theta)$.

Nous pouvons démontrer que réciproquement, si la série (I) est convergente elle est égale à la dérivée de la série (II).

Pour cela il suffit de modifier légèrement la méthode qu'emploie RIEMANN[1] pour démontrer ses deux premières propositions générales sur la représentation d'une fonction par une série trigonométrique.

On a d'abord, en vertu du théorème 2 de RIEMANN:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{g(\theta+\alpha) + g(\theta-\alpha) - 2g(\theta)}{\alpha} = 0.$$

Il suffit donc de démontrer que si la série (I) converge et a pour somme $f(\theta)$, on a:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{g(\theta+\alpha) - g(\theta-\alpha)}{2\alpha} = f(\theta).$$

Or, si l'on pose:

$$A_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

on trouve:

$$\frac{g(\theta+\alpha) - g(\theta-\alpha)}{2\alpha} = A_0 + A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + \ldots + A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right) + \ldots$$

Soit s le plus grand entier inférieur à $\frac{\pi}{\alpha}$. Considérons la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right).$$

On aura

$$n|A_n| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit, pour $n > p$.

[1] *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (§ 8, théorèmes 1 et 2).

Si donc s est supérieur à p, on aura

$$\left|\sum_{s+1}^{\infty} A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{\alpha}\sum_{s+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{s\alpha} < \frac{\varepsilon}{\pi-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{si } \alpha < 1).$$

Considérons ensuite les deux sommes:

$$A_0 + \sum_{1}^{p} A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{p+1}^{s+1} A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right).$$

p restant fixe, la première a pour limite quand α tend vers zéro:

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_p.$$

Quant à la seconde, on en a facilement une limite supérieure en appliquant le lemme d'Abel; en effet $n\alpha$ restant compris entre 0 et π, $\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}$ va en décroissant quand n augmente et reste positif et inférieur à 1; la série

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots$$

étant supposée convergente, on peut supposer que p ait été choisi assez grand pour que:

$$A_{p+1} + A_{p+2} + \ldots + A_{p+q}$$

soit plus petit en module que ε, quel que soit l'entier q. Cette seconde partie sera alors inférieure à ε. On aura donc:

$$\lim \frac{g(\theta+\alpha) - g(\theta-\alpha)}{2\alpha} = f(\theta),$$

$$\lim \frac{g(\theta+\alpha) + g(\theta-\alpha) - 2g(\theta)}{\alpha} = 0$$

d'où l'on conclut:

$$\lim \frac{g(\theta \pm \alpha) - g(\theta)}{\pm \alpha} = f(\theta).$$

Le théorème est démontré:

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

où na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ soit convergente pour une valeur dé-

terminée de θ, est que la fonction $g(\theta)$ obtenue en intégrant terme à terme la série proposée ait une dérivée $g'(\theta)$, qui est alors égale à la somme de la série donnée.

En particulier, si $\sum(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ est convergente en tous les points d'un intervalle, elle y représente une fonction dérivée c'est-à-dire une fonction qui ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires.

5. En combinant, comme nous l'avons fait plus haut, les résultats connus concernant l'intégrale de POISSON, avec le théorème de M. PRINGSHEIM, on peut aussi retrouver certains résultats classiques concernant la série de FOURIER. En effet, si on considère l'intégrale de POISSON relative à une fonction continue $f(\theta)$ et supposée mise sous la forme

$$P(r, \theta) = \sum_0^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

on sait que $P(r, \theta)$ tend uniformément vers $f(\theta)$ quand r tend vers un; si donc on a:

$$\lim n a_n = 0, \qquad \lim n b_n = 0$$

on en déduira la convergence uniforme vers $f(\theta)$, de la série de FOURIER $\sum(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. Si en particulier $f(\theta)$ admet une dérivée bornée $f'(\theta)$, on peut appliquer l'intégration par parties dans les formules:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

ce qui donne:

$$n a_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \qquad n b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(\theta) \cos n\theta \, d\theta;$$

or ces dernières intégrales tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.[1]

Nous voyons en outre que la fonction harmonique conjuguée

$$Q(r, \theta) = \sum(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n$$

[1] LEBESGUE, *Mémoire sur les séries trigonométriques*, page 471, ou ce mémoire page 351.

tendra aussi uniformément vers une limite quand r tendra vers 1, d'après ce qu'on a vu dans le premier chapitre. Par suite la série

$$\sum (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$$

sera, dans les mêmes conditions, uniformément convergente.

Il n'y a rien à changer si $f(\theta)$ est à nombres dérivées bornés.[1]

6. Nous allons maintenant montrer comment l'on peut rattacher le second théorème d'Abel sur les séries entières au théorème de Riemann sur les séries trigonométriques (théorème I, § 8 du mémoire de Riemann). Considérons la série trigonométrique $\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$, où a_n et b_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et qu'on suppose convergente pour une certaine valeur de θ, et égale à $f(\theta)$. Si l'on pose avec Riemann:

$$F(\theta) = \sum_{1}^{\infty} - \frac{A_n}{n^2} \quad \text{(on suppose } a_0 = 0 \text{ pour simplifier)}$$

on a:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(\theta+\alpha) + F(\theta-\alpha) - 2F(\theta)}{\alpha^2} = f(\theta).$$

Si $U(r, \theta)$ désigne la fonction harmonique associée à $F(\theta)$:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(u-\theta) + r^2} F(u)\,du,$$

et $P(r, \theta)$ la fonction harmonique associée à la série proposée, on a:

$$P(r, \theta) = \frac{\partial^2 U(r, \theta)}{\partial \theta^2}.$$

[1] Au sujet de la convergence uniforme des séries de Fourier, on trouvera des propositions intéressantes dans le livre récemment paru de M. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, (Paris, Gauthier-Villars, 1906).

De ces diverses égalités, on déduit, en vertu d'une étude qui a été faite dans la première partie:

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta),$$

ce qui est précisément le théorème d'ABEL.

Mais nous pouvons aller plus loin: supposons que la série proposée soit convergente en tous les points d'un intervalle I; on a alors $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ d'après un théorème de CANTOR. En outre la série aura des points de continuité formant un ensemble dense dans I, d'après le théorème de M. BAIRE, soit θ_0 un tel point. Il résulte alors de ce que nous avons établi dans la première partie, que l'on aura:

$$\lim P(r, \theta) = f(\theta_0)$$

quand le point (r, θ) se rapproche indéfiniment du point $(1, \theta_0)$ suivant un chemin quelconque tangent ou non à la circonférence.

Ainsi, si une série de Taylor (ou la partie réelle d'une série de Taylor) est convergente en tous les points d'un arc S du cercle de convergence il existe dans tout intervalle de S, des points où la série prend une valeur bien déterminée suivant tous les chemins qui y aboutissent.

7. Ceci nous amène à parler des conditions de convergence d'une série de TAYLOR sur son cercle de convergence. Nous avons obtenu à ce sujet une proposition qui paraît devoir être utile et dont voici l'énoncé:

Si la série de Taylor

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

a un rayon de convergence égal à l'unité et si c_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la série est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence. Ce théorème se déduit facilement d'un théorème de RIEMANN (§ 9, théorème III, du mémoire cité), et dont voici l'énoncé (en conservant les notations du paragraphe précédent):

«La condition nécessaire et suffisante pour que la série:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$$

soit convergente pour une valeur θ de l'argument est que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin\frac{(\theta-t)}{2}}\rho(t)dt$$

tende vers une limite finie quand n augmente indéfiniment, en désignant par b et c deux nombres quelconques comprenant la valeur θ, et $\rho(t)$ une fonction indéterminée de t assujettie aux conditions suivantes: $\rho(t)$ et $\rho'(t)$ ont la valeur zéro pour $t=b$, $t=c$ et sont continues entre ces limites; $\rho''(t)$ n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima; en outre pour $t=\theta$, on a $\rho(t)=1$, $\rho'(t)=0$, $\rho''(t)=0$ et $\rho'''(t)$, $\rho^{\text{IV}}(t)$ sont finies et continues.»[1]

Il en résulte, comme le fait remarquer Riemann que la convergence de la série en un point θ, ne dépend que des propriétés de la fonction $F(t)$ dans un intervalle (b, c) aussi petit qu'on le veut entourant ce point.

Supposons en particulier que dans (b, c), $F(t)$ admette des dérivées bornées et continues d'ordre aussi élevé que nous voudrons. Nous pourrons alors transformer l'intégrale précédente au moyen d'intégrations par parties. En posant:

$$M=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin\frac{(\theta-t)}{2}}$$

et tenant compte des conditions imposées à $\rho(t)$, nous aurons ainsi:

$$\int_b^c F(t)\rho(t)\frac{d^2M}{dt^2}dt=-\int_b^c\frac{dM}{dt}\frac{d}{dt}(F\rho)dt$$

$$=-\int_b^c\frac{dM}{dt}(F\rho'+\rho F')dt=\int_b^c(F\rho''+2\rho'F'+\rho F'')Mdt.$$

[1] Nous reproduisons ici l'énoncé de Riemann; parmi les conditions énoncées par lui relativement à la fonction $\rho(t)$, il y en a qui sont superflues.

Or la fonction de t: $F\rho'' + 2\rho' F' + \rho F''$, est une fonction, intégrable et bornée qui pour $t = \theta$ prend la valeur $F''(\theta)$, et admet une dérivée finie. Il résulte alors des études classiques sur l'intégrale de DIRICHLET, que l'intégrale considérée tend vers une limite finie: $F''(\theta)$, quand n augmente indéfiniment et que ΣA_n est convergente au point considéré.

Cela étant, si dans

$$\text{(I)} \qquad \varphi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \text{ (on suppose encore } c_0 = 0\text{)}$$

on pose $z = e^{i\theta}$, on obtient, en séparant le réel de l'imaginaire, deux séries trigonométriques, et les fonctions de RIEMANN $F(\theta)$, $F_1(\theta)$ correspondantes, s'obtiennent en posant $z = e^{i\theta}$, dans la série:

$$\text{(II)} \qquad \psi(z) = -\frac{c_1 z}{1^2} - \frac{c_2 z^2}{2^2} - \ldots - \frac{c_n z^n}{n^2} - \ldots$$

qui est absolument convergente sur son cercle de convergence.

Or les fonctions (I) et (II) ont les mêmes singularités, comme il résulte, par exemple, de l'expression de $\psi(z)$ au moyen de $\varphi(z)$ à l'aide de quadratures. Si donc en un point d'argument θ du cercle de convergence, la fonction (I) est régulière, il en sera de même de la fonction (II) et par suite $F(t)$, $F_1(t)$ seront analytiques, dans un intervalle fini (b, c) comprenant le point θ; elles y auront donc des dérivées bornées d'ordre aussi élevé qu'on le voudra. Par suite, d'après ce qu'on vient de voir, la série

$$c_0 + c_1 e^{i\theta} + \ldots + c_n e^{ni\theta} + \ldots$$

sera convergente.

Si l'on suppose maintenant, non plus que les coefficients tendent vers zéro, mais qu'ils restent finis, il résulte du raisonnement de RIEMANN que la différence entre $A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ et l'intégrale considérée par lui reste bornée quand n croît indéfiniment; *il en résulte qu'en tout point régulier du cercle de convergence, la série doit osciller entre des limites finies.*

Ces théorèmes permettent dans un grand nombre de cas de mettre en évidence certains points singuliers d'une série de TAYLOR sur son cercle de convergence; on peut d'ailleurs en augmenter le champ d'application en utilisant le principe de multiplication des singularités de M. HADAMARD: si en multipliant les coefficients de la série donnée par ceux d'une série connue admettant par exemple le point $z = 1$ comme point singulier unique,

on obtient une nouvelle série dont les coefficients tendent vers zéro, sans former une série absolument convergente, tous les points de divergence que l'on pourra mettre en évidence sur le cercle de convergence, seront des points singuliers pour la série proposée.

Exemples. I. Considérons la série suivante, étudiée par M. Hadamard dans sa thèse: [1]

$$\sum_1^\infty \sin(\log n) z^n.$$

Je dis que le point $z = 1$ est un point singulier. Il suffit de remarquer que si l'on donne à n les valeurs entières comprises entre:

$$e^{2k\pi+\alpha} \quad \text{et} \quad e^{2k\pi-\alpha} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

on obtient, dans la série $\sum_1^\infty \sin(\log n)$, une suite de termes consécutifs supérieurs à $\sin\alpha$, et dont le nombre croît indéfiniment avec k; il en résulte que la somme de cette série n'oscille pas entre des limites finies, et par suite le point $z = 1$ est singulier (c'est d'ailleurs le seul point singulier, comme il résulte de l'expression de la fonction au moyen d'une intégrale définie).

II. Considérons la série: $\Sigma\mu(n)z^n$, où $\mu(n)$ désigne la fonction arithmétique égale à zéro, quand n contient des diviseurs carrés, et dans les autres cas à $(-1)^h$, h étant le nombre des facteurs premiers de n. Je dis que le point $z = 1$ est singulier. En effet $\mu(1) + \mu(2) + \ldots + \mu(n)$ n'oscille pas entre des limites finies, car s'il en était ainsi la série de Dirichlet:

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

serait uniformément convergente pour les valeurs de s dont la partie réelle serait supérieure à un nombre positif quelconque, on en déduirait que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de zéro imaginaire; or elle en a une infinité.

Il est inutile de multiplier ces exemples: tant qu'il ne s'agit que de démontrer la divergence *en un point*, c'est à dire la divergence d'une série

[1] *Essai sur les fonctions données par leur développement de Taylor* (Journal de mathématiques pures et appliques, 4e série, tome 8, p. 163).

purement numérique, il n'y a aucune règle générale à donner. Ce qui est plus intéressant c'est de donner des exemples de séries trigonométriques, dont les coefficients tendent vers zéro et qui aient des points de divergence dans tout intervalle: on aura, en même temps, une série de TAYLOR admettant son cercle de convergence comme coupure. Nous parlerons un peu de cette question à la fin de ce mémoire.

8. Pour terminer cette deuxième partie, nous allons montrer que *l'on peut trouver des fonctions analytiques uniformes ayant pour singularité unique une coupure fermée, par exemple un cercle et possédant une infinité non dénombrable de zéros sur la coupure.*[1] En effet construisons comme il a été expliqué dans la première partie une fonction harmonique restant positive dans C, régulière dans ce cercle, et prenant la valeur $+\infty$ aux points d'un ensemble parfait de mesure nulle E, de la circonférence. On peut supposer que dans tout intervalle intérieur à l'un des intervalles contigus à E la fonction $f(u)$ (page 344) admette une dérivée bornée, sans être analytique. Dans ces conditions la fonction harmonique $Q(r, \theta)$ conjuguée de la fonction harmonique considérée $P(r, \theta)$, prendra des valeurs bien déterminées sur le cercle, sauf aux points de E. La fonction analytique $\varphi(z) = P + iQ$, est donc régulière dans C, n'y devient jamais nulle, puisque P reste positif, et prend une valeur infinie aux points de E. Si donc on considère la fonction $\frac{1}{\varphi(z)}$ elle sera holomorphe à l'intérieur du cercle qu'elle admettra comme coupure, prendra sur le cercle une suite de valeurs bien déterminées et continues et en particulier la valeur zéro en tous les points de l'ensemble non dénombrable E.

Il serait d'ailleurs facile d'obtenir une fonction prenant la valeur zéro en tous les points d'un ensemble non dénombrable et partout dense sur une coupure; il suffira d'appliquer à l'exemple précédent le principe de condensation des singularités; considérons une infinité dénombrable d'ensembles analogues à E: $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, de telle sorte que l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ soit partout dense et construisons les fonctions harmoniques positives $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ correspondantes; choisissons

[1] On trouvera d'intéressantes remarques au sujet de cette question dans la thèse de Mr ZORETTI: *Sur les fonctions analytiques uniformes etc.*, (Journal de mathématiques, 1900).

ensuite les constantes positives $c_0, c_1, c_2, \ldots$ de telle sorte que la série $c_0 P_0 + c_1 P_1 + \ldots + c_n P_n + \ldots$ soit convergente pour le centre du cercle; elle représentera alors une fonction harmonique regulière dans C et devenant infinie en tous les points de l'ensemble $(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots)$. En raisonnant comme plus haut, on obtiendra une fonction uniforme définie dans C et prenant la valeur zéro en tous les points de l'ensemble considéré.

La forme de la coupure ne joue ici aucun rôle essentiel. Les intégrales définies étudiées par Hermite et Stieltjes, par exemple la suivante:

$$\int_0^\infty \frac{u + z}{\varphi(u)} du$$

permettraient d'obtenir des fonctions jouissant des mêmes propriétés, la coupure étant cette fois une demi-droite, ou un segment de droite.

Mais l'ensemble des zéros que l'on obtient ainsi est toujours de mesure nulle et il est aisé de voir que la méthode que nous avons employée ne permet pas d'aller plus loin; à vrai dire il est probable qu'une fonction uniforme ne peut prendre la valeur zéro qu'en un ensemble de mesure nulle de points d'une coupure isolée, mais il paraît bien difficile de donner de ce fait une démonstration générale. On pourrait même se demander s'il ne serait pas possible d'obtenir une fonction analytique définie par exemple par une série de Taylor à rayon de convergence fini, et non continuable, qui prenne la valeur zéro en tous les points du cercle de convergence *suivant les rayons* qui y aboutissent. Nous pouvons seulement affirmer que si une telle fonction existe elle n'est pas bornée à l'intérieur du cercle et même qu'elle peut s'approcher autant que l'on veut de toute valeur donnée à l'avance.

D'une façon un peu plus précise supposons que la série de Taylor $f(z)$ converge à l'intérieur du cercle C de rayon un, et y reste bornée; je dis que si $f(z)$ n'est pas identiquement nulle, l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $f(re^{i\theta})$ ne tend pas vers zéro, r tendant vers un, est de mesure *non nulle* dans tout intervalle. En effet, si l'on avait

$$\lim_{r=1} f(re^{i\theta}) = 0, \quad \text{pour } \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + \alpha$$

à un ensemble de mesure nulle près, en choisissant un entier n tel que $n\alpha > 2\pi$, on en déduirait que la fonction

Nous allons encore, en terminant ces généralités sur la convergence des séries trigonométriques démontrer une proposition qui paraît avoir été jusqu'ici admise sans démonstration rigoureuse: *si la série*

$$\Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

est absolument convergente en tous les points d'un intervalle, les deux séries Σa_n et Σb_n sont absolument convergentes.

En effet s'il en est ainsi la série proposée sera absolument convergente pour toutes les valeurs de x; en faisant $x = 0$ on obtient la série Σa_n qui doit être, d'après l'hypothèse, absolument convergente. Reste à démontrer que si la série $\Sigma b_n \sin nx$ est absolument convergente pour toutes les valeurs de x, la série $\sum |b_n|$ est convergente.

Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty |b_n| . |\sin nx|$$

qui a en chaque point une valeur finie; cette fonction, limite de fonctions continues, étant d'après le théorème de M. Baire ponctuellement discontinue, sera bornée dans certains intervalles tels que (α, β). Soit $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série qui définit $\varphi(x)$. On a:

$$S_n(x) < \varphi(x),$$

$$0 < \int_\alpha^\beta S_n(x)dx < \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \quad \text{(quantité finie)}.$$

Or, on vérifie aisément que l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta |\sin nx| dx$$

a une valeur qui tend vers $2(\beta - \alpha)$ pour n infiniment grand, qui reste donc supérieure à un nombre positif fixe.

Il résulte alors de la dernière inégalité que nous avons écrite que $|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|$ doit rester bornée quand n croît indéfiniment, c'est à dire que la série Σb_n est absolument convergente.

Nous concluons de là que si les séries Σa_n, Σb_n ne sont pas toutes les deux absolument convergentes, il y a dans tout intervalle des valeurs de x pour lesquelles la série $\sum |a_n \cos nx + b_n \sin nx|$ est divergente.

dont les abscisses sont de la forme $\frac{h}{q_{n+1}}$. Si donc $\frac{p_n}{q_n}$ est la valeur approchée de x à $\frac{1}{q_n}$ près par défaut, on aura:

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < x < \frac{p_{n+1}+1}{q_{n+1}} < \frac{p_n+1}{q_n}.$$

(Dans le cas où $q_{n+1} = 2q_n$, l'une des deux inégalités extrêmes pourrait devenir une égalité.)

Supposons maintenant que l'on ait:

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} > k > 2$$

je dis que l'on pourra trouver dans tout intervalle des nombres x en infinité non dénombrable, tels que l'on ait à partir d'une certaine valeur de n:

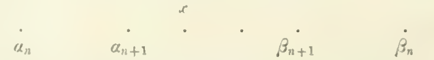
$$(q_n x) > f,$$

f désignant un nombre positif fixe et $(q_n x)$ la valeur absolue de la différence entre $q_n x$ et l'entier le plus voisin.

En effet, pour i suffisamment grand l'intervalle $\left(\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_i+1}{q_i}\right)$ sera compris à l'intérieur d'un intervalle donné AB, en choisissant p_i convenablement. Considérons maintenant l'intervalle $\left(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}, \frac{p_{i+1}+1}{q_{i+1}}\right)$ compris à l'intérieur de l'intervalle de rang i.

S'il y a plusieurs intervalles de rang $i+1$ entre lesquels nous avons le choix, nous prendrons celui qui comprend le milieu de l'intervalle de rang i.

En continuant ainsi nous obtiendrons un nombre x défini par la suite de ses valeurs approchées à $\frac{1}{q_i}\,\frac{1}{q_{i+1}}\ldots\frac{1}{q_n}\ldots$ près par défaut et par excès et que nous appelons $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n, \ldots; \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n, \ldots$.



Or d'après la façon dont les α et β ont été choisis, l'un et l'autre des intervalles $\alpha_n\alpha_{n+1}$, $\beta_n\beta_{n+1}$ sont plus grands que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{q_n}.$$

On aura par suite, puisque x est compris entre α_{n+1} et β_{n+1}:

$$(q_n x) > \frac{k-2}{2k} = f,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si maintenant le rapport $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ augmente indéfiniment avec n on verra aisément qu'il existe dans tout intervalle des nombres x tels que $(q_n x)$ tende vers telle limite que l'on voudra (comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$).

Nous déduisons de là une démonstration simple du théorème de CANTOR d'après lequel une série trigonométrique dont les coefficients ne tendent pas vers zéro a des points de divergence dans tout intervalle. On voit aisément qu'il suffit de considérer une série de sinus:

$$\Sigma c_n \sin(n\pi x).$$

S'il existe en effet une infinité de valeurs de n: $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ pour lesquelles $|c_n|$ reste supérieur à un nombre positif a, on peut supposer, en négligeant au besoin certains des q_i, que l'on ait constamment

$$\frac{q_{i+1}}{q_i} > k > 2$$

et comme on peut alors choisir n, dans tout intervalle, de telle façon que $\sin(q_i \pi x)$ reste supérieur en module à $\sin(\pi f)$ $\left(0 < f < \frac{1}{2}\right)$, les termes correspondants de la série ne tendent pas vers zéro et celle-ci est divergente.

On obtient aussi très aisément les propositions suivantes que nous nous contentons d'énoncer.

Considérons la série $\Sigma A_n \sin(a_n x)$ dans laquelle $\frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 2$: si la série ΣA_n n'est pas absolument convergente, cette série aura des points de divergence dans tout intervalle.

Si rapidement croissantes que soient les constantes $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|, \dots$ on pourra toujours trouver des entiers $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ croissant assez vite pour que la série $\Sigma A_n \frac{\sin}{\cos}(a_n x)$ ait des points de convergence dans tout intervalle.

On voit qu'il est facile de former des séries trigonométriques dont les coefficients tendent vers zéro et qui ont une infinité non dénombrable

et dense de points de divergence; d'ailleurs on ne détruira pas cette propriété en ajoutant à une telle série, une autre série partout convergente par exemple $\Sigma a_n \sin nx$, où les a_n sont positifs, décroissants et tendent vers zéro — on déduira de là différentes séries de Taylor ayant leur cercle de convergence comme coupure.

Indiquons maintenant le rôle que jouent dans l'étude de la convergence des séries trigonométriques les points de convergence absolue. Soit x_0 un point de convergence absolue de la série

$$f(x) = \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

On aura:

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = -4 \sum A_n^0 \sin^2 \frac{nh}{2}$$

en posant

$$A_n^0 = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0.$$

La série du second membre est donc absolument et uniformément convergente puisque la série $\sum |A_n^0|$ est convergente; elle représente donc une fonction continue de h. On en déduit que si la série est convergente, ou continue au point $(x_0 + h)$, elle est convergente ou continue au point $(x_0 - h)$, c'est dire que les points de continuité, de convergence, de divergence, de convergence absolue sont deux à deux symétriques par rapport aux points de convergence absolue.

Si la série a deux points de convergence absolue dont la différence des arguments est incommensurable à π, on en déduira l'existence de tels points dans tout intervalle.

Voici dans le même ordre d'idées une question qui me paraît intéressante et dont je n'ai pu trouver de solution: considérons une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro; nous avons vu qu'elle peut avoir des points de divergence dans tout intervalle, mais l'ensemble des points pour lesquels nous pouvons démontrer la divergence, quand elle a lieu, est toujours de mesure nulle. Peut-on alors donner un exemple de série trigonométrique, à coefficients tendant vers zéro, et qui soit divergente pour toutes les valeurs de l'argument ou seulement pour un ensemble de mesure non nulle de valeurs de l'argument? Il semble que cela puisse avoir lieu par exemple pour des séries présentant un grand nombre de lacunes, mais nous n'en avons aucune preuve rigoureuse.

Nous allons encore, en terminant ces généralités sur la convergence des séries trigonométriques démontrer une proposition qui paraît avoir été jusqu'ici admise sans démonstration rigoureuse: *si la série*

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

est absolument convergente en tous les points d'un intervalle, les deux séries Σa_n *et* Σb_n *sont absolument convergentes.*

En effet s'il en est ainsi la série proposée sera absolument convergente pour toutes les valeurs de x; en faisant $x = 0$ on obtient la série Σa_n qui doit être, d'après l'hypothèse, absolument convergente. Reste à démontrer que si la série $\Sigma b_n \sin nx$ est absolument convergente pour toutes les valeurs de x, la série $\sum |b_n|$ est convergente.

Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty |b_n| . |\sin nx|$$

qui a en chaque point une valeur finie; cette fonction, limite de fonctions continues, étant d'après le théorème de M. Baire ponctuellement discontinue, sera bornée dans certains intervalles tels que (α, β). Soit $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série qui définit $\varphi(x)$. On a:

$$S_n(x) < \varphi(x),$$

$$0 < \int_\alpha^\beta S_n(x)dx < \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \quad \text{(quantité finie).}$$

Or, on vérifie aisément que l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta |\sin nx|\, dx$$

a une valeur qui tend vers $2(\beta - \alpha)$ pour n infiniment grand, qui reste donc supérieure à un nombre positif fixe.

Il résulte alors de la dernière inégalité que nous avons écrite que $|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|$ doit rester bornée quand n croît indéfiniment, c'est à dire que la série Σb_n est absolument convergente.

Nous concluons de là que si les séries Σa_n, Σb_n ne sont pas toutes les deux absolument convergentes, il y a dans tout intervalle des valeurs de x pour lesquelles la série $\sum |a_n \cos nx + b_n \sin nx|$ est divergente.

Comme application, faisons voir que si l'on a une série trigonométrique:

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots \qquad (A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

telle que $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ pour n infini, la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ étant divergente, on pourra toujours en changeant le signe de certains des A_n, obtenir une nouvelle série qui ait des points de divergence dans tout intervalle.

Soient en effet $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ une infinité dénombrable et partout dense d'arguments compris entre 0 et 2π et telle qu'il y en ait une infinité qui soient égaux à l'un quelconque d'entre eux. D'après ce qui précède je puis toujours supposer ces arguments tels que pour $x = x_1, x_2, \ldots$ la série $\sum |A_n|$ soit divergente. On peut alors déterminer une suite d'entiers croissants $n_1, n_2, n_3, \ldots$ tels que l'on ait:

$$|A_0| + |A_1(x_1)| + |A_2(x_1)| + \ldots + |A_{n_1}(x_1)| > P,$$
$$|A_{n_1+1}(x_2)| + \ldots\ldots\ldots\ldots + |A_{n_2}(x_2)| > P$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

P désignant un nombre positif quelconque; pour

$$n_{p-1} + 1 < n < n_p$$

donnons à $\varepsilon_n = \pm 1$, le signe de $A_n(x_p)$. Dans ces conditions, la série:

$$\varepsilon_0 A_0 + \varepsilon_1 A_1 + \ldots + \varepsilon_n A_n + \ldots$$

sera divergente pour $x = x_1$, $x = x_2$, ... Il en résulte (page 389) que la série de Taylor:

$$\sum (a_n - i b_n) \varepsilon_n z^n$$

aura son cercle de convergence pour coupure.

Ainsi on peut toujours en multipliant par -1 certains coefficients d'une série de Taylor obtenir une nouvelle série qui admette son cercle de convergence comme coupure, au moins lorsque les coefficients satisfont aux conditions énoncées au haut de cette page; il est infiniment probable que cela a lieu dans tous les cas.

BIBLIOGRAPHIE.

Félix Alcan.

Paris 1905.

COUTURAT, L., Les principes des mathématiques, avec un appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant. (Bibliothèque de philosophie contemporaine.)

Les principes de la logique. L'idée de nombre. L'idée d'ordre. Le continu. L'idée de grandeur. La géométrie. Sur la théorie des ensembles. Sur la notion de groupe. — VIII + 310 p. 8. Fr. 5 —.

Cambridge University Press.

1906.

YOUNG, W. H., & YOUNG, G. CH., The theory of sets of points.

Rational and irrational numbers. Representation of numbers on the straight line. The descriptive theory of linear sets of points. Potency, and the generalised idea of a cardinal number. Content. Order. Cantor's numbers. Preliminary notions of plane sets. Regions and sets of regions. Curves. Potency of plane sets. Plane content and area. Length and linear content. — XII + 316 p. 8. Sh.

C. F. Clay.

1905—06.

BLYTHE, W. H., On models of cubic surfaces. — VIII + 106 p. 8. Sh. 4—.

HARDY, G. H., The integration of functions of a single variable. (Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. N° 2.) — VIII + 53 p. 8. Sh. 2, 6 d.

HUDSON, R. W. H. T., Kummer's quartic surface.

Kummer's configuration. The quartic surface. The orthogonal matrix of linear forms. Line geometry. The quadratic complex and congruence. Plücker's complex surface. Sets of nodes. Equations of K:s surface. Special forms of K:s surface. The wave surface. Reality and topology. Geom. of four dimen-

sions. Algebraic curves on the surface. Curves of different orders. Weddle's surface. Theta functions. Appl. of Abel's theorem. Singular Kummer surfaces. — XI+222 p. 8. Sh. 8— (cloth.).

Leathem, J. G., Volume and surface integrals used in physics. (Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. N° 1.) — 47 p. 8. Sh. 2, 6 d.

Macaulay, F. S., Geometrical conics. Second edition. — X+300 p. 8.

Carnegie Inst. of Washington.

1904—06.

Hill, George William, The collected mathematical works.

Vol. 1. (Carnegie Institution of Washington. Publication N° 9.). Introduction by H. Poincaré. — XVIII+363 p. 4.

Vol. 2. (Carnegie Institution of Washington.) — 339 p. 4.

Vol. 3. (Carnegie Institution of Washington. Publication N° 9.). — 577 p. 4.

Newcomb, S., On the position of the galactic and other principal planes toward which the stars tend to crowd. (Carnegie Institution of Washington. Publication N° 10.) — 32 p. 4.

Wilh. Engelmann.

Leipzig 1903.

Frischauf, J., Grundriss der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorien. 2:e, vermehrte Aufl.

Beziehungen zwischen den die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmenden Grössen. Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Geschichte der Planetentheorien. — XV+199 p. 8. M. 5—; geb. M. 6—.

Gauthier-Villars.

Paris 1904—06.

Annuaire pour l'an 1906, publ. par le Bureau des Longitudes. Avec une notice de G. Bigourdan: Les éclipses de soleil. Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant ces éclipses. Fr. 1,50.

Arnaudeau, A., Tables des intérêts composés. Annuités et amortissements pour des taux variant de dixièmes en dixièmes et des époques variant de 100 à 400, suivant les taux. — XI+125 p. 4. Fr. 10—.

BACHET, C.-G., Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. 4e éd., revue et simplifiée. — 161 p. Fr. 8.

COUTURAT, L., L'algèbre de la logique (Scientia. Sér. phys.-math. N° 24). — 100 p. 8. Fr. 2—.

DARBOUX, G., Étude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des sciences et des arts à Saint-Louis. — 34 p. 8. Fr. 1,50.

FASSBINDER, CH., Théorie et pratique des approximations numériques. — VI+90 p. 8. Fr. 3—.

GUICHARD, CLAUDE, Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux (Scientia. Sér. phys.-math. N° 25). — 95 p. 8.

GOURSAT, E., Cours d'analyse mathématique. T. 2, fasc. 2.

Éq. différentielles. Méthodes élém. d'intégration. Théorèmes d'existence. Éq. diff. linéaires. Éq. diff. non lin. Éq. aux dérivées partielles. Éléments du calcul des variations. — pp. 305—640. 8. Fr. 20— (prix du t. 2 complet).

HERMITE, CHARLES, Oeuvres publ. sous les auspices de l'Académie des sciences par Émile Picard. T. 1. (Avec portrait.) — XL+498 p. 8. Fr. 18—.

HERMITE et STIELTJES, Correspondance. Publ. par les soins de B. Baillaud et H. Bourget, avec une préface d'Émile Picard. T. 1 (8 novembre 1882—22 juillet 1889), avec portraits; T. 2 (18 octobre 1889—15 décembre 1894). — XX+477 p. & VI+464 p. 8. Fr. 16— (chaque vol.).

JOUFFRET, E., Mélanges de géométrie à quatre dimensions.

Coup d'œil sur les principes de la géom. à quatre dimensions. Le système de coordonnées et les trois premiers polyédroïdes réguliers. L'hexagramme de Pascal. La surface du 3e degré. L'hexagramme et l'hexastigme. Les hypersurfaces du 2e degré. Les quartiques. La question de l'existence réelle de l'hyperspace. — XI+227 p. 8.

LEBESGUE, H., Leçons sur les séries trigonométriques professées au Collège de France. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publ. sous la direction d'Émile Borel). — 128 p. 8.

LINDELÖF, E., Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions.)

Principes et théorèmes fondamentaux. Applications diverses du calcul des résidus. Formules sommatoires tirées du calcul des résidus. Les fonctions $\Gamma(x)$, $\zeta(s)$, $\zeta(s, w)$. Applications au prolongement analytique et à l'étude asymptotique des fonctions définies par un développement de Taylor. — VI + 141 p. 8. Fr. 3,50.

LUCAS DE PESLOÜAN CH., N.-H. ABEL, Sa vie et son oeuvre. (Avec portrait.) — XIII + 168 p. 8.

OCAGNE, M. D', Le calcul simplifié. 2[e] éd., entièrement refondue et considérablement augmenté. — VIII + 228 p. 8.

PICARD, É., et SIMART, G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. T. 2: fasc. 2—3. — p. 207—528. 8.

PIONCHON, J., Principes et formules de trigonométrie rectiligne et sphérique. Avec un appendice sur des minima et maxima de figures géométriques. (Bibliothèque de l'élève-ingénieur. Mathématiques.) — 146 p. 8. Fr. 5—.

TANNERY, J., Leçons d'algèbre et d'analyse. A l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales.

T. 1. VII + 423 p. 8. Fr. 12—.

T. 2. 636 p. 8. Fr. 12—.

Francesco Giannini & Figli.

Napoli 1905.

AMODEO, F., Vita matematica napoletana. Studio storico, biografico, bibliografico. P. 1.

Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732. Dai fratelli di Martino a Vito Caravelli. Nicolò Fergola. Gl' istituti d'istruzione e scientifici in Napoli intorno al 1800. — VIII + 216 p. 4. L. 10—.

Ginn & Company.

Boston, New York, Chicago, London 1904—05.

FINE, H. B., A college algebra.

P. 1: Numbers. P. 2: Algebra. — VIII + 595 p. 8. \$ 1,50 (cloth.).

GOURSAT, E., A course in mathematical analysis. Transl. by Earle R. Hedrick. Vol. 1.

Derivates and differentials. Definite integrals. Expansion in series. Applications to geometry. — VIII + 548 p. 8. \$ 4— (cloth.).

PIERPONT, J., Lectures on the theory of functions of real variables. Vol. 1.

Rational & irrational numbers. Exponentials & logarithms. The elementary functions. Notion of a function in general. First notions concerning point aggregates. Limits of functions. Continuity & discontinuity of functions. Differentiation. Implicit functions. Indeterminate forms. Maxima & minima. Integration. Proper & improper integrals. Integrand infinite. Improper integrals. Interval of integration infinite. Multiple proper integrals. — XII+560 p. 8. Sh. 20—.

G. J. Göschen.

1905.

BÜRKLEN, O. TH., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. (Samml. Göschen 256.) — 196 p. 8. M. 0,80 (geb.).

CLASSEN, J., Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes. — X+249 p. 8. M. 4— (geb.).

DOEHLEMANN, K., Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Dritte, verm. u. verbesserte Aufl., mit 91 Figuren. (Samml. Göschen 72.) — 181 p. 8. M. 0,80 (geb.).

GLEICHEN, A., Vorlesungen über photographische Optik.

Die physikalischen u. geometrischen Grundlagen der Bilderzeugung. Die Bilderzeugung durch zentrierte Kugelflächen im paraxialen Gebiete. Die Strahlenbegrenzung. Die Achromasie. Das Seidelsche Gebiet u. die Petzval-Bedingung. Bedingung für die Aberrationsfreiheit von Punktepaaren bei endlichem Strahlengange. Der Astigmatismus. Die natürliche Blende u. die Abbildung durch Fundamentalstrahlen. Orthoskopie u. Helligkeit. Die symmetrischen Objektive. Geometrische Konstruktionen gebrochener Strahlen u. Strahlenbündel. Historische Notizen u. Konstruktionsdaten einiger Objektive. Die Technik der Durchrechnung. — IX+230 p. 8. M. 9—.

HORN, J., Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. (Samml. Schubert L.)

Existenz d. Lösungen einer gewöhnl. Diff.-gl. beliebiger Ordn. u. eines Systems v. Diff.-gl. 1. Ordn. Allgemeine Sätze üb. lin. Diff.-gl. Lineare Substitutionen. Lineare Diff.-gl. mit konstanten Koeffizienten. Die Integrale linearer Diff.-gl. in der Umgebung singulären Stellen. Die Integrale einer lin. Diff.-gl. in der Umgeb. einer sing. Stelle d. Bestimmtheit. Diff.-gl. d. Fuchsschen Klasse. Asymptotische Darstellung d. Integrale einer lin. Diff.-gl. in der Nähe einer Unbestimmtheitsstelle. Entwickl. d. Integrale einer lin. Diff.-gl. in einem Kreisring... Lin. Diff.-gl. mit period. Koeffizienten. Elementare Integrationsmethoden. Multiplikatoren von Diff.-gl. Diff.-gl. mit Parametern. Periodische Lösungen. Singu-

laritäten d. Diff.-gl. Singuläre Lösungen. Diff.-gl. 2. Ordn. mit eindeutigem allgemeinem Integral. — X + 391 p. 8.

MAHLER, G., Ebene Geometrie. Vierte verbesserte Aufl., mit 110 zweifarbigen Figuren. (Samml. Göschen 41.) — 166 p. 8. M. 0,80 (geb.).

MEYER, W. FRANZ, Differential- und Integralrechnung. Bd 2: Integralrechnung. (Samml. Schubert XI.)

Grundlagen d. Integralrechnung. Anwendungen. Systematische Integralrechnung. — XVI + 443 p. 8. M. 10— (geb.).

SCHOUTE, P. H., Mehrdimensionale Geometrie. T. 2. Die Polytope. (Samml. Schubert XXXVI.)

Topologische Einleitung. Massverhältnisse. Regelmässige Polytope. Die runden Polytope. — IX + 326 p. 8. M. 10— (geb.).

SCHUBERT, H., Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. 1—2.

1: Elementare Berechnung d. Logarithmen auf der untersten Stufe (Untersekunda.). Die Siebzehnteilung des Kreises. Die Kreisteilungsgleichungen. Die Zahl der von zwei Planspiegeln entworfenen Bilder. Volumen des Obelisken aus Höhe u. zwei oder drei beliebig gelegten Parallelschnitten. Üb. eine beim Aufbau des absoluten Masssystems begangene Inkonsequenz. Elementare Ableitung sehr enger Grenzen für die Schwingungszeit eines mathematischen Pendels. Die Konstantenzahl eines Polyeders u. der Eulersche Lehrsatz. Einführung in die neuere Geometrie. Kreise u. Kugeln.

2: Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. Kettenbrüche und Zahlentheorie. Vielstellige Berechnung der Logarithmen auf höherer Stufe (Prima), aber ohne logarithmische Reihen. — 239 & 218 p. 8. à M. 4— (geb.).

VONDERLINN, J., Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. (Samml. Göschen 260.) — 112 p. 8. M. 0,80 (geb.).

WIELEITNER, H., Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. (Samml. Schubert XLIII.)

Allgemeine Gesichtspunkte. Polarentheorie. Die einfachen Singularitäten. Beziehung zwischen Ordnung u. Klasse einer Kurve. Übergang von Punkt- zu Linienkoordinaten. Theor. d. Einhüllenden. Die Hesse'sche u. verwandte Kurven. Die Plücker'schen Formeln. Geschlecht. Rationale Kurven. Das analyt. Dreieck. Asymptoten. Kurvendiskussion. Höhere Singularitäten. Transformation d. Kurven. Das verallgem. Korrespondenzprinzip. Schnittpunktsysteme auf Kurven. Anwend. d. Sätze üb. Schnittpunktsyst. Kurven 3. u. 4. Ordn. Systeme v. Kurven. Literatur-Verzeichnis. — XXII + 313 p. 8. M. 10— (geb.).

A. Hermann.

Paris 1906.

Ball, W. W. Rouse, Histoire des mathématiques. Ed. française rev. et augm. Trad. sur la 3e éd. anglaise par L. Freund. T. 1.

Les mathématiques dans l'antiquité. Les mathém. au moyen-âge et pendant la renaissance. Les mathém. modernes de Descartes à Huygens. Notes complémentaires. — VIII+422 p. 8. Fr. 12—.

Dassen, C. C., Étude sur les quantités mathématiques. Grandeurs dirigées. Quaternions. — VI+133 p. 8.

Issaly, Pierre, Les pseudo-surfaces appliquées à la généralisation ou à l'amendement de diverses théories classiques, issues du calcul infinitésimal. Complément aux trois précédents ouvrages de l'auteur sur les pseudo-surfaces. — VIII+85 p. 8.

Ulrico Hoepli.

Milano 1905.

Brioschi, F., Opere matematiche. T. 4. Publ. per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. — IX+418 p. 4. L. 25—.

Marcolongo, R., Meccanica razionale, 1—2. (Manuali Hoepli 352—355).

1: Cinematica. Statica. 2: Dinamica. Principi di idromeccanica. — XVIII +589 p. 16. L. 3—.

Vivanti, G., Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari. (Manuali Hoepli 366—67.) — VIII+437 p. 8. L. 3—.

Lehmann & Stage.

1905.

Juel, Christian, Analytisk Plangeometri med en Indledning i Infinitesimalregningen. — 183 p. 8.

Macmillan & Co. Ltd.

London, New York 1905—06.

Ball W. W. Rouse, Mathematical recreations and essays. 4th ed.

Some arithmetical, geometrical & mechanical questions. Some miscellaneous questions. Magic squares. Unicursal problems. The mathem. tripos. Three geom. problems. Mersenne's numbers. Astrology. Cryptography and ciphers. Hyper-space. Time and its measurement. Matter and ether theories. — XVI+388 p. 8. Sh. 7—.

Muir, Th., The theory of determinants in the historical order of development. Ed. 2.

P. 1: General determinants up to 1841. P. 2: Special determinants up to 1841. — XI+491 p. 8. Sh. 17. 6 d.

The Open Court Publishing Company.

Chicago 1905.

Smith, D. E., A portfolio of portraits of eminent mathematicians. P. 1: Descartes, Pythagoras, Archimedes, Fermat, Leonardo of Pisa, Euclid, Cardan, Leibniz, Napier, Vieta, Newton, Thales. — P. 2: Pascal, Johann and Jakob Bernoulli, Gauss, Lagrange, l'Hopital, Cavalieri, Euler, Monge, Laplace, Tartaglia, Barrow. — On Jap. vellum $ 5— each; on Amer. plate paper $ 3— each.

Henry Paulin & Cie.

Paris 1904—05.

Bourgonnier, A., et Rollet, P., Cours de mécanique élémentaire.

1. Cinématique. Avec 116 figures dans le texte. VII+198 p. 8. Fr. 3—. (En cart. anglais fr. 4—.)
2. Statique et dynamique. Avec 154 figures dans le texte. 284 p. 8. Fr. 5—. (En cart. anglais fr. 6—.)

L. Pierro.

Napoli 1905.

Amodeo, F., Lezioni di geometria proiettiva dettate nella R. Universita di Napoli. Ed. 3.

Forme di 1° ordine. Forme di 2° ordine a una dimensione. — XIV+451 p. 8. L. 12—.

B. G. Teubner.

1904—06.

Bruns, H., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern . . . Bd 17.) — VIII+328 p. 8. M. 8,40 (geb.).

Bucherer, A. H., Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. — 148 p. 8. M. 3,20 (geb.).

Die physikalischen Institute der Universität Göttingen. Festschrift im Anschlusse an die Einweihung der Neubauten am 9. Dezember 1905.

Hrsg. von der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. — IV + 200 p. 4.

Gans, R., Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. — X + 98 p. 8. M. 2,80 (geb.).

Geissler, K., Anschauliche Grundlagen der mathematischen Erdkunde zum Selbstverstehen und zur Unterstützung des Unterrichts. Mit 52 Figuren im Text. — VI + 199 p. 8. M. 3— (geb.).

Heffter, L. und Koehler, C., Lehrbuch der analytischen Geometrie. Bd 1: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. — XVI + 526 p. 8. M. 14— (geb.).

Manes, A., Versicherungswesen. (Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe . . .). — XII + 468 p. 8. M. 9,40 (geh.).

Nielsen, N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion.

Analytische Theorie der Gammafunktion. Bestimmte Integrale. Theorie der Fakultätenreihen. — X + 326 p. 8. M. 12— (geb.).

Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1905.

Biermann, O., Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden.

Das Rechnen mit genauen u. ungenauen Zahlen. Das rechnerische Prinzip in der höheren Analysis. Näherungsweise Auflösung von Gleichungen. Interpolations- und Differenzenrechnung. Anwendung der Interpolationsrechnung auf die näherungsweise Quadratur und Kubatur. Einige mathematische Instrumente. — IX + 227 p. 8. M. 8— (in Lnwd geb. 8,50).

Vuibert el Nony.

Paris 1905—06.

Baire, R., Théorie des nombres irrationels, des limites et de la continuité. — 59 p. 8. Fr. 1,50.

Guichard, C., Traité de mécanique.

P. 1 (3e éd.): Cinématique à l'usage des élèves de classes de Première *C* et *D*.

P. 2 (2e éd.): Cinématique, statique, dynamique à l'usage des élèves des classes de mathem. *A* et *B*. — VIII + 114 et VIII + 196 p. 8. Fr. 3,50.

Lemaire, G., Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie. Ed. 2.

Lieux géométriques. Méthode d'intersection des lieux géom. Détermination d'une droite. Translation. Rotation (1^{re} partie). Symétrie. Méthode des figures semblables. Homothétie. Inversion. Transformation et partage de figures. — 223 p. 8. Fr. 2,50.

Papelier, G., Précis d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales . . .

Compléments d'algèbre élémentaire. Éléments d'analyse infinitésimale. Théorie des équations. Trigonométrie. — 357 p. 8. Fr. 6,50. — Supplément au précis d'algèbre et de trigonométrie. — 106 p. 8. Fr. 1,75.

Vogt, H., Éléments de mathématiques supérieures . . . (Éd. 3).

Compléments d'algèbre. Principes de géométrie analytique. Dérivées et différentielles. Théorie des équations. Applications géométriques. Calcul intégral. Équations différentielles. Notes d'algèbre. Notes de géom. analyt. Exercices. — VII + 619 p. 8. Fr. 10—.

Nicola Zanichelli.

Bologna 1906.

Enriques, F., Problemi della scienza.

Fatti e teorie. I problemi della logica. La geometria. La meccanica. Estensione della meccanica. — IV + 593 p. 8. L. 10—.